

EXISTENCE DE SOLUTIONS AU SENS DE
CARATHÉODORY POUR LE PROBLÈME
DE NEUMANN $y'' = f(t, y, y')$

ZINE E. A. GUENNOUN

RÉSUMÉ. Nous annonçons ici des résultats d'existence et leurs conséquences d'un problème de Neumann pour l'équation différentielle non linéaire:

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \text{ p.p. dans } [0, 1]; y'(0) = r, y'(1) = s$$

où $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory sous des conditions de croissance de non linéarité très rapide suivant la variable y' .

ABSTRACT. We announce some existence results and their consequences for the Neumann problem of the nonlinear differential equation:

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \text{ p.p. dans } [0, 1]; y'(0) = r, y'(1) = s$$

where $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a Carathéodory function and can grow very rapidly in the y' variable.

0. Introduction. Dans cette note, nous nous intéressons au problème d'existence d'une solution au sens de Carathéodory pour le problème de Neumann:

$$(N) \quad y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \text{ p.p. dans } [0, 1]; y'(0) = r, y'(1) = s$$

où $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory qui vérifie des conditions de croissance rapide de non-linéarité suivant y' ; $r, s \in \mathbb{R}$. Une solution au sens de Carathéodory est une fonction y continûment différentiable telle que y' est absolument continue vérifiant (N).

Dans plusieurs travaux antérieurs (voir par exemple [1], [4], [5], [7], [9], [10]), on obtenait l'existence d'une solution de certains problèmes aux limites en imposant à $f(t, y, p)$ des conditions de croissance du type Bernstein (croissance quadratique suivant p) ou du type Nagumo. Récemment, Granas-Guenther-Lee [8] ont obtenu des résultats d'existence d'une solution classique pour un problème de Neumann sous des conditions de croissance rapide de la non-linéarité suivant la variable p . Ils ont établi entre autres le résultat suivant. Supposons que f est une fonction continue qui vérifie les hypothèses:

- (i) il existe $M > 0$ tel que $yf(t, y, 0) > 0$ pour tout $|y| > M$;

Reçu par les éditeurs le March 26, 1990.

AMS subject classification: 34B10, 34B15.

© Société mathématique du Canada 1991.

Alors le problème de Neumann homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & 0 \leq t \leq 1; \\ y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si on considère de Neumann homogène suivant:

$$(1) \quad y''(t) = h(y'(t))y'^3(t) + y^5(t) + e^{-|y'(t)|y(t)} + t^3 \quad 0 \leq t \leq 1; \quad y'(0) = y'(1) = 0,$$

où $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à support borné, par exemple $h(p) = 1 - |p|$ si $p \in [-1, 1]$ et 0 autrement. Il est clair que le résultat précédent n'est pas applicable car la fonction $f(t, y, p)$ ne vérifie pas (ii). Remarquons tout d'abord que si la fonction $f(t, y, p)$ est continue et vérifie (ii) alors elle vérifie la condition suivante:

(ii') il existe $M_1 > 0$ tel que pour tout $(t, y) \in (0, 1) \times (-M, M)$ et $|p| > M_1$, il existe un voisinage V de (t, y, p) dans $(0, 1) \times (-M, M) \times [-M_1, M_1]^c$ tel que l'une des conditions suivantes est toujours vérifiée:

$$\inf\{f(u, v, q) \mid (u, v, q) \in V\} > 0$$

ou bien

$$\sup\{f(u, v, q) \mid (u, v, q) \in V\} < 0.$$

La fonction $h(p)p^3 + y^5 + e^{-|p|y} + t^3$ vérifie (ii') mais ne vérifie pas (ii). Si on considère la fonction $f(t, y, p) = (1/\sqrt{t})p + y^5 + t$, la continuité n'est pas vérifiée.

Nous proposons dans cette note d'étendre certains résultats d'existence en remplaçant la continuité par une fonction de Carathéodory ainsi que les conditions de (i) et (ii) par les conditions plus faibles suivantes:

(H₁) il existe $M > 0, f(t, M, 0) \geq 0$ et $f(t, -M, 0) \leq 0$ p.p. dans $[0, 1]$,

(H₂) il existe $M_1 > 0$ tel que pour tout $(t, y) \in (0, 1) \times (-M, M)$ et $|p| > M_1$, il existe un voisinage $U \times V$ de (t, y, p) tel que une des conditions suivantes est toujours vérifiée:

$$\inf_{u \in U} \text{ess}\{f(u, v, q) \mid (v, q) \in V\} > 0$$

ou bien

$$\sup_{u \in U} \text{ess}\{f(u, v, q) \mid (v, q) \in V\} < 0.$$

Notons que la condition (i) implique (H₁) et que dans le cas continue la condition (H₂) découle de la condition:

(H'₂) il existe $M_1 > 0$ tel que $f(t, y, p) \neq 0$ pour tout $(t, y) \in (0, 1) \times (-M, M)$ et $|p| > M_1$.

