Canad. Math. Bull. Vol. **33** (1), 1990

SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES MULTIFORMES DONT LES VALEURS SONT DES SEGMENTS

PAR
LINE BARIBEAU

ABSTRACT. Analytic multivalued functions are a powerful tool in spectral theory. In this paper we study analytic multivalued functions $\lambda \longmapsto K(\lambda)$ whose values are segments. Under the additional assumption that K is continuous, we prove that the endpoints of K vary locally holomorphically.

1. **Introduction.** La fonction $\lambda \longmapsto \mathrm{Sp} f(\lambda)$, où f est une fonction analytique à valeurs dans une algèbre de Banach, est une fonction multiforme, c'est-à-dire une fonctions à valeurs dans $\mathcal{K}(\mathbb{C})$, l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{C}$. Cette fonction possède des propriétés analytiques intéressantes, comme par exemple la sous-harmonicité du rayon spectral ou de la capacité. Les méthodes de sous-harmonicité se sont révélées très utiles en théorie spectrale. Le lecteur en trouvera de nombreux exemples dans les livres de B. Aupetit [1, 3].

Dans [7], Z. Słodkowski observe que les propriétés analytiques de la fonction spectre se retrouvent dans une classe plus vaste, celle des fonctions analytiques multiformes. Ces fonctions furent introduites à l'origine par K. Oka. Elles peuvent être définies comme suit:

DÉFINITION 1.1. *Soit $\lambda \longmapsto K(\lambda)$ une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathcal{K}(\mathbb{C})$. Alors K est dite analytique multiforme si elle est semi-continue supérieurement et si l'ouvert $\{(\lambda, z) \mid \lambda \in D \text{ et } z \notin K(\lambda)\}$ est pseudoconvexe.*

La fonction spectre décrite plus haut est un exemple de fonction analytique multiforme. Ces fonctions trouvent également des applications dans la théorie des algèbres uniformes [2]. Le lecteur trouvera dans [6], [2] ou [3] les principales propriétés des fonctions analytiques multiformes.

Un théorème de Hartogs montre que si $\lambda \longmapsto K(\lambda) = \{\alpha(\lambda)\}$ est analytique multiforme, alors la fonction α est holomorphe. Nous nous intéressons ici à un autre exemple de fonctions à géométrie simple: le cas des segments. Sous l'hypothèse supplémentaire que K est continue, nous montrons que les extrémités de K varient localement holomorphiquement (Théorème 3.5). Ce résultat constitue donc une généralisation du théorème de Hartogs.

Reçu par la rédaction le 25 mai 1988.
Cette recherche a été subventionnée par le Fonds F.C.A.R. de la province de Québec.
1980 Mathematics Subject Classification 47A10 32F15

2. **Résultats connus.** Nous rappelons ici quelques théorèmes sur lesquels seront basées nos démonstrations.

THÉORÈME 2.1. *Soit $\lambda \longmapsto K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme définie sur un domaine D de $\mathbb{C}$, et supposons que $K(\lambda) \subseteq \mathbb{R}$ pour tout $\lambda \in D$. Alors $K(\lambda)$ est constant.*

Ce théorème est un corollaire d'un résultat dû à Vesentini ([8], Proposition 7) et fut originalement démontré dans le contexte particulier de la fonction spectre.

THÉORÈME 2.2. *Soit $\lambda \longmapsto K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme définie sur un domaine D de $\mathbb{C}$. Posons*

$$u(\lambda) = \max\{\Re z \mid z \in K(\lambda)\}$$
$$v(\lambda) = \min\{\Re z \mid z \in K(\lambda)\}.$$

Alors u et $-v$ sont sous-harmoniques sur D.

THÉORÈME 2.3. *Soit $\lambda \longmapsto K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme définie sur un domaine D de $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe des nombres réels s, θ_1, θ_2 avec $s > 0$ et $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$ tel que $K(\lambda) \subseteq \{z \mid |z| > s \text{ et } \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$ pour tout $\lambda \in D$ et posons*

$$\mu(\lambda) = \max\{\arg z \mid z \in K(\lambda)\}$$
$$\nu(\lambda) = \min\{\arg z \mid z \in K(\lambda)\}.$$

Alors μ et $-\nu$ sont sous-harmoniques sur D.

