Can. J. Math., Vol. XXXI, No. 1, 1979, pp. 124–129

QUELQUES PROPRIÉTÉS SUR LE NORMALISATEUR D'UN PSEUDOGROUPE DE LIE TRANSITIF

ODINETE RENÉE ABIB

Introduction. Etant donné une variété différentiable M, deux pseudogroupes $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sur M sont dits appartenir au même type, s'il existe un difféomorphisme local de M transformant $\mathscr{L}_1$ en $\mathscr{L}_2$.

Le problème général de la recherche des pseudogroupes sur M peut être énoncé de manière suivante:

(1) Déterminer tous les types des pseudogroupes sur M, et pour chaque type un représentant particulier.

(2) Pour chaque pseudogroupe ainsi obtenu, déterminer le plus grand pseudogroupe sur M dans lequel il est invariant.

Dans [**5**], E. Cartan a utilisé cette méthode pour classifier les pseudogroupes sur $\mathbf{R}^2$; pour une démonstration plus récente voir [**6**]. Ceci montre ce plus l'intérêt d'étudier le normalisateur d'un pseudogroupe de Lie $\mathscr{L}$ sur M.

Le but principal de ce travail est d'établir certaines propriétés sur la suite de normalisateur $\{\Omega_l(\mathscr{L})\}$ de $\mathscr{L}$ dans le pseudogroupe de Lie de tous les champs locaux de vecteurs sur M.

Nous montrerons essentiellement les résultats suivants: si L est une sous-algèbre graduée transitive de $D(V)$, alors sa suite de normalisateurs dans $D(V)$ est stationnaire; la suite $\{\Omega_l(\mathscr{L})\}$ n'est en général pas stationnaire; si $\mathscr{L}$ est un pseudogroupe de Lie sur $\mathbf{R}^2$, alors sa suite de normalisateurs est stationnaire.

1. Préliminaires. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de caractéristique zéro; considérons l'algèbre

$$D(V) = \prod_{l \geqq 0} (S^l V^* \otimes V)$$

où $S^l V^* \otimes V$ est l'espace des polynômes homogènes de degré l sur V à valeurs dans V, et pour la structure d'algèbre de Lie, on a:

$$[f \otimes U, g \otimes v] = f \cdot (\partial_U g) \otimes v - g'(\partial_v f) \otimes U,$$

$\partial_U g$ et $\partial_v f$ étant des dérivées par rapport au vecteur U et v des séries formelles f et g de

$$\prod_{l \geqq 0} (S^l V^*).$$

Reçu le 31 août, 1977 et sons forme revisée, le 17 janvier, 1978.

Evidemment $D(V)$ est une algèbre de Lie filtrée complète,

$$D(V) = D^{-1} \supset D^0 \supset D^1 \supset \ldots \supset D^k \supset \ldots$$

où

$$D^k = \prod_{l \geqq k+1} (S^l V^* \otimes V) \quad \text{pour } k \geqq -1.$$

Soit L une sous-algèbre fermée de $D(V)$, ayant une topologie définie par la filtration; sur L, on a la filtration induite:

$$L = L^{-1} \supset L^0 \supset L^1 \supset \ldots \supset L^k \supset \ldots .$$

Posons $g^k = L^k/L^{k+1}$, pour $k \geqq -1$, de sorte que

$$\operatorname{gr}(L) = \prod_{k \geqq -1} g^k$$

s'identifie à une sous-algèbre de $D(V)$; L sera dite transitive si $g^{-1} = L/L^0 = V$; Si $L = \operatorname{gr}(L)$ on dira que L est graduée.

2. Considérons L une sous-algèbre de Lie graduée transitive de $D(V)$:

$$L = V + g + g^1 + g^2 + \ldots + g^k + \ldots$$

et notons $N_l(L)$ son l^{ieme}-normalisateur dans $D(V)$.

LEMME 2-1. *Si la matrice identité appartient à g, alors la suite de normalisateurs de L est stationnaire.*

Preuve. L'algèbre L étant graduée, $\{N_l(L)\}_l$ est une suite des sous-algèbres graduées de $D(V)$:

$$N_l(L) = V + g_l + g_l^1 + \ldots + g_l^k + \ldots .$$

Pour $l = 1$, on a $[g_1^1, g] \subset g^1$ et $g^1 \subset g_1^1$; aors $[f, \mathrm{id}] = f$ est dans g^1, pour tout f dans g_1^1; ainsi $g^1 = g_1^1$; de $[g_1^k, g] \subset g^k$ et $g^k \subset g_1^k$ on obtient de façon analogue $g^k = g_1^k$; d'où,

$$N_1(L) = V + g_1 + g_1 + g_2 + \ldots + g^k \ldots$$

à fortiori,

$$N_l(L) = V + g_l + g^1 + g^2 + \ldots + g^k + \ldots, \quad \text{pour tout } l \geqq 0;$$

la suite $\{g_l\}_{l \geqq 0}$ des sous-espaces de $V^* \otimes V$ étant stationnaire, on obtient nécessairement notre résultat.

