*Compositio Mathematica* **135:** 37–47, 2003. 


# Un revêtement de l'arbre de $\mathrm{GL}_2$ d'un corps local

## (*A Covering of the* $\mathrm{GL}_2$ *Tree of a Local Field*)

PAUL BROUSSOUS
*UFR Sciences et UMR 6086 du CNRS, Téléport 2, BP 30179, Bd M. et P. Curie, 86962. Futuroscope, Chasseneuil, France. e-mail: broussous@wallis.sp2mi.univ-poitiers.fr*

(Received: 29 June 2000; accepted in final form: 14 November 2001)

**Abstract.** Let $F$ be a non-archimedean local field with residue class field $\mathbf{k}$. Put $G = \mathrm{GL}_2(F)$, $\Gamma = \mathrm{PGL}_2(\mathbf{k})$ and let $X$ denote the Bruhat–Tits tree of $G$. We construct a one-dimensional simplicial complex $\tilde{X}$, equipped with an action of $G \times \Gamma$ and with a $G \times \Gamma$-equivariant simplicial projection $\pi$: $\tilde{X} \longrightarrow X$ (for the trivial action of $\Gamma$ on $X$). We prove that the cohomology with compact support $H_c^1(\tilde{X}, \mathbb{C})$ contains nontrivial representations of $G$ (in particular positive level supercuspidal representations).

**Mathematics Subject Classifications (2000).** 05C05, 05C25, 22E50, 55R91, 57M07.

**Key words.** affine buildings, complex representations of p-adic groups, equivariant fibre spaces, tree.

## 1. Introduction

Soient $F$ un corps localement compact, non archimédien, non-discret, et $G$ le groupe des $F$-points d'un $F$-groupe semi-simple. L'immeuble affine $X$ de $G$ est un $G$-espace propre universel [1]. En particulier, si $\tilde{X}$ est un $G$-espace propre, il existe une application continue $G$-équivariante $\varphi$: $\tilde{X} \longrightarrow X$, unique à homotopie $G$-équivariante près. Borel et Serre ([3, 2]) ont déterminé la cohomologie à support compact de l'immeuble $X$; celle-ci réalise géométriquement la représentation de Steinberg.

Dans [6], Schneider et Stuhler définissent la catégorie $\mathrm{Coeff}_G X$ des systèmes de coefficients $G$-équivariants sur $X$. Ils montrent que la catégorie $\mathcal{M}(G)$ des représentations complexes lisses de $G$ est un quotient de $\mathrm{Coeff}_G X$. Voir une représentation comme un élément de $\mathrm{Coeff}_G X$ revient en quelque sorte à coder l'information qu'elle contient dans certaines représentations des sous-groupes parahoriques de $G$.

À l'inverse, on peut se demander s'il existe des $G$-espaces naturels $\tilde{X} \longrightarrow X$, comme ci-dessus, dont la cohomologie fournit des représentations intéressantes de $G$; l'information est alors codée dans la géométrie de $\tilde{X}$. La construction que nous proposons dans cet article apporte un très modeste élément de réponse à cette question.

Notons $\mathbf{k}$ le corps résiduel (fini) de $F$, $G = \mathrm{GL}(2, F)$ et $\Gamma = \mathrm{PGL}(2, \mathbf{k})$. Le groupe $G$ agit sur son immeuble de Bruhat–Tits $X$; c'est un complexe simplicial simplement connexe de dimension 1, c'est à dire un arbre.

Dans ce travail nous construisons un complexe simplicial $\tilde{X}$, connexe, de dimension 1, muni d'une application surjective $p$: $\tilde{X} \longrightarrow X$. L'espace $\tilde{X}$ est muni d'actions simpliciales commutantes de $G$ et $\Gamma$. L'application $p$ est simpliciale, $G$-équivariante et chambrée (préserve la dimension des simplexes). Le groupe fini $\Gamma$ stabilise les fibres des sommets et celles-ci sont des espaces principaux homogènes. Il agit librement sur $\tilde{X}$ de sorte que l'on a un revêtement non ramifié galoisien de groupe $\Gamma$, $\tilde{X}/X_o$, où $X_o$ est l'espace quotient $\tilde{X}/\Gamma$. L'espace $X_o$ est un graphe sans boucle. Comme ensemble, $X_o$ se déduit de $X$ en gardant les mêmes sommets mais en démultipliant les arêtes.

L'espace $\tilde{X}$ n'est pas simplement connexe et sa cohomologie à support compact $H^1_c(\tilde{X}, \mathbb{C})$ est plus riche que celle de $X$. Elle se décompose en composantes isotypiques sous l'action de $\Gamma$: $H^1_c(\tilde{X}, \mathbb{C}) = \bigoplus_\tau V_\tau \otimes \tau$, oú $\tau$ décrit les représentations irréductibles de $\Gamma$. Dans ce travail, nous étudions $V_\tau$ lorsque $\tau$ est la représentation triviale $\mathbf{1}_\Gamma$. Nous décrivons la représentation de $G$ dans $V_{\mathbf{1}_\Gamma}$. Elle contient un nombre fini de représentations cuspidales de niveau normalisé 1, apparaissant chacune avec multiplicité 1 (mais contient aussi des repésentations non-cuspidales). Les représentation irréductibles de $G$ apparaissant comme sous-quotients de $V_{\mathbf{1}_\Gamma}$ ne sont pas à ma connaissance caractérisées par une propriété remarquable.