REMARQUE. Pour vérifier (H'₂), il suffit d'étudier les racines de l'équation $f(t, y, p) = 0$ dans \mathbb{R}^3 .

Notons que la conditions (H₂) n'est jamais vérifiée si la fonction est une fonction linéaire par rapport à la variable y . Par exemple la fonction $f(t, y, p) = r(t)y$.

Dans la deuxième partie nous nous intéressons à un problème de Neumann non homogène et aux conséquences des résultats généralisés obtenus.

Notons que la conditions (H₂) n'est jamais vérifiée si la fonction est une fonction linéaire par rapport à la variable y. Par exemple la fonction $f(t, y, p) = r(t)y$.

Dans la deuxième partie nous nous intéressons à un problème de Neumann non homogène et aux conséquences des résultats généralisés obtenus.

1. Notations et résultats préliminaires. Dans la suite, C^k dénotera l'ensemble des fonctions $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiables jusqu'à l'ordre k , muni de la norme $\|u\|_k = \max\{\|u\|_0, \|u'\|_0, \dots, \|u^{(k)}\|_0\}$, où $\|u\|_0$ est la norme uniforme. L'ensemble des fonctions continues C^0 est noté C ; $C_0 = \{u \in C \mid u(0) = 0\}$.

Soit $p \geq 1$, $L^p = \{u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_a^b \|u\|^p d\mu < \infty\}$ muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_{L^p}$; μ désignera la mesure de Lebesgue.

Pour $k > 1$, on définit $\tilde{C}^{k,p} = \{u \in C^{k-1} \mid u^{(k-1)} \text{ est absolument continue, } u^{(k)} \in L^p\}$.

PROPOSITION 1.1. Soient $u \in \tilde{C}^{2,p}$ et $t_0 \in (a, b)$, supposons que u atteint son maximum (resp. minimum) en t_0 . Alors pour tout V voisinage de t_0 , l'ensemble $\{t \in V \mid u''(t) \leq 0\}$ (resp. $\{t \in V \mid u''(t) \geq 0\}$) est de mesure non nulle.

DÉFINITION. Une fonction $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de Carathéodory (resp. L^p -Carathéodory, $p > 1$) si elle vérifie:

- (a) $x \mapsto f(t, x)$ est continue p.p. tout $t \in [0, 1]$;
- (b) $t \mapsto f(t, x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- (c) pour tout $K > 0$ il existe $h_k \in L^1$ (resp. $h_k \in L^p$) tel que, si $\|x\| \leq K$ alors $\|f(t, x)\| \leq h_k(t)$ p.p. $t \in [0, 1]$.

DÉFINITION. Étant donné $M > 0$ et $f_1: [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory, on définit $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction associée à (f, M) par

$$f_1(t, y, p) = \begin{cases} \max(-M, f(t, y, p) - y) & \text{si } y > M; \\ f(t, y, p) - y & \text{si } -M \leq y \leq M; \\ \min(M, f(t, y, p) - y) & \text{si } y < -M; \end{cases}$$

et $N_{f_1}: C^1 \rightarrow C_0$ l'opérateur associé à (f, M) par $N_{f_1}[u](t) = \int_0^t f_1(s, u(s), u'(s)) ds$ pour tous $u \in C^1$ et $t \in [0, 1]$.

Remarquons que la fonction f_1 n'est pas une fonction de Carathéodory; elle ne vérifie pas l'hypothèse (a) de la définition.

Rappelons qu'une fonction est dite complètement continue, si l'image par cette fonction de tout borné est relativement compacte.

PROPOSITION 1.2. Soit $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory qui vérifie:

- (H₁) il existe $M > 0$, $f(t, M, 0) \geq 0$ et $f(t, -M, 0) \leq 0$ p.p. dans $[0, 1]$. Alors
 - (i) N_{f_1} , l'opérateur associé à (f, M) , est continu;
 - (ii) N_{f_1} est complètement continu.

Pour une démonstration de ce résultat voir [4] et [9].