THÉORÈME 2-1. *Si L est une sous-algèbre de Lie graduée transitive de l'algèbre $D(V)$, alors sa suite de normalisateurs dans $D(V)$ est stationnaire.*

Preuve. De $[g^{k+1}, V] \subset g^k$, pour tout $k \geqq -1$, on obtient g^{k+1} inclus dans l'ensemble $(g^k)^{+1}$ des éléments f de $S^{k+1}V^* \otimes V$ tels que $[f, V] \subset g^k$; alors il existe un entier k_0 vérifiant $g^{k+1} = (g^k)^{+1}$ pour tout $k \geqq k_0$; ainsi,

$$L = V + g + g^1 + \ldots + g^{k_0} + g^{k_0+1} + \ldots$$

et

$$N_1(L) = V + g_1 + g_1{}^1 + g_1{}^2 + \ldots + g_1{}^{k_0} + g^{k_0+1} + \ldots$$

où g_1 est l'ensemble des éléments f de $V^* \otimes V$ vérifiant les conditions:

$$[f, g] \subset g, [f, g^1] \subset g^1, \ldots, [f, g^{k_0}] \subset g^{k_0}.$$

La matrice identité est dans g_1 et le résultat découle du lemme 2.1.

Exemples. (1) Soit $g = sl(V)$ l'algèbre de Lie unimodulaire; considérons:

$$L = V + g + g^{(1)} + g^{(2)} + \ldots + g^{(k)} + \ldots$$

alors,

$$N_1(L) = V + V^* \otimes V + G^{(1)} + \ldots + g^{(k)} + \ldots,$$

et

$$N_2(L) = N_1(L).$$

(2) Supposons g irréductible; lorsque L est de dimension finie deux cas sont à considérer:

(*a*) Si L: $V + g + g^1 + \ldots + g^k$ avec $g^1 \neq \{0\}$ on a $g^2 = \{0\}$ et $L = N_1(L)$ car L est simple (cf. [**1**]).

(b) Si $L = V + g$ on obtient $N_l(L) = V + N_l(g)$ où $N_l(g)$ est le l^{ieme}-normalisateur de g dans $V^* \otimes V$.

3. Soit L une sous-algèbre de Lie transitive fermée de $D(V)$.

LEMME 3-1. *Si I est un idéal fermé de L tel que* $\mathrm{gr}(I) = \mathrm{gr}(L)$, *alors* $I = L$.

En effet, $I \supset I^0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I^k \supset \ldots$ étant la filtration induite sur I on a $I^k/I^{k+1} = L^k/L^{k+1}$, pour $k \geqq -1$, d'après l'hypothèse; ainsi $L^k = I^k + L^{k+1}$, pour tout $k \geqq -1$; On vérifie, aisément par récurrence sur k, que $L \subset I + L^k$ pour $k \geqq 0$; puisque I est fermée, on a donc $L \subset I$.

PROPOSITION 3-1. *L étant une sous-algèbre transitive fermée de $D(V)$ on a:*
(1) *la suite de normalisateurs $\{N_l(L)\}$ de L dans $D(V)$ est stationnaire si, et seulement si, la suite* $\{\mathrm{gr}(N_l(L))\}$ *est stationnaire.*
(2) *Pour tout $l \geqq 0$, notons g_l l'algèbre d'isotropie de $N_l(L)$; s'il existe un entier $l_0 \geqq 0$ tel que la matrice identité soid dans g_{l_0}, alors la suite $\{N_l(L)\}$ est stationnaire.*
(3) *La réciproque de* (2) *est fausse.*