## 2. Rappels et notations sur l'arbre de $G$

Notons $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de $F$, $\mathfrak{p}$ son idéal maximal et $\pi_F$ le choix d'une uniformisante de $\mathfrak{p}_F$. Le groupe $G$ agit sur le $F$-espace $V = F^2$ ainsi que sur ses $\mathfrak{o}$-réseaux. Si $M$ est un $\mathfrak{o}$-réseau de $V$, on note $[M]$ sa classe d'homothétie. Il s'agit de l'ensemble des réseaux $\lambda M$, où $\lambda$ parcourt $F^\times$.

En tant que complexe simplicial, l'arbre $X$ est obtenu de la façon suivante. Les sommets de $X$ (simplexes de dimension 0) sont les classes d'homothétie d'$\mathfrak{o}$-réseaux dans $V$. On dit que deux sommets $x = [M]$ et $y = [N]$ sont reliés par une arête si on peut choisir les représentants $M$ et $N$ de sorte que $\mathfrak{p}M \subset N \subset M$.

On démontre [7] que $X$ est un arbre sans sommets limites, c'est à dire sans sommets ayant exactement un voisin. On a aussi le résultat suivant (valable dans un cadre beaucoup plus général):

THÉORÈME (Borel et Serre [3, 2]). *Les espaces de cohomologie à support compact* $H^i_c(X, \mathbb{C})$ *sont triviaux pour* $i \neq 1$. *De plus comme* $G$*-ensemble* $H^1_c(X, \mathbb{C})$ *est isomorphe à la représentations de Steinberg de* $G$.

Rappelons que la représentations de Steinberg de $G$ peut être définie de la façon suivante. La représentation $\mathcal{V}$ de $G$ dans l'espace des fonctions localement constantes sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1(F)$ est lisse. Elle possède un unique sous-$G$-module propre $\mathcal{V}_o$ formé des fonctions constantes. Le quotient $\mathcal{V}/\mathcal{V}_o$ est irréductible; c'est la représentation cherchée.

Chaque réseaux $M$ de $V$ fournit un $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\bar{M} = M/\mathfrak{p}M$ ainsi qu'une droite projective $\mathbb{P}(\bar{M})$ sur $\mathbf{k}$. Si $x$ est un sommet de $X$, les droites $\mathbb{P}(\bar{M})$, $M \in x$ sont canoniquement **k**-isomorphes. En effet si $M_1$ et $M_2$ sont homothétiques, un scalaire $\lambda$ tel que $\lambda M_1 = M_2$ est défini à un élément de $\mathfrak{o}^\times$ près. De tels scalaires définissent des isomorphismes de $k$-espaces $\bar{M}_1 \longrightarrow \bar{M}_2$ qui sont égaux à des homothéties près. D'où un isomorphisme bien défini: $\mathbb{P}(\bar{M}_1) \longrightarrow \mathbb{P}(\bar{M}_2)$. Pour un sommet $x$ de $X$, nous noterons $\mathbb{P}_x$ la collection des droites projectives $\mathbb{P}(\bar{M})$, $M \in x$, munies de leurs identifications canoniques.

Soient $x = [M]$ et $y = [N]$ deux points de $X$ reliés par une arête $a$. On suppose que les représentants sont choisis de sorte que $\mathfrak{p}N \subset M \subset N$. On a donc une application $k$-linéaire $\bar{M} \longrightarrow \bar{N}$; son image est une droite, c'est à dire une point rationnel $a_y^N$de $\mathbb{P}(\bar{N})$. De même l'arête $a$ définit canoniquement un point $a_x^M$ de $\mathbb{P}(\bar{M})$. Le système de points $\{a_x^M; M \in x\}$ est compatible avec les identifications canoniques des droites projectives de $\mathbb{P}_x$. Pour simplifier nous dirons que l'arête $a$ définit un 'point' $a_x$ de $\mathbb{P}_x$ (et définit de façon similaire un 'point' $a_y$ de $\mathbb{P}_y$).

Rappelons que les sommets voisins de $x$ sont ainsi en bijection avec les points de $\mathbb{P}_x$, de sorte qu'il y en a $\mathrm{Card}(\mathbb{P}^1(k)) = q + 1$, où $q$ est le cardinal du corps résiduel.

Enfin rappelons que $G$ agit de façon naturelle à gauche sur $X$ (cette action est simpliciale). Notons $\mathfrak{K}_x$ le stabilisateur d'un sommet $x$ et $K_x$ son compact maximal. On a $\mathfrak{K}_x = F^\times K_x$. On note $\mathfrak{K}_x^1$ le stabilisateur point par point des sommets voisins de $x$ et $K_x^1$ son compact maximal. On peut trouver une base de $V$ dans laquelle les éléments de $K_x$ sont ceux dont les matrices sont à coefficients dans $\mathfrak{o}$ et à déterminant dans $\mathfrak{o}^\times$. Les éléments de $K_x^1$ sont alors ceux dont les matrices sont dans $M(2, \mathfrak{o})$ et congrues à $I_2$ modulo $\mathfrak{p}$.