Dans cette section, nous donnons des résultats sur la théorie de transversalité topologique que nous utilisons d'une façon essentielle dans la démonstration de certains résultats principaux. Pour plus de détails, voir Dugundji, Granas [2], Granas [3]. Soient X, Y deux espaces normés. Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est dite *compacte* si $f(X)$ est un ensemble relativement compact.

Rappelons que si $X \subseteq Y$ alors f a un point fixe s'il existe un $x \in X$ tel que $x = f(x)$. Soit E un espace vectoriel normé, C un convexe dans E , et U un ouvert dans C . $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ dénotera l'ensemble de toutes les applications de \bar{U} dans C continues, compactes et sans point fixe sur la frontière ∂U .

Soit $H: [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow C$, H est appelé une *homotopie compacte sans point fixe sur ∂U* si $H(\lambda, \cdot): \bar{U} \rightarrow C$ appartient à $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

DÉFINITIONS. (1) Soient $f, g \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$; on dit que f, g sont *homotopes dans $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$* s'il existe une homotopie compacte sans point fixe sur ∂U telle que $H_0 = H(0, \cdot) = f$ et $H_1 = H(1, \cdot) = g$.

(2) Une application $f \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ est dite *essentielle* si pour tout $g \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ tel que $f|_{\partial U} = g|_{\partial U}$, g a un point fixe; en particulier f a un point fixe.

THÉORÈME 1.3 (TRANSVERSALITÉ TOPOLOGIQUE). Soient $f, g \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ deux applications homotopes. Alors f est essentielle si et seulement si g est essentielle.

THÉORÈME 1.4. Soit $f: \bar{U} \rightarrow C$ l'application constante $f(x) = x_0$. Alors f est essentielle si $x_0 \in U$.

2. Problème de Neumann homogène.

THÉORÈME 2.1. Supposons que f est une fonction de Carathéodory qui vérifie les hypothèses $(H_1), (H_2)$. Alors le problème de Neumann homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & \text{p.p. dans } [0, 1]; \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans $\tilde{C}^{2,1}$ telle que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$ (où M est la constante de (H_1)).

DÉMONSTRATION. Soit f une fonction de Carathéodory qui vérifie $(H_1), (H_2)$. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, considérons la famille des problèmes:

$$(N)_\lambda \quad \begin{cases} y''(t) = \lambda f(t, y(t), y'(t)) & \text{p.p. dans } [0, 1], \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

et la famille des problèmes associés:

$$(N)_{1,\lambda} \quad \begin{cases} y''(t) - y(t) = \lambda f_\lambda(t, y(t), y'(t)) & \text{p.p. dans } [0, 1], \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

où f_λ est la fonction associée à $(\lambda f, M)$, $(N)_{1,\lambda}$ est appelé le *problème associé* à $(N)_\lambda$. Notons que la fonction λf vérifie (H_1) pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

LEMME 2.2.

- (i) Pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et toute solution y de $(N)_{1,\lambda}$, on a la majoration $\|y\|_0 \leq M$;
- (ii) Toute solution y de $(N)_{1,\lambda}$ est une solution y de $(N)_\lambda$. De plus, on a la majoration $\|y'\|_0 \leq M_1$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

PREUVE DU LEMME. (i) Soit y une solution de $(N)_{1,\lambda}$, nous allons montrer que $\|y\|_0 \leq M$. En effet, soit $b \in [0, 1]$, tel que la fonction $t \mapsto y(t)$ atteint son maximum positif en b . Supposons que $y(b) > M$ et que $b \in (0, 1)$, il existe alors un voisinage V de b tel que $y(t) > M$ pour tout $t \in V$. D'après la définition de f_1 on a $y''(t) - y(t) \geq -M$ p.p. dans V ; par conséquent $y''(t) > 0$ p.p. dans V et on obtient une contradiction avec la proposition 1.1.

Supposons maintenant que $b = 1$ et que $y(1) > M$, il existe alors $a < 1$ tel que $y(t) > M$ pour tout $t \in [a, 1]$. Par suite $y''(t) > 0$ p.p. dans $[a, 1]$ et $y'(1) > 0$ donc $y'(t) - y'(1) = \int_t^1 y''(s) ds > 0$ pour tout $t \in [a, 1]$; puisque $y'(1) = 0$ on a $y'(t) < 0$ et on obtient que $y(1) < y(a)$, ce qui est une contradiction avec le fait que y atteint son maximum en 1. La démonstration est analogue si on suppose que $b = 0$ et $y(0) > M$. Dans le cas où la fonction $t \mapsto y(t)$ atteint son minimum négatif en b telle que $y(b) < -M$ et $b \in (0, 1)$, il existe un voisinage V de b tel que $y(t) < -M$ pour tout $t \in V$. D'après la définition de f_1 on a $y''(t) - y(t) \leq M$ p.p. dans V ; par conséquent $y''(t) < 0$ p.p. dans V et on obtient une contradiction avec la proposition 1.1. Les autres cas se traitent d'une façon analogue et on obtient que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$.