Preuve. L'affirmation (1) découle du lemme 3-1, car $N_l(L)$ est un idéal fermé de $N_{l+1}(L)$ pour $l \geqq 0$; la partie (2) résulte du lemme 2-1 et de l'affirmation (1); pour démontrer (3) il suffit de considérer sur $\mathbf{R}^2$ le faisceau $\mathscr{L}$ des champs de vecteurs de la forme:

$$X = a \cdot \partial/\partial x + (b + ce^x)\partial/\partial y$$

avec a, b et c dans $\mathbf{R}$; alors $\Omega_1(\mathscr{L}) = \Omega_2(\mathscr{L})$ est le faisceau des champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^2$ de la forme,

$$Y = a\cdot\partial/\partial x + (b + ce^x + dx + f\cdot y)\partial/\partial y, \quad \text{avec } a,\, b,\, c,\, d \text{ et } f \text{ dans } \mathbf{R};$$

d'autre part, $\mathrm{gr}(\mathscr{L})$ étant l'algèbre graduée associée à $\mathscr{L}$ à l'origine de $\mathbf{R}^2$, on a:

$$\mathrm{gr}(\mathscr{L}) = \mathbf{R}^2 + g \quad \text{et} \quad \mathrm{gr}(\Omega_1(\mathscr{L})) = \mathbf{R}^2 + g_1 + g^1,$$

où g est l'ensemble des matrices de la forme:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

et g_1 l'ensemble des matrices de la forme:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{bmatrix}.$$

4. En ce qui concerne la suite de normalisateurs d'un pseudogroupe de Lie nous avons les résultats suivants:

THÉORÈME 4-1. *Si $\mathscr{L}$ est un pseudogroupe infinitésimal de Lie transitif sur une variété différentiable M, alors sa suite de normalisateurs dans le faisceau de tous les champs de vecteurs sur M n'est en général pas stationnaire.*

En effet, considérons sur $\mathbf{R}^3$ le pseudogroupe de Lie $\mathscr{L}$, d'ordre 2, des champs de vecteurs de la forme,

$$X = a\partial/\partial x + f(x)\partial/\partial y + \{(v + f'(x))z + g(x)e^y\}\partial/\partial y$$

avec a, b dans $\mathbf{R}$, f et g des fonctions différentiables quelconques en x; on démontre, après un calcul, que $\Omega_l(\mathscr{L})$ est le pseudogroupe de Lie, d'ordre $l + 2$, des champs de vecteurs de la forme:

$$Y = a\partial/\partial x + f(x)\partial/\partial y + \{(P_l(x) + f'(x))\, z + g(x)e^y\}\partial/\partial z,$$

$P_l(x)$ étant un polynôme de degré $\leqq l$ en x.

Rappelons que si $\mathscr{L}$ est un pseudogroupe infinitésimal de Lie sur M contenant le champ de vecteurs identité alors sa suite de normalisateur est stationnaire; Cette remarque et la classification de Elie Cartan permet d'affirmer:

THÉORÈME 4-2. *Soit $\mathscr{L}$ un pseudogroupe infinitésimal de Lie sur $\mathbf{R}^2$, alors sa suite de normalisateurs est stationnaire.*

Preuve. (A) Pour le cas intransitif, on a:

(1) $\mathscr{L}$ est le faisceau des champs de vexteurs X sur $\mathbf{R}^2$: $X = f(x, y)\partial/\partial x$, avec $f(x, y)$ fonction différentiable quelconque de x, y; $\Omega_1(\mathscr{L})$ est formé des champs de vecteurs Y sur $\mathbf{R}^2$, $Y = f(x, y)\partial/\partial x + g(y)\partial/\partial y$, avec $g(y)$ fonction différentiable arbitraire en y.

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-013-7 Published online by Cambridge University Press

(2) $\mathscr{L}$ est le faisceau des champs de vecteurs X de la forme, $X = f(x)\partial/\partial x$, avec $f(x)$ une fonction différentiable arbitraire en x; $\Omega_1(\mathscr{L})$ est formé des champs de vecteurs Y sur $\mathbf{R}^2$:

$$Y = f(x)\partial/\partial x + g(y)\partial/\partial y,$$

avec $f(x)$, $g(y)$ fonctions différentiables arbitraires.