## 3. Construction du revêtement $\tilde{X}$

On définit un complexe simplicial de dimension 1, $\tilde{X}$, de la façon suivante. Les sommets de $\tilde{X}$ sont les couples $(x, \varphi)$, où $x$ est un point de $X$ et $\varphi$ un **k**-isomophisme $\mathbb{P}_x \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$. Nous entendons par là un système compatible d'isomorphismes de $k$-variétés: $\varphi_M$: $\mathbb{P}(M) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$, $M \in x$ (i.e. des isomorphismes induits par des applications $k$-linéaires $\bar{M} \longrightarrow k^2$). Notons qu'il suffit de se donner un $\varphi_M$ pour déterminer tous les autres. On dit que deux sommets $(x, \varphi)$ et $(y, \psi)$ sont reliés par une arête si l'on est dans la situation suivante:

(i) $x$ et $y$ sont reliés par une arête $a$ dans $X$;
(ii) avec les notations de la section précédente, on a $\varphi(a_x) = \psi(a_y)$.

On définit une application surjective $p$: $\tilde{X} \longrightarrow X$ par $p(x, \varphi) = x$. Par construction, il est clair que l'application $p$ est simpliciale.

LEMME 1. *Le complexe $\tilde{X}$ est connexe.*

*Démonstration.* L'arbre $X$ étant lui-même connexe, il suffit de montrer que si deux points $(x, \varphi)$ et $(y, \psi)$ sont tels que $x$ et $y$ sont voisins dans $X$, alors ils sont reliés par une chemin.

https://doi.org/10.1023/A:1021754801802 Published online by Cambridge University Press

Si $\varphi(a_x) = \psi(a_y)$, les deux points sont reliés par une arête et il n'y a rien à démontrer; supposons donc le contraire. Choisissons une arête $b$ issue de $y$ telle que $\psi(b_y) \notin \{\varphi(a_x), \psi(a_y)\}$; puisque les droites projectives que nous considérons ont au moins trois points, c'est toujours possible. Notons $b = [y, z]$. Choisissons un isomorphisme $\psi'\colon \mathbb{P}_y \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ tel que $\psi'(a_y) = \varphi(a_x)$ et $\psi'(b_y) = \psi(b_y)$. Enfin choisissons un isomorphisme $\theta\colon \mathbb{P}_z \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ tel que $\theta(b_z) = \psi(b_y)$ $(= \psi'(b_y))$. Alors par construction $(x, \varphi)$ est relié à $(y, \psi')$, qui est relié à $(z, \theta)$, lui-même relié à $(y, \psi)$. D'où le résultat. $\square$

Les propriétés suivantes permettent de se faire une première idée de $\tilde{X}$.

LEMME 2. (a) *Soit $x$ un sommet de $X$ et $y$ un de ses voisins. Soit $(x, \varphi)$ un point de $\tilde{X}$ au dessus de $x$. Alors $(x, \varphi)$ possède $(q-1)q$ voisins au dessus de $y$.*

(b) *Les sommets de $\tilde{X}$ ont tous pour valence $(q^2 - 1)q$.*

*Démonstration*. Posons $u = \varphi(a_x)$, où $a = [x, y]$. Soit $(y, \psi)$ un point au dessus de $y$ et relié à $(x, \psi)$. Alors les points au dessus de $y$ reliés à $(x, \varphi)$ sont les $(y, \theta \circ \psi)$, où $\theta$ décrit le sous groupe de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{k}}(\mathbb{P}^1(\mathbf{k}))$ qui fixe $u$. Un tel sous-groupe (un sous-groupe de Borel) a pour cardinal $(q-1)q$. D'où la partie a) du lemme.

La partie (b) découle de (a) en se souvenant que $x$ a $q+1$ voisins dans $X$. $\square$

## 4. Action des groupes $G$ et $\Gamma$

Soient $g$ dans $G$ et $x = [M]$ un point de $X$. Alors $g$ induit un $\mathbf{k}$-isomorphisme $\mathbf{g}_x$: $\bar{M} \longrightarrow \overline{gM}$. D'où un $\mathbf{k}$-isomorphisme de variétés $\mathbb{P}_x \longrightarrow \mathbb{P}_{gx}$ que l'on continue de noter $\mathbf{g}_x$.