- (ii) Soit y une solution de $(N)_{1,\lambda}$, d'après la définition de f_λ et (ii) on a:

$$y''(t) = \lambda f(t, y(t), y'(t)) \text{ p.p. dans } [0, 1],$$

et donc y est une solution du problème $(N)_\lambda$. Soit maintenant $b \in [0, 1]$, tel que la fonction $t \mapsto y'(t)$ atteint son maximum positif en b . Supposons que $y'(b) > M_1$, donc $b \neq 0$ et $b \neq 1$ car $y'(0) = y'(1) = 0$. De plus $|y(b)| < M$, sinon $y(b)$ atteindra son extrémum en b ce qui implique que $y'(b) = 0$. D'après (H_2) et la continuité de la fonction $(t, y(t), y'(t))$, il existe un voisinage $(b - \delta, b + \delta)$ de b dans $(0, 1)$ tel que l'une des alternatives suivantes soit vérifiée:

- (a) $y''(t) > 0$ p.p. dans $(b, b + \delta)$ ce qui implique la contradiction $y'(b + \delta) > y'(b)$;
ou bien
- (b) $y''(t) < 0$ p.p. dans $(b - \delta, b)$ ce qui implique la contradiction $y'(b - \delta) > y'(b)$.

Les autres cas se traitent d'une façon similaire. Si $\lambda = 0$ alors les seules solutions possibles sont les fonctions constantes comprises entre $-M$ et M , et la démonstration du lemme est complète.

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. Considérons $C_b^1 = \{u \in C^1 \mid u'(0) = u'(1) = 0\}$, $C_0 = \{u \in C \mid u(0) = 0\}$, l'opérateur linéaire bijectif continu $L: C_b^1 \rightarrow C_0$ et l'opérateur $N_{f_\lambda}: C_b^1 \rightarrow C_0$ définis par:

$$L[u](t) = u'(t) - u'(0) - \int_0^t (s) ds \text{ et } N_{f_\lambda}[u](t) = \int_0^t f_\lambda(s, u(s), u'(s)) ds,$$

pour tous $u \in C_b^1$, $t \in [0, 1]$ et $\lambda \in [0, 1]$.

N_{f_λ} est l'opérateur de Carathéodory associé à (f, M) ; donc, d'après la proposition 1.2 N_{f_λ} est continu et complètement continu. De plus, le problème $(N)_{1,\lambda}$ est équivalent au problème de point fixe de l'opérateur complètement continu $L^{-1}N_{f_\lambda} : C_b^1 \rightarrow C_b^1$. Posons alors $r = 1 + \max\{M, M_1\}$ où M et M_1 sont les constantes de (H_1) et (H_2) respectivement et $K_1 = \{u \in C_b^1 \mid \|u\|_1 \leq r\}$. Par le choix de r et (ii) du lemme 2.2, la famille d'opérateurs $L^{-1}N_{f_\lambda}$ est sans point fixe sur la frontière de K_1 pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Par conséquent $L^{-1}N_{f_\lambda} : [0, 1] \times K_1 \rightarrow C_b^1$ est une homotopie compacte sans point fixe sur la frontière de K_1 entre $L^{-1}N_{f_1}$ et $L^{-1}N_{f_0}$. De plus, $L^{-1}N_{f_0} : [0, 1] \times K_1 \rightarrow C_b^1$ est une homotopie compacte sans point fixe sur la frontière de K_1 entre $L^{-1}N_{f_0}$ et la fonction constante nulle qui est dans K_1 . Par les théorèmes 1.3 et 1.4, $L^{-1}N_{f_1}$ est essentielle. En particulier $L^{-1}N_{f_1}$ a un point fixe qui est solution du problème (N) et la démonstration du théorème est complète.

