we have obviously

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^n)} = 1 + {}_nP_1x + {}_nP_2x^2 + \ldots\ldots + {}_nP_rx^r + \ldots\ldots;$$

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^n)(1-x^{n+1})} = 1 + {}_{n+1}P_1x + {}_{n+1}P_2x^2 + \ldots\ldots + {}_{n+1}P_rx^r + \ldots\ldots;$$

whence

$$(1-x^{n+1})(1 + {}_{n+1}P_1x + {}_{n+1}P_2x^2 + \ldots\ldots) = 1 + {}_nP_1x + {}_nP_2x^2 + \ldots\ldots.$$

Equating Coefficients we have

$$\begin{array}{ll} {}_{n+1}P_1 = {}_nP_1 & {}_{n+1}P_{n+1} = {}_nP_{n+1} + 1 \\ {}_{n+1}P_2 = {}_nP_2 & {}_{n+1}P_{n+2} = {}_nP_{n+2} + {}_nP_1 \\ \cdots\cdots = \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}_{n+1}P_n = {}_nP_n & {}_{n+1}P_{n+r} = {}_nP_{n+r} + {}_nP_{n-r+1}. \end{array}$$

Remembering that

$${}_2P_0 = 1,\quad {}_2P_1 = 0,\quad {}_2P_2 = 1,\quad {}_2P_3 = 0, \text{ \&c.},$$

we can, therefore, tabulate (see fig. 32) the values of ${}_nP_r$ on a piece of paper ruled into squares, as follows:—First, write in the upper line 1,0,1,0,1,0, &c. Through the second 1 draw the diagonal EF, then the numbers in the part of any column under this diagonal are simply the numbers *on the diagonal* repeated over and over again. These need not be written down. The lines to the right of the column are filled in thus—place a piece of paper cut in the form ABDC, with AB on the line GK, AC along a perpendicular to GK, and the blank in the line to be filled next to the last step of BD on that line. Then the blank is filled by adding the number above it to the number lowest in position on the immediate left of AC, whether that number lie in the first row 1,0,1,0,1, &c, or on the diagonal EF, or in the part of the line we are dealing with which has been already filled in. As ABDC is placed in the figure, the 25th square of the 20th line has just been filled in by adding 376 to 2.

La Tour d' Hanoï.

By R. E. ALLARDICE, M.A., and A. Y. FRASER, M.A.

§ 1.—The following account of this problem is taken from the *Journal des Débats* for December 27th, 1883.

La poste nous a apporté ces jours-ci une petite boîte en carton peint, sur laquelle on lit: *la Tour d' Hanoï*, véritable casse-tête annamite, rapporté du Tonkin par le professeur N. Claus (de Siam), mandarin du collège Li-Sou-Stian. Un vrai casse-tête en effet, mais intéressant. Nous ne saurions mieux remercier le mandarin de son aimable intention à l'égard d'un profane qu'en signalant *la Tour d' Hanoï* aux personnes patientes possédées par le démon du jeu.

On raconte que, dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, on voit plantées dans une dalle d'airain trois aiguilles de diamant hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur une de ces aiguilles, Dieu enfila au commencement des siècles 64 disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, et les autres, de plus en plus étroits superposés jusqu'au sommet. C'est la tour de Brahma. Nuit et jour, les prêtres se succèdent, occupés à transporter la tour de la première aiguille de diamant sur la troisième sans s'écarter des règles fixes et immuables imposées par Brahma. Le prêtre ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois; il ne peut poser ce disque que sur une aiguille libre ou au-dessus d'un disque plus grand. Lorsqu'en suivant strictement ces recommandations, les 64 disques auront été transportés de l'aiguille où Dieu les a placés sur la troisième, la tour et les brahmes tomberont en poussière et ce sera la fin du monde.

C'est évidemment cette légende qui a inspiré le mandarin du collège Li-Sou-Stian. La tour d'Hanoï, c'est la tour de Brahma; seulement les aiguilles de diamant sont remplacées par des clous et les disques d'or par des rondelles de bois. C'était plus prudent puisqu'il s'agit du Tonkin.

Les rondelles de taille décroissante sont au nombre de 8 seulement, et c'est bien assez. En opérant comme le font les brahmes, si la tour avait 64 étages, il faudrait tout simplement exécuter successivement un nombre de déplacemens exprimé par le nombre vertigineux de 18,446,744,073,709,551,615, ce qui exigerait plus de *cinq milliards de siècles !*

Avec 8 disques, il faut 255 déplacemens, ce qui, en attribuant une seconde à chaque déplacement, nécessite encore quatre minutes au moins pour transporter la tour.