On définit une action à gauche de $G$ sur les sommets de $\tilde{X}$ par

$$g \cdot (x, \varphi) = (g \cdot x, \varphi \circ \mathbf{g}_x^{-1}), \qquad g \in G, \quad (x, \varphi) \in \tilde{X}.$$

Notons que deux sommets sont reliés par au plus une arête. Donc pour démontrer que l'action de $G$ se prolonge à $\tilde{X}$ tout entier, il s'agit de vérifier le:

LEMME 3. *L'action de $G$ est simpliciale: pour $g$ dans $G$, deux points de $\tilde{X}$ sont reliés si, et seulement si, leurs images par $g$ le sont.*

*Démonstration*. Soient $(x, \psi)$ et $(y, \psi)$ deux points de $\tilde{X}$ reliés par une arête. Posons $a = [x, y]$. Alors par hypothèse, on a $\varphi(a_x) = \psi(a_y)$. Tout d'abord $gx$ et $gy$ sont reliés car l'action de $G$ sur $X$ est simpliciale. En posant $b = [gx, gy]$, on vérifie sans peine que $b_{gx} = \mathbf{g}_x \cdot a_x$ et $b_{gy} = \mathbf{g}_y \cdot a_y$. Donc

$$\varphi \circ \mathbf{g}_x^{-1}(b_{gx}) = \varphi(a_x) = \psi(a_y) = \psi \circ \mathbf{g}_y^{-1}(b_{gy}),$$

ce qui signifie que $g \cdot (x, \varphi)$ et $g \cdot (x, \psi)$ sont reliés; ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Il est de plus évident que la projection $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ est $G$-équivariante.

https://doi.org/10.1023/A:1021754801802 Published online by Cambridge University Press

LEMME 4. *L'action de $G$ sur les sommets de $\tilde{X}$ est transitive.*

*Démonstration*. Puisque $G$ agit transitivement sur $X$, il suffit de montrer que deux points $(x, \varphi)$ et $(x, \psi)$ au dessus d'un même point $x$ de $X$ sont conjugués sous $G$. L'application naturelle:

$$K_x \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}}(\mathbb{P}_x), \quad g \mapsto \mathbf{g}_x$$

est surjective. Notre résultat en découle. □

Puisque $\Gamma = \mathrm{PGL}(2, \mathbf{k})$ agit naturellement sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$, on peut définir une action de $\Gamma$ sur $\tilde{X}$ de la façon suivante:

$$\gamma \cdot (x, \varphi) = (x, \gamma \circ \varphi), \qquad (x, \varphi) \in \tilde{X}, \quad \gamma \in \Gamma.$$

LEMME 5. (a) *Les actions de $G$ et $\Gamma$ commutent.*

(b) *L'action de $\Gamma$ est simpliciale.*

(c) *Le groupe $\Gamma$ stabilise les fibres des sommets de $X$ et, pour tout $x$ dans $X$, $p^{-1}(x)$ est un espace principal homogène sous $\Gamma$.*

*Démonstration*. Les points (a) et (c) sont immédiats. Pour vérifier (b), donnons-nous deux points reliés $(x, \varphi)$ et $(y, \psi)$ de $\tilde{X}$ et un élément $\gamma$ de $\Gamma$. Posons $a = [x, y]$. Il s'agit de montrer que $(x, \gamma \circ \varphi)$ et $(y, \gamma \circ \psi)$ sont reliés, c'est à dire que $\gamma(\varphi(a_x)) = \gamma(\psi(a_y))$. Mais ceci est clair puisque $\varphi(a_x) = \psi(a_y)$. Le résultat suivant est immédiat et sa démonstration est laissée au lecteur.

LEMME 6. *Le groupe $\Gamma$ agit librement sur $\tilde{X}$. Il n'inverse pas d'arête.*

Il s'ensuit que le quotient $X_o = \tilde{X}/\Gamma$ est naturellement muni d'une structure de graphe sans boucle.* Puisque les actions de $G$ et $\Gamma$ commutent, $X_o$ est muni d'une action naturelle de $G$, action préservant la structure de graphe. Par construction la projection naturelle $\pi: \tilde{X} \longrightarrow X_o$ est un revêtement topologique de groupe $\Gamma$; elle est $G$-équivariante.

L'application $p$: $\tilde{X} \longrightarrow X$ se factorise sous la forme $p_o \circ \pi$, où $p_o$: $X_o \longrightarrow X$ est $G$-équivariante. Les orbites de $\Gamma$ dans l'espace des sommets de $\tilde{X}$ sont exactement les fibres de $p$ au dessus des sommets de $X$; nous allons donc identifier les sommets de $X_o$ avec ceux de $X$ (et ceci de façon compatible avec l'action de $G$). L'application $p_o$ est alors donnée comme suit: elle envoie un sommet de $X_o$ sur ce même sommet considéré comme élément de $X$; si $[x, y]$ est une arête de $X$, $p_o$ envoie toutes les arêtes dans $X_o$ d'origine $x$ et d'extrémité $y$ sur $[x, y]$.