COROLLAIRE 2.3. *Supposons que f est une fonction L^p -Carathéodory qui vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2) . Alors le problème de Neumann homogène:*

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & p.p. \text{ dans } [0, 1], \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans $\tilde{C}^{2,p}$ telle que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Dans le cas où $f(t, y, p)$ est une fonction continue, on obtient le résultat suivant:

COROLLAIRE 2.4. *Supposons que f est une fonction continue qui vérifie les hypothèses (H_1) et la condition:*

$$(H_2') \text{ il existe } M_1 > 0 \text{ tel que } f(t, y, p) \neq 0 \text{ pour tout } (t, y) \in (0, 1) \times (-M, M) \text{ et } |p| > M_1.$$

Alors le problème de Neumann homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & 0 \leq t \leq 1; \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que la fonction $f(t, y, p)$ vérifie (H_2) du théorème 3.1. En effet, soient $(t, y) \in (0, 1) \times (-M, M)$ et $|p| > M_1$, d'après (H_2) $f(t, y, p) \neq 0$ et donc on a deux cas possibles $f(t, y, p) > 0$ ou $f(t, y, p) < 0$. Par la continuité de $f(t, y, p)$, il existe un voisinage compact V de (t, y, p) dans $(0, 1) \times (-M, M) \times [-M_1, M_1]^c$ tel que une des conditions suivantes est toujours vérifiée:

$$\inf\{f(u, v, q) \mid (u, v, q) \in V\} > 0 \text{ si } f(t, y, p) > 0$$

ou bien

$$\sup\{f(u, v, q) \mid (u, v, q) \in V\} < 0 \text{ si } f(t, y, p) < 0$$

et la démonstration est complète.

Ce résultat généralise un théorème dû à Granas-Guenther-Lee, voir [7], [8].

COROLLAIRE 2.5. *Supposons que f est une fonction continue qui vérifie les hypothèses (i) il existe $M > 0$ tel que $yf(t, y, 0) > 0$ pour tout $|y| > M$; (ii) il existe $M_1 > 0$ tel que*

$$\inf\{|f(t, y, p)| \mid (t, y) \in [0, 1] \times [-M, M] \text{ et } |p| > M_1\} > 0.$$

Alors le problème de Neumann homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), & 0 \leq t \leq 1; \\ y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Dans cette partie nous discutons certains résultats d'existence de type Nirenberg pour le problème de Neumann où $f(t, y, p) = y\alpha(t, y, p) - \beta(t, y, p)$.

COROLLAIRE 2.6. *Soient $\alpha(t, y, p)$ et $\beta(t, y, p)$ deux fonctions continues qui vérifient les hypothèses:*

- (i) *il existe $M > 0$ tel que $\beta(t, M, 0)/M \leq \alpha(t, M, 0)$ et $\beta(t, -M, 0)/-M \leq \alpha(t, -M, 0)$;*
- (ii) *il existe $M_1 > 0$ tel que l'équation $y\alpha(t, y, p) - \beta(t, y, p) = 0$ n'admet pas de solution dans $(0, 1) \times (-M, M) \times [-M_1, M_1]^c$.*

Alors le problème de Neumann homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = y(t)\alpha(t, y(t), y'(t)) - \beta(t, y(t), y'(t)), & 0 \leq t \leq 1; \\ y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle qu $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$.

COROLLAIRE 2.7. *Soient $\alpha(t, y, p)$ et $\beta(t, y, p)$ deux fonctions continues qui vérifient les hypothèses:*

- (i) *il existe $M > 0$ tel que $\beta(t, y, 0)/y\alpha(t, y, 0) \leq 1$ et $\alpha(t, y, 0) > 0$ si $|y| = M$,*
- (ii) *il existe $M_1 > 0$ telle que $\alpha(t, y, p) \neq 0$ pour tout $(t, y) \in (0, 1) \times (-M, M)$ et $|p| > M_1$,*
- (iii) *$\beta(t, y, p)/\alpha(t, y, p) \rightarrow C$ quand $|p| \rightarrow \infty$ uniformément pour tout (t, y) dans $[0, 1] \times [-M, M]$.*

Si $|C| > M$ alors le problème de Neumann homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = y(t)\alpha(t, y(t), y'(t)) - \beta(t, y(t), y'(t)), & 0 \leq t \leq 1; \\ y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$.

DÉMONSTRATION. Il est facile de voir que la condition (i) implique l'hypothèse (H_1) . Il suffit maintenant de vérifier (H_2) . En effet, supposons que $C > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M < C - \varepsilon$. D'après (iii), il existe M_2 tel que $C - \varepsilon < \beta(t, y, p)/\alpha(t, y, p)$ pour tout $(t, y) \in (0, 1) \times (-M, M)$ et $|p| > M_2$. Donc, $y - \beta(t, y, p)/\alpha(t, y, p) < M - (C - \varepsilon) < 0$ pour tout $(t, y) \in (0, 1) \times (-M, M)$ et $|p| > M_2$. Si on prend $M_3 = \max(M_1, M_2)$, la fonction $f(t, y, p) = y\alpha(t, y, p) - \beta(t, y, p) \neq 0$ pour tout $(t, y) \in (0, 1) \times (-M, M)$ et $|p| > M_3$. Si $C < 0$ la démonstration est similaire, et la démonstration est complète.