Le Théorème 2.2 est une conséquence de la sous-harmonicité du logarithme du rayon spectral (il suffit de considérer la fonction $e^{K(\lambda)}$). Le Théorème 2.3 est un cas particulier de notre Théorème 1.1 de [4].

3. **Fonctions dont les valeurs sont des segments.** Avant de démontrer le résultat principal, nous traitons deux cas particuliers.

THÉORÈME 3.1. *Soit $\lambda \longmapsto K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme définie sur un domaine D de $\mathbb{C}$. Supposons que $K(\lambda)$ est toujours un segment horizontal $K(\lambda) = [\alpha(\lambda), \alpha(\lambda) + u(\lambda)]$ où $u(\lambda) \geqq 0$. Alors α est holomorphe sur D et u est constante.*

DÉMONSTRATION. Par connexité, il suffit de montrer que la conclusion est vraie dans un voisinage de tout point de D. En appliquant le Théorème 2.2 à la fonction analytique multiforme $-iK(\lambda)$, on trouve que la fonction

$$\Im\,\alpha(\lambda) = \max\{\Re z \mid z \in -iK(\lambda)\} = \min\{\Re z \mid z \in -iK(\lambda)\}$$

est harmonique sur D.

Pour chaque point $\lambda_0 \in D$ on peut donc trouver un voisinage connexe V de λ_0 et une fonction h holomorphe sur V tel que $\Im\,\alpha(\lambda) = \Im\,h(\lambda)$ sur V. La fonction

https://doi.org/10.4153/CMB-1990-017-8 Published online by Cambridge University Press

$K'(\lambda) = K(\lambda) - h(\lambda)$ est analytique multiforme et réelle sur V. Le Théorème 2.1 implique que $K' \equiv [a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Donc $\alpha(\lambda) = h(\lambda) + a$ et $u(\lambda) = b - a$ sur V. □

THÉORÈME 3.2. *Supposons que* $\lambda \longmapsto K(\lambda) = [0, \alpha(\lambda)]$ *est une fonction analytique multiforme continue sur un domaine* D *de* $\mathbb{C}$. *Alors* α *est holomorphe sur* D.

DÉMONSTRATION. Soit λ_0 tel que $\alpha(\lambda_0) \neq 0$. Nous allons montrer que α est holomorphe dans un voisinage de λ_0. On peut supposer sans perte de généralité que $\alpha(\lambda_0)$ se trouve dans le quadrant $Q = \{z \mid |z| > 0,\ 0 < \arg z < \pi/2\}$. Par hypothèse α est continue. Il existe donc un disque $B(\lambda_0, r)$ centré en λ_0 tel que $\alpha(\lambda) \in Q$ pour tout $\lambda \in B(\lambda_0, r)$.

Soit $v(\lambda) = \arg \alpha(\lambda)$ l'angle que fait $K(\lambda)$ avec l'horizontale. Nous allons montrer que v est harmonique sur $B(\lambda_0, r)$. Soit $K_n(\lambda) = K(\lambda) + 1/n$ où $n \in \mathbb{N}$. La fonction K_n satisfait les hypothèses du Théorème 2.2. Donc la fonction

$$\mu_n(\lambda) = \max\{\arg z \mid z \in K_n(\lambda)\}$$

est sous-harmonique sur $B(\lambda_0, r)$. La fonction v est la limite croissante, quand $n \longrightarrow \infty$, des fonctions μ_n. Pour ρ assez petit on a donc

$$\mu_n(\lambda) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_n(\lambda + \rho e^{i\theta})\, d\theta \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\lambda + \rho e^{i\theta})\, d\theta$$

et par conséquent v satisfait l'inégalité de la moyenne. Puisque v est aussi continue, on conclut qu'elle est sous-harmonique. Pour montrer que v est surharmonique, on considère cette fois les fonctions analytiques multiformes $K_n(\lambda) = K(\lambda) - 1/n$ et les fonctions

$$\nu_n(\lambda) = \min\{\arg z \mid z \in K_n(\lambda)\}.$$

D'après le Théorème 2.2 les fonctions $-\nu_n$ sont sous-harmoniques. Mais $-v$ est la limite croissante des $-\nu_n$. Comme précédemment on conclut que $-v$ est sous-harmonique.