*Plus précisément, nous devrions dire qu'en tant qu'espace topologique, $X_o$ est un CW-complexe, réalisation géométrique naturelle d'un graphe sans boucle. Nous continuerons à faire ce genre d'abus de langage.

https://doi.org/10.1023/A:1021754801802 Published online by Cambridge University Press

## 5. L'action de $G$ sur le quotient $X_o = \tilde{X}/\Gamma$

Soient $x$ et $y$ deux sommets de $X_o$ (donc de $X$) supposés reliés par une arête. Notons $a$ l'arête qui relie $x$ à $y$ dans $X$ et $a_x$, $a_y$ les points de $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{P}_y$ définis par $a$. Les arêtes reliant $x$ à $y$ dans $X_o$ sont en bijection avec les orbites $\{[(x, \gamma \circ \varphi); (y, \gamma \circ \psi)], \gamma \in \Gamma\}$, où $\varphi$ et $\psi$ vérifient $\varphi(a_x) = \psi(a_y)$. Deux arêtes $[(x, \varphi_1); (y, \psi_1)]$ et $[(x, \varphi_2); (y, \psi_2)]$ sont dans la même orbite si l'on a $\varphi_2\varphi_1^{-1} = \psi_2\psi_1^{-1}$, soit encore $\psi_2^{-1}\varphi_2 = \psi_1^{-1}\varphi_1$. Cette dernière application $\lambda$ est un isomorphisme de variétés: $\mathbb{P}_x \longrightarrow \mathbb{P}_y$ qui envoie $a_x$ sur $a_y$. Réciproquement un tel $\lambda$ définit une orbite d'arêtes au dessus de $a$. Pour résumer:

LEMME 7. *Avec les notations précédentes, les arêtes reliant $x$ à $y$ dans $X_o$ sont en bijection avec les $\mathbf{k}$-isomorphismes de variétés $\lambda$: $\mathbb{P}_x \longrightarrow \mathbb{P}_y$ qui vérifient $\lambda(a_x) = a_y$.*

Fixons toujours une arête $a = [x, y]$ dans $X$. Nous allons décrire explicitement l'action du sous-groupe d'Iwahori $I = I_a$, qui fixe $a$ point par point, sur l'ensemble des arêtes qui relient $x$ à $y$ dans $X_o$; nous noterons cet ensemble $A_o(x, y)$ dans la suite.

Tout d'abord, si $g \in I$ et si $[(x, \varphi); (y, \psi)]$ est une arête au dessus de $a$, on a:

$$g \cdot [(x, \varphi); (y, \psi)] = [(x, \varphi \circ \mathbf{g}_x^{-1}); \ (y, \psi \circ \mathbf{g}_y^{-1})].$$

Ceci se récrit:

$$g \cdot [\psi^{-1}\varphi] = \mathbf{g}_y(\psi^{-1}\varphi)\mathbf{g}_x^{-1}. \tag{1}$$

Fixons une base $(e_1, e_2)$ de $V$ sur $F$ telle que $x$ (resp. $y$) soit la classe du réseau $M_x = \mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{o}e_2$ (resp. $M_y = \mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{p}e_2$). Le normalisateur $\mathfrak{N}(I)$ de $I$ (et de $a$) dans $G$ est le produit semidirect $\langle\sigma\rangle I$, où $\langle\sigma\rangle$ est le groupe engendré par $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_F & 0 \end{pmatrix}$. Puisque $\sigma(x) = y$, $\sigma$ induit un isomorphisme $\mathbb{P}_x \longrightarrow \mathbb{P}_y$ et peut donc être vu comme un élément de $A_o(x, y)$. Les points $a_x$ et $a_y$ correspondent à des sous-groupes de Borel $B_x \subset \mathrm{PGL}(\bar{M}_x)$ et $B_y \subset \mathrm{PGL}(\bar{M}_y)$ respectivement.

Les applications $g \mapsto \mathbf{g}_x$ et $g \mapsto \mathbf{g}_y$ induisent des morphismes de groupes surjectifs $I \longrightarrow B_x$ et $I \longrightarrow B_y$. On a de plus une action naturelle de $B_x \times B_y$ sur $A_o(x, y)$ qui fait de cet ensemble un espace principal homogène pour chacun des facteurs. En faisant l'identification non canonique: $B_y \simeq A_o(x, y)$, $h \mapsto h \circ \sigma$ l'action de $I$ sur $A_o(x, y)$, donnée par (1), devient l'action tordue sur $B_y$ donnée par $g(h) = \mathbf{g}_y h(\sigma\mathbf{g}\sigma^{-1})_y^{-1}$.

Notons $\bar{x}$ la réduction modulo $\mathfrak{p}$ d'un $x$ dans $\mathfrak{o}$. Avec les identifications précédentes, si $g \in I$ et $h \in A_o(x, y)$ sont donnés par:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \pi c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} \operatorname{mod} \mathbf{k}^\times,$$

alors $g \cdot h$ est donné par

$$g \cdot h = \begin{pmatrix} \bar{a}^2 u & \bar{a}\bar{d}v + \bar{b}\bar{d}w - \bar{a}\bar{c}u \\ 0 & \bar{d}^2 v \end{pmatrix} \operatorname{mod} \mathbf{k}^\times.$$

Soit $I''$ le sous-groupe normal de $I$ qui dans la base $(e_1, e_2)$ est donné par

$$I'' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \pi_F c & d \end{pmatrix};\quad b, c \equiv 0 \bmod \mathfrak{p},\quad a \equiv d \bmod \mathfrak{p} \right\}$$

Il agit trivialement sur $A_o(x, y)$ et l'action de $I$ sur cet ensemble se factorise à travers le groupe fini $I/I''$. Posons:

$$I' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \pi_F c & d \end{pmatrix};\quad a \equiv d \bmod \mathfrak{p} \right\}$$

On voit facilement que $I/I''$ est le produit semi-direct de $I'/I'' \simeq \mathbf{k}^2$ par $I/I' \simeq \mathbf{k}^\times$, où l'action de $\mathbf{k}^\times$ sur $\mathbf{k}^2$ est donnée par $u \cdot (s, t) = (us, u^{-1}t)$, $u \in \mathbf{k}^\times$, $(s, t) \in \mathbf{k}^2$.