Ce résultat généralise le théorème d'existence suivant (voir [7],[8],[11]):

COROLLAIRE 2.8. Soient $\alpha(t, y, p)$ et $\beta(t, y, p)$ deux fonctions continues qui vérifient les hypothèses:

- (i) $\alpha(t, y, p) > 0$;
- (ii) $\beta(t, y, p) \rightarrow \infty$ et $\beta(t, y, p)/\alpha(t, y, p) \rightarrow \infty$ quand $|p| \rightarrow \infty$ uniformément pour tout (t, y) dans $[0, 1] \times \mathbb{R}$;
- (iii) il existe $M > 0$ tel que $\beta(t, y, 0)/\alpha(t, y, 0) < 1$ pour tout $|y| > M$.

Alors le problème de Neumann homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = y(t)\alpha(t, y(t), y'(t)) - \beta(t, y(t), y'(t)), & 0 \leq t \leq 1; \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$.

3. Problème de Neumann non homogène. Dans cette section, nous nous intéressons à l'existence d'une solution au sens de Carathéodory pour le problème de Neumann:

$$(N) \quad y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \text{ p.p. dans } [0, 1]; \quad y'(0) = r, \quad y'(1) = s;$$

où $r^2 + s^2 > 0$.

Pour formuler le résultat suivant, nous utiliserons les notations ci-dessous:

Soient $r, s \in \mathbb{R}$, on définit la fonction quadratique $\rho: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\rho(t) = (1/2)(s - r)t^2 + rt$ et $\|\rho\|_0$ sa norme uniforme.

THÉORÈME 3.1. Supposons que f est une fonction de Carathéodory qui vérifie les hypothèses:

- (H₃) il existe $M > 0$ tel que $f(t, M + \rho(t), \rho'(t)) \geq 0$ et $f(t, -M + \rho(t), \rho'(t)) \leq 0$ p.p. dans $[0, 1]$,
- (H₄) il existe $M_1 > 0$ tel que pour tout $(t, y) \in (0, 1) \times (-M - \|\rho\|_0, M + \|\rho\|_0)$ et $|p| > M_1$, il existe un voisinage $U \times V$ de (t, y, p) tel que une des conditions suivantes est toujours vérifiée:

$$\inf_{u \in U} \text{ess}\{f(u, v, q) / (v, q) \in V\} > s - r$$

ou bien

$$\sup \text{ess}\{f(u, v, q) / (v, q) \in V\} < s - r.$$

Alors le problème de Neumann non homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & \text{p.p. dans } [0, 1], \\ y'(0) = r, y'(1) = s; \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans $\tilde{C}^{2,1}$ telle que $-M + \rho(t) \leq y(t) \leq M + \rho(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ (où M est la constante de (H₁)).

Notons que si $r = s = 0$ on retrouve les hypothèses du théorème 2.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Considérons le problème de Neumann homogène:

$$(1) \quad \begin{cases} u''(t) = f(t, u(t) + \rho(t), u'(t) + \rho'(t)) - (s - r) \\ \quad \equiv F(t, u(t), u'(t)) \\ u'(0) = 0, u'(1) = 0; \end{cases} \quad \text{p.p. dans } [0, 1],$$

il est clair que u est une solution de (1) si et seulement si $y = u + \rho$ est une solution de (N). De plus la fonction F vérifie les hypothèses du théorème 2.1, par conséquent le problème 1 admet une solution u au sens de Carathéodory et la fonction $y = u + \rho$ sera une solution du problème (N).