Puisque v est harmonique sur $B(\lambda_0, r)$, on peut écrire $v = \Im h$ où h est une fonction holomorphe sur $B(\lambda_0, r)$. La fonction

$$K'(\lambda) = e^{-h(\lambda)} K(\lambda)$$

est alors une fonction analytique multiforme réelle, donc constante par le Théorème 2.1. Si on écrit $e^{-h(\lambda)} K(\lambda) = [0, A]$, on a donc $\alpha(\lambda) = A e^{h(\lambda)}$ sur $B(\lambda_0, r)$.

Ainsi α est holomorphe au voisinage de chaque point où elle ne s'annule pas. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème d'extension de Radó pour compléter la démonstration. □

THÉORÈME 3.3. *Soit* $\lambda \longmapsto K(\lambda) = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ *une fonction analytique multiforme continue sur un domaine* D *de* $\mathbb{C}$. *Alors* $(\beta - \alpha)^2$ *est holomorphe sur* D.

DÉMONSTRATION. D'après [6], la somme algébrique de deux fonctions analytiques multiformes est à nouveau analytique multiforme. La composition d'une fonction analytique multiforme avec une fonction holomorphe donne également une fonction analytique multiforme. Donc les fonctions $-K(\lambda)$,

$$L(\lambda) = K(\lambda) + (-K(\lambda)) = [\alpha(\lambda) - \beta(\lambda), \beta(\lambda) - \alpha(\lambda)]$$

et

$$M(\lambda) = \{z^2 \mid z \in L(\lambda)\} = [0, (\beta(\lambda) - \alpha(\lambda))^2]$$

sont analytiques multiformes. Le résultat suit maintenant en appliquant le Théorème 3.2 à M. □

COROLLAIRE 3.4. *Si $\lambda \longmapsto [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ est analytique multiforme et continue sur un domaine D, alors l'ensemble $\{\lambda \in D \mid \alpha(\lambda) = \beta(\lambda)\}$ est discret.*

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le résultat général.

THÉORÈME 3.5. *Supposons que $\lambda \longmapsto K(\lambda)$ est analytique multiforme et continue sur un domaine D et que $K(\lambda)$ est toujours un segment. Alors les extrémités de K varient holomorphiquement au voisinage de tout λ_0 tel que $K(\lambda_0)$ n'est pas réduit à un point.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $K(\lambda_0) = [\alpha(\lambda_0), \beta(\lambda_0)]$ où $\alpha(\lambda_0) \neq \beta(\lambda_0)$. Sur un disque suffisamment petit $B(\lambda_0, r)$ centré en λ_0, on peut écrire $K(\lambda) = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ où α et β sont continues et $\alpha(\lambda) \neq \beta(\lambda)$. D'après le Théorème 3.3, $(\beta - \alpha)^2$ est holomorphe sur $B(\lambda_0, r)$. Puisque cette fonction ne s'annule pas, on peut écrire

$$(\beta - \alpha)^2(\lambda) = e^{h(\lambda)}$$

où h est holomorphe sur $B(\lambda_0, r)$.

Définissons sur ce disque la fonction

$$L(\lambda) = e^{-h(\lambda)/2} K(\lambda) = [e^{-h(\lambda)/2}\alpha(\lambda), e^{-h(\lambda)/2}\beta(\lambda)].$$

La fonction L est analytique multiforme sur $B(\lambda_0, r)$ et est toujours un segment horizontal. Il existe donc une fonction f, holomorphe sur $B(\lambda_0, r)$, et une constante réelle c, tel que

$$\begin{aligned} e^{-h(\lambda)/2}\alpha(\lambda) &= f(\lambda) \\ e^{-h(\lambda)/2}\beta(\lambda) &= f(\lambda) + c \end{aligned}$$

Donc $\alpha(\lambda) = e^{h(\lambda)/2} f(\lambda)$ et $\beta(\lambda) = (f(\lambda) + c)e^{h(\lambda)/2}$ sont holomorphes sur le voisinage $B(\lambda_0, r)$. □

Même si $K(\lambda)$ est continue, il n'est pas toujours possible de définir les extrémités de K comme des fonctions globalement continues sur D. Par exemple, la fonction $[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]$ est analytique multiforme continue sur $\mathbb{C}$ mais possède un point de branchement en 0. Toutefois, le point milieu de $K(\lambda)$ varie continûment sur D.