Nous aurons besoin de la liste des représentations irréductibles de $I/I''$. Il a tout d'abord les caractères: ce sont les représentations irréductibles triviales sur $I'$. Elles sont en bijection avec les caractères de $\mathbf{k}^\times$.

Pour la suite de l'article, nous fixons un caractère additif non trivial $\psi_o$ de $\mathbf{k}$. Le groupe additif $\mathbf{k}^2$ s'identifie à son dual via

$$(s, t) \mapsto \psi_{(s,t)}, \qquad \psi_{(s,t)}(u, v) = \psi_o(su + tv).$$

L'action de $\mathbf{k}^\times$ sur $\mathbf{k}^2$ partitionne l'ensemble de ses caractères non-triviaux en $q + 1$ orbites. Chaque caractère non trivial $\psi_{(s,t)}$ de $\mathbf{k}^2$ s'induit irréductiblement en une représentation $H_{(s,t)}$ de $I/I''$. Nous obtenons ainsi $q + 1$ représentations deux à deux non isomorphes, qui, avec les caractères, donnent une liste complète de représentants des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de $I$ triviales sur $I''$.

## 6. Détermination de la partie locale de $H_c^1(\tilde{X}, \mathbb{C})_{\mathbf{1}_\Gamma}$

Soit $H_c^1(\tilde{X}, \mathbb{C})_{\mathbf{1}_\Gamma}$ la composante isotypique de l'espace de cohomologie à support compact $H_c^1(\tilde{X}, \mathbb{C})$ pour la représentation triviale $\mathbf{1}_\Gamma$ de $\Gamma$. Puisque $\mathbb{C}$ est de caractéristique 0, on a des isomorphismes de $G$-modules:

$$H_c^1(\tilde{X}, \mathbb{C})_{\mathbf{1}_\Gamma} \simeq H_c^1(\tilde{X}/\Gamma, \mathbb{C}) \simeq H_c^1(X_o, \mathbb{C}).$$

Fixons une arête $a = [x, y]$ de $X$ comme dans la Section 5 (on en garde les notations), et soit $X_o^a$ le sous-graphe fini de $X_o$, image réciproque de $a$ par $p_o$. Le but de cette section est de déterminer la structure de $H_c^1(X_o^a, \mathbb{C}) = H^1(X_o, \mathbb{C})$ comme $\mathfrak{R}(I)$-module.

Ce module se calcule via la cohomologie du complexe de cochaînes simpliciales orientées à coefficients dans $\mathbb{C}$: $C^0 \xrightarrow{d} C^1 \longrightarrow 0$. Il est clair que $H^1(X_o^a, \mathbb{C}) = C^1/dC^0$ s'identifie comme $I$-module à l'espace des fonctions sur $A_o(x, y)$ modulo les fonctions constantes. L'action de $I$ sur cette espace est l'action évidente. Par contre l'action de $\sigma$ sur une fonction $f$: $A_o(x, y) \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par

$$(\sigma \cdot f)([x, y]) = -f([\sigma(y), \sigma(x)]).$$

Avec les notations de la Section 5, on peut paramétrer les arêtes de $A_o(x, y)$ (vues come éléments de $B_y$) en fixant des représentants dans $GL_2(\mathbf{k})$ de leurs matrices dans $PGL_2(\mathbf{k})$. On choisit les

$$a_{u,v} = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u \in \mathbf{k}^\times, \quad v \in \mathbf{k}.$$

Pour $(u, v) \in \mathbf{k}^\times \times \mathbf{k}$, soit $f_{u,v}$ la fonction de $A_o(x, y)$ dans $\mathbb{C}$ qui vaut 1 sur $a_{u,v}$ et 0 sur $a_{u',v'}$, $(u', v') \neq (u, v)$. Soit $f_1 = \sum_{(u,v)\in\mathbf{k}^\times\times\mathbf{k}} f_{u,v}$.