COROLLAIRE 3.2. *Supposons que f est une fonction de Carathéodory qui vérifie les hypothèses (H_1) et la condition:*

(H'_4) *il existe $M_1 > 0$ tel que l'équation $f(t, y, p) + (r - s) = 0$ n'admet pas de solution dans l'ensemble $(0, 1) \times (-M - \|\rho\|_0, M + \|\rho\|_0)$ et $|p| > M_1$.*

Alors le problème de Neumann non homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), & 0 \leq t \leq 1; \\ y'(0) = r, y'(1) = s, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle que $-M + \rho(t) \leq y(t) \leq M + \rho(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Ce résultat généralise le théorème d'existence suivant (voir [7],[8]):

COROLLAIRE 3.3. *Supposons que f est une fonction continue qui vérifie les hypothèses*

- (i) *Il existe $k > 0$ tel que $f_y(t, y, p) \geq k$ pour tout $(t, y, p) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times [\min(r, s), \max(r, s)]$ où $f_y(t, y, p)$ dénote la dérivée partielle par rapport à y ;*
- (ii) *il existe $M_1 > 0$ tel que pour tout $(t, y) \in (0, 1) \times (-M - \|\rho\|_0, M + \|\rho\|_0)$ et $|p| > M_1$, il existe un voisinage $U \times V$ de (t, y, p) tel que une des conditions suivantes est toujours vérifiée:*

$$\inf\{|f(u, v, q) + (r - s)| \mid (u, v) \in [0, 1] \times [-M - \|\rho\|_0, M + \|\rho\|_0] \text{ et } |p| > M_1\} > 0$$

$$(\text{où } M = (1/k) \max\{|f(u, v, q) + |v| + |(r - s)| / (u, v, q) \in [0, 1] \times [-M - \|\rho\|_0, M + \|\rho\|_0] \times [\min(r, s), \max(r, s)]\}.$$

Alors le problème de Neumann non homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), & 0 \leq t \leq 1; \\ y'(0) = r, y'(1) = s, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle que $-M + \rho(t) \leq y(t) \leq M + \rho(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

4. **Quelques remarques et conséquences.** Supposons que f est une fonction de Carathéodory qui vérifie les hypothèses (H_1) ,

(i) il existe $M_1 > 0$ et une fonction $q: [M_1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ continue telle que:

$$|f(t, y, p)| > q(|p|) \text{ p.p. } t \in (0, 1), \forall y \in (-M, M) \text{ et } |p| > M_1$$

Alors le problème de Neumann homogène:

$$(N) \quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & \text{p.p. dans } [0, 1], \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans $\tilde{C}^{2,1}$ telle que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$.

C'est une conséquence du théorème 2.1.

Il est intéressant de remarquer que dans plusieurs travaux précédents (voir par exemple [4],[5],[6],[7]), l'hypothèse (i) est remplacé par une condition de croissance du type: il existe une fonction $q: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ continue telle que:

$$|f(t, y, p)| \leq q(|p|) \text{ p.p. } t \in (0, 1), \forall y \in [-M, M] \forall p \text{ et } \int_0^\infty [x/q(x)] dx > 2M.$$

EXEMPLES. (1) Considérons le problème:

$$\begin{cases} y''(t) = \sum_{i=0}^n a_i(t, y(t), y'(t))y^i(t) + \sum_{j=0}^m b_j(t, y(t), y'(t))y^j(t) & \text{p.p. dans } [0, 1], \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

Supposons que a_i, b_j sont des fonctions de Carathéodory pour tout $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq m$ telles que:

- (i) il existe $M > 0$ tel que $\inf \text{ess} \{ b_m(t, y, 0) \mid |y| > M \} > 0, \sup \text{ess} \{ b_j(t, y, 0) \mid |y| > M \} < \infty$, pour tout $0 \leq j < m$;
- (ii) il existe $M_1 > 0$ tel que $\inf \text{ess} \{ a_n(t, y, p) \mid y \in [-M, M], |p| > M_1 \} > 0$ et $\sup \text{ess} \{ |a_i(t, y, p)| \mid y \in [-M, M], |p| > M_1 \} < \infty$, pour tout $0 \leq i < n$. Alors le problème (1) admet au moins une solution au sens de Carathéodory si m est impair.

(2) Si $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue à support borné alors le problème:

$$\begin{cases} y''(t) = h(p)y^m(t) + y^{2n+1}(t) + e^{-|y'(t)|y(t)} + t^5 & 0 \leq t \leq 1; \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$. Notons que le corollaire 2.5 ne s'applique pas.

(3) Si $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable telle que $\inf \text{ess} \{ h(t) \} > 0$ alors le problème:

$$\begin{cases} y''(t) = h(t)y^m(t) + y^{2n+1}(t) + e^{-y'(t)} + t & \text{p.p. dans } [0, 1]; \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution au sens de Carathéodry y telle que $-M \leq y(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Par exemple le problème:

$$\begin{cases} y''(t) = (1/t^\alpha)y^m(t) + y^{2n+1}(t) + e^{-y(t)y^2} + t & \text{p.p. dans } [0, 1]; \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0, \end{cases}$$

admet au moins une solution y au sens de Carathéodory, pour tout $0 < \alpha < 1$. Soit $f(t, y, p)$ une fonction continue qui vérifie (H_1) et l'ensemble $\{p(t, y) \mid f(t, y, p) = 0 \text{ pour tout } (t, y) \in (0, 1) \times (-M, M)\}$ est borné.