En mettant en pratique la règle du jeu, on reconnaîtra vite que, pour déplacer 2 disques, il faut *trois* coups; pour 3 disques, *sept* coups, soit le double plus un; pour 4 disques, *quinze* coups, le double plus un, et ainsi de suite. Pour déplacer les 8, on voit qu'il faut *deux cent cinquante-cinq* coups.

Ce jeu ingénieux est fondé sur le problème élémentaire des combinaisons. Newton en a donné une formule générale très connue sous le nom de "Binôme de Newton." Mais les anciens, bien avant lui, avaient su trouver aussi l'expression correcte du nombre des combinaisons que l'on peut obtenir avec 11 lettres de l'alphabet. Le nombre des combinaisons possibles avec 4 lettres est égal à 2^4 diminué d'une unité ; avec 5 lettres égale à 2^5 diminué d'une unité, etc. Avec 8 lettres, ou 8 disques, ce qui revient au même, 2^8 soit 256 diminué d'une unité, c'est-à-dire 255. Une tour de 9 disques nécessiterait de même le double des déplacemens plus un, ou, ce qui est la même chose, $2^9 - 1$, soit 513 déplacemens, etc.

La tour d'Hanoï nous a rappelé le jeu du baguenaudier, très étudié, entre autres jeux curieux, dans un ouvrage fort original que nous avons mentionné en son temps : les *Récréations mathématiques*, par M. Edouard Lucas, professeur au lycée Saint-Louis.

Ce souvenir m'est revenu fort à propos. Je tenais à découvrir le nom du mandarin, inventeur de la tour d'Hanoï. On n'est jamais trahi que par soi-même. Un mandarin, qui imagine un jeu fondé sur les combinaisons, doit sans cesse songer aux combinaisons, en voir et en mettre partout. Or, en permutant les lettres du signataire de la tour d'Hanoï, il me semble que l'on peut traduire, sans la moindre difficulté : professeur *N. Claus* (*de Siam*), mandarin du collège *Li-Sou-Stian :* Lucas d'Amiens, professeur du lycée Saint-Louis. Est-ce que moi aussi j'aurais trouvé mon problème ? HENRI DE PARVILLE.

Taking an ordinary pile of eight brass weights and three sheets of paper, A,B,C, we may state the problem thus :—

The set of weights being on A, it is required to pile them in proper order on C by lifting only one at a time and laying it down either on an empty sheet or on a greater weight.

§ 2.—To find the number of moves required to shift n discs, two solutions are offered.

(1.) Let N_n be the number of moves required to shift n discs from A to C (or to B). To shift n discs to C the following plan must be followed : $n-1$ discs are shifted to B (N_{n-1} moves), the n^{th} disc is now moved from A to C (one move), and then the $n-1$ discs are shifted from B to C (N_{n-1} moves).

Hence $N_n = 2N_{n-1} + 1$;

$$\begin{aligned}\therefore\ N_n + 1 &= 2\left\{N_{n-1} + 1\right\} = 2\left\{2(N_{n-2} + 1)\right\}\\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &= 2^{n-1}(N_1 + 1) = 2^{n-1}(1 + 1)\\ &= 2^n;\\ \therefore\ N_n &= 2^n - 1.\end{aligned}$$

(2.) A little inspection will show that any disc has to be moved twice as often as the one immediately greater; and since the n^{th} disc is moved only once, it follows that

$$\begin{aligned}N_n &= 1 + 2 + 2^2 + \dots\dots + 2^{n-1}\\ &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.\end{aligned}$$

§ 3.—To accomplish the actual moves a simple rule may be given, as follows :—

To shift an even number of discs from A to C, move, by one step at a time, the odd numbers round ABC, counter-clockwise, the even numbers round ACB, clockwise.

To shift an odd number of discs the directions are reversed.

Note on Spherical Trigonometry.

By R. E. Allardice, M.A.

In the first volume of Gergonne's *Annales de Mathématiques* (1810-11), there is a paper by Lhuilier, in which he gives properties of the right-angled spherical triangle, analogous to the following properties of the right-angled plane triangle :

1. The square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the other two sides;

2. If a perpendicular be drawn from the right angle to the hypotenuse, the square on each side is equal to the rectangle contained by the hypotenuse and the adjacent segment of the hypotenuse;

3. The squares on the sides are to one another as the adjacent segments of the hypotenuse;

4. The square on the perpendicular is equal to the rectangle contained by the segments of the hypotenuse;

5. The hypotenuse, the sides, and the perpendicular are in proportion.