Pour chaque $u$ dans $\mathbf{k}^\times$, considérons l'élément de $H^1(X_o^a, \mathbb{C})$ donné par $e_u = \sum_{v\in\mathbf{k}} \psi_o(v) a_{u,v} \bmod \mathbb{C}f_1$. Un calcul direct montre le:

LEMME 8. *Soit* $u \in \mathbf{k}^\times$. *Le sous-I-module* $H_u$ *de* $H^1(X_o^a, \mathbb{C})$ *engendré par* $e_u$ *est irréductible. Il est isomorphe à la représentation* $H_{1,-u}$ *de la Section* 5. *En particulier les* $H_u$, $u \in \mathbf{k}^\times$ *sont deux à deux disjointes car deux à deux non isomorphes.*

Pour chaque caractère non trivial $\tau$ de $\mathbf{k}^\times$, considérons l'élément de $H^1(X_o^a, \mathbb{C})$ donné par

$$f_\tau = \sum_{(u,v)\in\mathbf{k}\times\mathbf{k}^\times} \tau(u) a_{u,v} \bmod \mathbb{C}f_1.$$

LEMME 9. *Le groupe I stabilise la droite* $F_\tau = \mathbb{C}f_\tau$ *et y agit via le caractère* $\tau^{-2}$. *La décomposition de* $H^1(X_o^a, \mathbb{C})$ *en I-modules irréductibles est:*

$$\bigoplus_{u\in\mathbf{k}^\times} H_u \oplus \bigoplus_{\tau\in\hat{\mathbf{k}}^\times\backslash\{1\}} F_\tau.$$

*Démonstration*. Le premier point découle d'un calcul direct et le second par un argument de dimension. □

La classification des représentations de $I/I'$ et un calcul simple montrent que $\sigma$ stabilise les représentations $H_u$ et échange $F_\chi$ et $F_{\chi^{-1}}$ pour $\chi \in \mathbf{k}^\times\backslash\{1\}$. On en déduit:

LEMME 10. *Les composantes irreductibles de* $H^1(X_o^a, \mathbb{C})$ *sous l'action de* $\mathfrak{R}(I)$ *sont les* $H_u$, $u \in \mathbf{k}^\times$, *les* $F_\chi \oplus F_{\chi^{-1}}$, *où* $\chi \in \mathbf{k}^\times\backslash\{1\}$ *et* $\chi^2 \neq 1$ $\chi^2 \neq 1$, *et, dans le cas où* 2 *divise le cardinal de* $\mathbf{k}^\times$, *la droite* $F_{\chi_o}$, *où* $\chi_0$ *est l'unique caractère d'ordre* 2 *de* $\mathbf{k}^\times\backslash\{1\}$.

## 7. Cohomologie de $X_o$

On peut identifier canoniquement les espaces de 0-cochaînes simpliciales orientées à support compact $C_c^0(X, \mathbb{C})$ et $C_c^0(X_o, \mathbb{C})$ comme $G$-modules. On a de plus une application canonique, $G$-équivariantes

$$\Delta\colon C_c^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C_c^1(X_o, \mathbb{C});$$

elle envoie une 1-cochaîne simpliciale orientée $\lambda$ sur la 1-cochaîne $\Delta(\lambda)$ qui assigne la valeur $\lambda([x, y])$ à toute arête de $A_o(x, y)$ au dessus d'une arête $[x, y]$ de $X$. On a alors le diagramme commutatif

https://doi.org/10.1023/A:1021754801802 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & C_c^0(X, \mathbb{C}) & \longrightarrow & C_c^1(X, \mathbb{C}) \\ & \downarrow \simeq & & \downarrow \Delta \\ 0 \longrightarrow & C_c^0(X_o, \mathbb{C}) & \longrightarrow & C_c^1(X_o, \mathbb{C}) \end{array}$$

Ici les flèches horizontales sont les opérateurs cobords. En appliquant le *lemme du serpent* au diagramme commutatif et exact de $G$-modules suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & C_c^0(X, \mathbb{C}) & \simeq & C_c^0(X_o, \mathbb{C}) & \rightarrow & 0 & \rightarrow 0 \\ & \downarrow d & & \downarrow d_o & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & C_c^1(X, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\Delta} & C_c^1(X_o, \mathbb{C}) & \rightarrow & \frac{C_c^1(X_o, \mathbb{C})}{\Delta C_c^1(X, \mathbb{C})} & \end{array}$$

on obtient la suite exacte de $G$-modules:

$$0 \longrightarrow \mathrm{St}_G = H_c^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H_c^1(X_o, \mathbb{C}) \longrightarrow C_c^1(X_o, \mathbb{C})/\Delta C_c^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes de $X$. On a des décompositions

$$C_c^1(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} C_c^1(X, \mathbb{C})_a, \qquad C_c^1(X_o, \mathbb{C}) = \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} C^1(X_o^a, \mathbb{C}),$$

où $C_c^1(X, \mathbb{C})_a$ est le sous-espace vectoriel des 1-cochaînes à support dans $\{a\}$.

L'application $\Delta$ est compatible avec ces décompositions de sorte que

$$\begin{aligned} C_c^1(X_o, \mathbb{C})/\Delta C_c^1(X, \mathbb{C}) &= \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} C_c^1(X_o^a, \mathbb{C})/\Delta C_c^1(X, \mathbb{C})_a \\ &= \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} H^1(X_o^a, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Le groupe $G$ permute transitivement cette décomposition. Le stabilisateur d'une composante $H^1(X_o^{a_o}, \mathbb{C})$, pour un $a_o$ fixé est $\mathfrak{K}_{a_o}$. On a donc l'isomorphisme de $G$-modules:

$$C_c^1(X_o, \mathbb{C})/\Delta C_c^1(X, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{c} - \mathrm{Ind}_{\mathfrak{K}_{a_o}}^G H^1(X_o^{a_o}, \mathbb{C}),$$

où $c-$Ind désigne une induite compacte. On a donc prouvé la

PROPOSITION 1. *Pour toute arête $a_o$ de $X$, on a la suite exacte courte de $G$-modules:*

$$0 \longrightarrow \mathrm{St}_G \longrightarrow H_c^1(X_o, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{c} - \mathrm{Ind}_{\mathfrak{K}_{a_o}}^G H^1(X_o^a, \mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

