

MONOMIALE DARSTELLUNG ENDLICHER GRUPPEN

BERTRAM HUPPERT

Eine wichtige Aufgabe der Darstellungstheorie ist die Aufstellung eines vollständigen Systems von inäquivalenten irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe \mathcal{G} . Obwohl man Verfahren kennt, die dies theoretisch leisten (etwa die Reduktion der regulären Darstellung), ist die praktische Durchführung nur in wenigen Fällen möglich. Die Aufgabe vereinfacht sich jedoch wesentlich, wenn sich alle irreduziblen Darstellungen von \mathcal{G} auf monomiale Gestalt transformieren lassen; denn alle monomialen Darstellungen einer endlichen Gruppe kann man nach einem sehr einfachen Verfahren gewinnen (siehe [4], S. 140). Liegt dieser Fall vor, so nennen wir \mathcal{G} im Anschluss an Itô [2] eine M -Gruppe. Wichtige Klassen von endlichen Gruppen sind M -Gruppen. Die erste Untersuchung dieser Art stammt wohl von Blichfeldt [3], der zeigte, dass jede Gruppe von Primzahlpotenzordnung eine M -Gruppe ist. Ein sehr allgemeines Kriterium ist das folgende von Zassenhaus [7] herrührende: \mathcal{G} ist eine M -Gruppe, wenn \mathcal{G} einen abelschen Normalteiler \mathcal{N} besitzt, dessen Faktorgruppe \mathcal{G}/\mathcal{N} primzahlstufige Hauptreihen hat. Itô [2] gab kürzlich ein anderes, in der Zassenhauschen Aussage nicht enthaltenes Kriterium an; er zeigte, dass jede auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen eine M -Gruppe ist. Wir beweisen hier einen Satz, der die Ergebnisse von Zassenhaus und Itô umfasst.

SATZ. Die endliche Gruppe \mathcal{G} besitze einen auflösbaren Normalteiler \mathcal{N} , welcher lauter abelsche Sylowgruppen habe. \mathcal{G}/\mathcal{N} sei eine Gruppe mit primzahlstufigen Hauptreihen.¹⁾ Dann ist \mathcal{G} eine M -Gruppe.

Beweis. Da sich die Voraussetzung auf jede Untergruppe von \mathcal{G} überträgt, genügt der Nachweis eines abelschen Normalteilers von \mathcal{G} , der nicht im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathcal{G})$ von \mathcal{G} liegt.

\mathcal{N} habe die Stufe k , d.h. es sei $\mathcal{N}^{(k-1)} \neq \mathcal{E}$, $\mathcal{N}^{(k)} = \mathcal{E}$. Nach Hall [1] oder Taunt [5] besitzt \mathcal{N} einen eindeutig bestimmten maximalen abelschen Normalteiler \mathfrak{B} , der sich darstellen lässt in der Gestalt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}(\mathcal{N}) \times \mathfrak{Z}(\mathcal{N}') \times \dots \times \mathfrak{Z}(\mathcal{N}^{(k-1)}).$$

\mathfrak{B} ist charakteristische Untergruppe von \mathcal{N} , also Normalteiler von \mathcal{G} . Indem wir, falls notwendig, \mathcal{N} durch $\mathcal{N}\mathfrak{Z}(\mathcal{G})$ ersetzen, können wir annehmen, dass $\mathfrak{Z}(\mathcal{G})$ in \mathcal{N} enthalten ist. Dann liegt $\mathfrak{Z}(\mathcal{G})$ in $\mathfrak{Z}(\mathcal{N})$, also auch in \mathfrak{B} . Ist \mathfrak{B} von $\mathfrak{Z}(\mathcal{G})$ verschieden, so sind wir fertig. Aus $\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}(\mathcal{G})$ folgt $\mathfrak{B} = \mathfrak{Z}(\mathcal{N})$ und $\mathcal{N}' = \mathcal{E}$ wegen

Received July 13, 1953.