Alors le problème de Neumann homogène:

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & \text{p.p. dans } [0, 1], \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0; \end{cases}$$

admet au moins une solution y dans C^2 .

(4) Exemple: Considérons le problème de Neumann homogène:

$$\begin{cases} y''(t) = a(t, y(t))y^2(t) + b(t, y(t))y'(t) + c(t, y(t)), & 0 \leq t \leq 1; \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0. \end{cases}$$

Si $a(t, y)$, $b(t, y)$ et $c(t, y)$ sont des fonctions continues qui vérifient:

- (i) Il existe $M > 0$ tel que $c(t, M) \geq 0$ et $c(t, -M) \leq 0$;
- (ii) l'ensemble $\{(-b(t, y)(+ \text{ou } -)\sqrt{b^2(t, y) - 4a(t, y)c(t, y)})/a(t, y); (t, y) \in (0, 1) \times (-M, M)\}$ est borné.

Alors le problème (4) admet au moins une solution dans C^2 .

Notons que dans le cas où $a(t, y) \neq 0$ sur $[0, 1] \times [-M, M]$ la condition (ii) est toujours vérifiée.

(5) Soit $h(t) \in L^\infty(0, 1)$, le problème de Neumann non homogène:

$$\begin{cases} y''(t) = \cos(t)y^6(t) + 2e^t y(t)y'(t) + y(t) + h(t) & \text{p.p. dans } [0, 1], \\ y'(0) = r, y'(1) = s, \end{cases}$$

admet au moins une solution y au sens de Carathéodory pour tous r, s ; d'après le théorème 3.1.

Le problème de Neumann homogène suivant:

$$\begin{cases} y''(t) = y^4 + 1 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

n'admet pas de solution même si $f(t, y, p)$ vérifie l'hypothèse (H_2) , mais elle ne vérifie pas l'hypothèse (H_1) du théorème 2.1.

Notons que dans le théorème 3.1, on ne peut pas relaxer l'hypothèse (H_3) en la remplaçant par l'hypothèse (H_2) du théorème 2.1. Par exemple le problème non homogène:

$$\begin{cases} y''(t) = y^2(t) & \text{dans } [0, 1], \\ y'(0) = 3, y'(1) = 2, \end{cases}$$

n'admet pas de solution même si $f(t, y, p)$ vérifie les hypothèses du théorème 2.1. L'hypothèse (H_3) n'est pas vérifiée.

RÉFÉRENCES

1. S. Bernstein, *Sur les équations du calcul des variations*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **29**(1912), 431–485.
2. J. Dugundji, A. Granas, *Fixed point theory, vol. 1*, P.W.N. Warszawa, 1982.
3. A. Granas, *Sur la méthode de continuité de Poincaré*, C. R. Acad. Sci. Paris **282**(1976), 983–985.
4. A. Granas, Z. E. A. Guennoun, *Quelques résultats dans la théorie de Berstein-Carathéodory de l'équation $y'' = f(t, y, y')$* , C. R. Acad. Sci. Paris **306** série I(1988), 703–706.
5. A. Granas, R. B. Guenther, J. W. Lee, *On a theorem of S. Berstein*, Pacific J. Math. **74**(1978), 67–82.
6. ———, *Nonlinear boundary value problems for some classes of ordinary differential equations*, Rocky Mountain J. Math. **10**(1980), 35–58.
7. ———, *Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations*. Dissertations Mathematics, CCSLIV, Warszawa, 1985.
8. ———, *Topological transversality II: Application to the Neumann problem for $y'' = f(t, y, y')$* , Pacific J. Math. **104**(1983), 95–109.
9. Z. E. A. Guennoun, *Existence de solutions au sens de Carathéodory pour des problèmes aux limites non linéaires*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, 1989.
10. J. Mawhin, *Points fixes, points critiques et problèmes aux limites*. Les Presses de l'Université de Montréal **92**, 1985.
11. L. Nirenberg, *Functional analysis*. New York University Lecture Note Series, 1960.

Département de mathématiques, physique et informatique
Université de Moncton
Moncton, N.-B. E1A 3E9