D'après [8] I.8.4. et I.7.11, la représentation $\mathrm{c} - \mathrm{Ind}_{\mathfrak{K}_{a_o}}^G H^1(X_o^a, \mathbb{C})$ est projective dans la catégorie des représentations lisses complexes de $G$ à caractère central trivial. La suite précédente est donc scindée:

PROPOSITION 2. *Pour toute arête $a_o$ de $X$, le $G$-espace $H_c^1(X_o, \mathbb{C})$ est isomorphe à la somme directe de la représentation de Steinberg et de l'induite* $\mathrm{c} - \mathrm{Ind}_{\mathfrak{K}_{a_o}}^G H^1(X_o^a, \mathbb{C})$.

https://doi.org/10.1023/A:1021754801802 Published online by Cambridge University Press

## 8. Remarques sur la représentation induite $\mathbf{c} - \mathbf{Ind}_{\mathfrak{K}_{a_o}}^{G} \boldsymbol{H}^1(\boldsymbol{X}_o^{a_o}, \mathbb{C})$

Fixons une arête $a_o$ de $X$. D'aprés la proposition (7.2), le $G$-module $H_c^1(X_o, \mathbb{C})$ contient comme facteurs directs les représentations induites $\pi_u = \mathrm{c} - \mathrm{Ind}_{\mathfrak{K}_{a_o}}^{G} H_u$, $u \in \mathbf{k}^\times$, où les $H_u$ sont les représentations de $\mathfrak{K}_{a_o}$ considérées dans la Section 6. Ces dernières représentations sont *très cuspidales de type* 2 au sens de la définition 4.1 de [5]. Comme conséquence du Théorème 4.2 de loc. cit., on obtient:

THÉORÈME 1. *Les représentations $\pi_u$, $u \in \mathbf{k}^\times$, sont irréductibles, cuspidales et deux à deux inéquivalentes.*

En se servant de la *théorie des types* de Bushnell et Kutzko [4], on peut montrer qu'une représentation de $G$ sous-quotient irréductible de $H_c^1(X_o, \mathbb{C})$ est soit cuspidale, et elle est alors isomorphe à l'une des $\pi_u$, soit non-cuspidale, et elle est alors de niveau normalisée inférieur ou égal à 1.

Il serait laborieux de dresser la liste des représentations de $G$ apparaissant dans la cohomologie de $X_o$. Ce serait inintéressant car ces représentations ne se distinguent pas par une propriété remarquable. Il faudrait calculer entièrement la cohomologie de $\tilde{X}$, ce que nous espérons faire dans un prochain travail.

## Remerciements

La version finale de cet article fut écrite alors que l'auteur bénéficait d'une bourse de recherche au sein du SFB 478 *Geometrische Strukturen in der Mathematik*, Münster, Germany.

L'astuce sous-jacente à la contruction de cet article est en partie inspirée du travail de Drinfeld sur les revêtements du demi-plan non-archimédien et je remercie H. Carayol de m'avoir aiguillé sur cette piste. L'intérêt qu'ont porté G. Henniart, S. Stevens et M. Strauch à ce travail a été très précieux et motivant. Le résultat de la Section 6. et sa démonstration sont dus à P. Schneider. Ses commentaires, ainsi que ceux du *referee*, ont permis d'améliorer le contenu de cet article. Je remercie P. Torasso pour m'avoir indiqué quelques erreurs dans une rédaction précédente de ce travail.

## References

1. Baum, P., Connes, A.et Higson, H.: Classifying space for proper actions and $K$-theory of group $C^*$-algebras, Contemp. Math. 167, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
2. Borel, A.: Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup, *Invent. Math.* **35** (1976), 133–259.
3. Borel, A. et Serre, J.-P.: Cohomologie à support compact des immeubles de Bruhat–Tits; applications à la cohomologie des groupes $S$-arithmétiques, *C.R. Acad. Sci. Paris* **1** (1971), 110–113.
4. Bushnell, C. et Kutzko, J.: Semisimple types in $\mathrm{GL}_n$, *Compositio Math.* **119**(1) (1999), 53–97.
5. Carayol, H.: Représentations cuspidales du groupe linéaire, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) **17**(2) (1984), 191–225.

6. Schneider, P. et Stuhler, U.: Representation theory and sheaves on the Bruhat–Tits building, *Public. Math. IHES* **85** (1997), 97–191.
7. Serre, J.-P.: Arbres, amalgames, $SL_2$, *Astérisque* **46**, Soc. Math. France.
8. Vignéras, M.-F.: Représentations $l$-modulaires d'un groupe réductif $p$-adique avec $l \neq p$; Progr. in Math. 137, Birkhäuser, Basel, 1996.