¹⁾ Eine Gruppe mit primzahlstufigen Hauptreihen wollen wir nach Zappa [6] als überauflösbar bezeichnen.

der Gestalt von \mathfrak{B} . Somit fallen \mathfrak{B} , \mathfrak{N} und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ zusammen. Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ überauflösbar ist, existiert ein Normalteiler \mathfrak{M} von \mathfrak{G} derart, dass $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ Primzahlordnung hat. \mathfrak{M} ist als zyklische Erweiterung des Zentrums abelsch und liegt gewiss nicht in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Damit ist der gewünschte Normalteiler in allen Fällen nachgewiesen.

Es sei noch vermerkt, dass jede endliche Gruppe genau einen minimalen Normalteiler mit überauflösbarer Faktorgruppe besitzt. Dies ergibt sich aus dem Folgenden:

Sind $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ überauflösbar, so auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{N}$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathfrak{M} \wedge \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Wir legen eine Hauptreihe durch $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ und betrachten deren zwischen $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ und \mathfrak{N} liegende Gruppen:

$$\mathfrak{G} \supset \dots \supset \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{N} \supset \dots \supset \mathfrak{M}_{j-1} \times \mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}$$

Setzen wir $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_j = \mathfrak{E}$, so ist die Ordnung von $\mathfrak{M}_i/\mathfrak{M}_{i+1}$ eine Primzahl für $i = 0, \dots, j$. $\mathfrak{M}_i \times \mathfrak{N}$ und \mathfrak{M} sind Normalteiler von \mathfrak{G} , also auch $\mathfrak{M}_i \times \mathfrak{N} \wedge \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i$. Eine primzahlstufige Hauptreihe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ lässt sich nun durch die \mathfrak{M}_i zu einer primzahlstufigen Hauptreihe von \mathfrak{G} ergänzen.

Durch wiederholte Bildung des minimalen Normalteilers mit überauflösbarer Faktorgruppe kann man nun eine "absteigende überauflösbare Reihe" bilden. Die entsprechende aufsteigende Reihe existiert jedoch im allgemeinen nicht; denn die Vereinigung von zwei überauflösbaren Normalteilern einer Gruppe \mathfrak{G} ist nicht notwendig überauflösbar. Dies zeigt das folgende Beispiel:

Wir erweitern eine elementar abelsche Gruppe $\mathfrak{P} = \{P_1, P_2\}$ der Ordnung 25 mit einer Quaternionengruppe, welche von den Elementen A und B erzeugt werde. A und B mögen in \mathfrak{P} die folgenden Automorphismen bewirken:

$$AP_1A^{-1} = P_1^2, AP_2A^{-1} = P_2^3, BP_1B^{-1} = P_2, BP_2B^{-1} = P_1^{-1}.$$

Wie man leicht sieht, sind $\mathfrak{N} = \mathfrak{P} \cdot \langle A \rangle$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \cdot \langle B \rangle$ überauflösbare Normalteiler der entstehenden Gruppe. Aber die Gruppe $\mathfrak{P} \langle A, B \rangle$ ist nicht überauflösbar, da \mathfrak{P} ein minimaler Normalteiler ist.

LITERATUR

- [1] Hall, P. The construction of soluble groups, Journ. für reine u. angew. Math. 182, 206–214, (1940).
- [2] Itô, N. Note on A -groups, Nagoya Math. Journ. 4, 79–81, (1952).
- [3] Miller-Blichfeldt-Dickson. Finite groups.
- [4] Speiser, A. Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937.
- [5] Taunt, D. R. On A -groups, Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 24–42. (1949).
- [6] Zappa, G. Sui gruppi supersolubili, Rend. Sem. Mat. Univ. Roma (4) 2, 323–330, (1937).
- [7] Zassenhaus, H. Über endliche Fastkörper, Abh. math. Seminar Hansischen Univ. 11, 187–220, (1936).

*Mathematisches Institut
der Universität Tübingen*