COROLLAIRE 3.6. *Supposons que $K(\lambda)$ satisfait les hypothèses du Théorème* 3.5. *Dénotons par $c(\lambda)$ le point milieu de $K(\lambda)$. Alors c est holomorphe sur D.*

DÉMONSTRATION. La continuité de K implique que c est continue sur D. Le Théorème 3.5 implique que c est holomorphe sur $D \setminus E$ où

$$E = \{\lambda \in D \mid K(\lambda) \text{ est réduit à un point}\}.$$

L'ensemble E est discret par le Corollaire 3.4. Puisque c est continue, chaque point de E représente donc une singularité enlevable de c. Par conséquent c est holomorphe sur D. □

Soit $K(\lambda) = [\alpha(\lambda), \beta(\lambda)]$ comme dans l'énoncé du Théorème 3.5. Les fonctions α et β peuvent ne pas être globalement continues, mais les deux fonctions $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta = [(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2]/4$ (qui demeurent invariantes par une permutation de α et β) sont holomorphes en vertu du Théorème 3.3 et du Corollaire 3.6. Posons $h = -(\alpha+\beta)$ et $g = \alpha\beta$. Alors

$$\{\alpha(\lambda), \beta(\lambda)\} = \{z \mid z^2 + h(\lambda)z + g(\lambda) = 0\}.$$

Ceci est un exemple de fonction algébroïde. Par définition, une *fonction algébroïde* sur un ouvert D est une fonction de la forme

$$K(\lambda) = \{z \mid z^n + a_1(\lambda)z^{n-1} + \ldots a_{n-1}(\lambda)z + a_n(\lambda) = 0\}$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions holomorphes sur D. On sait que les fonctions algébroïdes correspondent précisément aux fonctions analytiques multiformes finies. On sait aussi que toute fonction algébroïde à n éléments peut être donnée par $\mathrm{Sp} f(\lambda)$ où $f(\lambda)$ est une fonction analytique à valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$, l'algèbre des matrices $n \times n$. Le Théorème 3.5 peut donc être formulé comme suit:

COROLLAIRE 3.7. *Toute fonction analytique multiforme continue dont les valeurs sont des segments est l'enveloppe convexe de* $\mathrm{Sp} f(\lambda)$ *où f est une fonction analytique à valeurs dans $M_2(\mathbb{C})$.*

Ce dernier résultat nous amène à formuler la question suivante: est-ce que toute fonction analytique multiforme dont les valeurs sont des polygones convexes à au plus n côtés est l'enveloppe convexe d'une fonction algébroïde? Il serait déjà intéressant de pouvoir montrer que les sommets du polygone varient holomorphiquement en dehors des points de branchement.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Aupetit, *Propriétés spectrales des algèbres de Banach,* Lecture notes in Mathematics 735, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.

2. B. Aupetit, *Analytic multivalued functions in Banach algebras and uniform algebras,* Adv. Math **44** (1982), 18–60.

3. B. Aupetit, *A Primer on Spectral Theory*, livre à paraître.

4. B. Aupetit et L. Baribeau, *Sous-harmonicité de l'angle spectral*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **10** (1988), 51–56.

5. K. Oka, *Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc.*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A **4** (1934), 93–98.

6. T. J. Ransford, *Analytic Multivalued Functions*, Doctoral Thesis, University of Cambridge, 1983.

7. Z. Słodkowski, *Analytic Set-Valued Functions and Spectra*, Math. Ann. **256** (1981) 363–386.

8. E. Vesentini, *Maximum theorems for spectra*, dans *Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*, pp 111–117, Springer-Verlag, New-York, 1970.

Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics
16, Mill Lane
Cambridge CB2 1SB
U.K.