(3) Si $\mathscr{L}$ est formé des champs locaux de vecteurs X sur $\mathbf{R}^2$, $X = f(y)\partial/\partial x$, avec $f(y)$ fonction différentiable quelconque en y, le normalisateur $\Omega_1(\mathscr{L})$ est le faisceau des champs de vecteurs Y sur $\mathbf{R}^2$:

$$Y = (x\cdot h(y) + f(y))\partial/\partial x + g(y)\cdot\partial/\partial y.$$

(4) $\mathscr{L}$ est le faisceau des champs de vecteurs $X = f(y)\partial/\partial x$, avec $f(y)$ solution d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre $n + 1$ en y; alors $\Omega_1(\mathscr{L})$ est formé des champs locaux de vecteurs $Y = (ax + g(y))\partial/\partial x$ avec $g(y)$ différentiable quelconque en y et a dans $\mathbf{R}$; $\Omega_2(\mathscr{L})$ est le faisceau des champs de vecteurs

$$Y = (x\cdot h(y) + g(y))\partial/\partial x + p(y)\partial/\partial y,$$

avec $h(y)$, $g(y)$ et $p(y)$ des fonctions différentiables quelconques en y.

(5) Si $\mathscr{L}$ est formé des champs locaux de vecteurs X sur $\mathbf{R}^2$,

$$X = (x\cdot g(y) + f(y))\partial/\partial x,$$

avec $g(y)$ et $f(y)$ des fonctions différentiables en y, on obtient que $\Omega_1(\mathscr{L})$ contient le champ identité.

(6) Si $\mathscr{L}$ est formé des champs locaux de vecteurs X sur $\mathbf{R}^2$,

$$X = (f(y) + x\cdot g(y))\partial/\partial x,$$

avec $f(y)$ fonction différentiable arbitraire en y, $g(y)$ solution d'une équation différentiable linéaire d'ordre $n + 1$ ordinaire en y, le normalisateur $\Omega_1(\mathscr{L})$ est le faisceau des champs de vecteurs

$$X = (f(y) + x\cdot h(y))\partial/\partial x,$$

avec $f(y)$ et $h(y)$ des fonctions différentiables quelconques en y; En plus, $\Omega_2(\mathscr{L})$ est formé des champs locaux de vecteurs

$$Y = (f(y) + x\cdot h(y))\partial/\partial x + g(y)\partial/\partial y,$$

avec $g(y)$ fonction différentiable arbitraire en y.

(7) $\mathscr{L}$ est le faisceau des champs de vecteurs X sur $\mathbf{R}^2$;

$$X = (a\cdot x + f(y))\partial/\partial x,$$

avec $f(y)$ solution d'une équation différentielle linéaire ordinaire d'ordre n en y; et $\mathscr{L} = \Omega_1(\mathscr{L})$.

(8) $\mathscr{L}$ est le faisceau des champs de vecteurs

$$X = (f(y) + x\cdot g(y) + x^2\cdot h(y))\partial/\partial x,$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1979-013-7 Published online by Cambridge University Press

avec $f(y)$, $g(y)$ et $h(y)$ des fonctions différentiables quelconques en y; alors $\Omega_1(\mathscr{L})$ est formé des champs locaux Y sur $\mathbf{R}^2$:

$$Y = (f(y) + x\cdot g(y) + x^2\cdot h(y))\partial/\partial x + \psi(y)\partial/\partial y,$$

avec $\psi(y)$ fonction différentiable quelconque en y.

(9) Si $\mathscr{L}$ est le faisceau des champs de vecteurs X sur $\mathbf{R}^2$,

$$X = (a + bx + cx^2)\partial/\partial x,$$

avec a, b et c réels, son normalisateur est formé des champs locaux de vecteurs Y sur $\mathbf{R}^2$:

$$Y = (a + bx + cx^2)\partial/\partial x + f(y)\partial/\partial y,$$

avec $f(y)$ fonction différentiable quelconque en y.

(B) La classification de E. Cartan nous donne une list de soixante et quatre pseudogroupes infinitésimaux de Lie transitifs sur $\mathbf{R}^2$; en faisant les calculs nécessaires, notre résultat découle du fait que dans chaque cas le champs identité appartient à un des normalisateurs.

Bibliographie

1. O. R. Abib, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, (1976) (à paraître).

2. ——— *Equations de Lie invariantes par un pseudogroupe de Lie*, Nagoya Mathematical Journal, (à paraître).

3. P. Molino, *Lectures Notes in Mathematics*, (Springer, n° 588, 1977).

4. J. F. Pommaret, (C.R.A.S. t. 284, série 1, 1977).

5. E. Cartan, *Oeuvres complètes*, (partie II, vol. 2, ch. II, III, IV).

6. N. Van Quê, *Classification des pseudogroupes de Lie intransitifs sur* $\mathbf{R}^2$, 1977, (à paraître).

Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
Montpellier, France;
Université de São Paulo,
São Paulo, Brésil