

UN THÉORÈME DE RÉGULARITÉ POUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ABSTRAITE

PAUL ARMINJON

I. Introduction. Soit Y un espace localement convexe complet, la topologie étant définie par une famille de semi-normes $\{p_\alpha\}$. Soit A un opérateur fermé de domaine $D(A)$ dense dans Y . Nous considérons dans cet article des fonctions u de la variable réelle t à valeurs dans Y . On dit que $u(t) \in C^1[(a, b); Y]$ est une solution au sens classique de l'équation différentielle abstraite (ou opérationnelle)

$$(1) \quad \frac{1}{i} \frac{du}{dt} - Au = f$$

si pour tout $t \in (a, b)$, $u(t) \in D(A)$, et satisfait la relation

$$\frac{1}{i} \frac{du}{dt}(t) - Au(t) = f(t),$$

élément de Y , f étant une fonction continue à valeurs dans Y .

Dans leur important mémoire [1], Agmon et Nirenberg ont étudié en détail les propriétés des solutions d'une telle équation dans le cas où Y est un espace de Banach. Nous nous inspirons ici de leur étude pour examiner, dans le cas où Y est localement convexe, des conditions suffisantes assurant la régularité des solutions.

Je remercie le professeur S. Zaidman pour les encouragements et les conseils qu'il m'a prodigués au cours de la rédaction de ma thèse [2], dont ce travail est un extrait.

II. Le théorème de régularité.

THÉORÈME. Soit A un opérateur fermé de domaine dense et satisfaisant les conditions suivantes:

(i) La résolvante $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ existe et est holomorphe dans la région

$$\mathcal{D} = \{\lambda = \mu + i\nu; |\nu| \leq (1/c) \log |\mu| \text{ et } |\lambda| \geq N_0\}$$

où c et N_0 sont des constantes positives;

(ii) La famille d'opérateurs $\{|\lambda| \exp(-\Delta|\nu|)R(\lambda, A), \lambda \in \mathcal{D}\}$ est équicontinue

Reçu le 16 décembre 1968.

en λ sur \mathcal{D} , c.-à-d. que pour toute semi-norme p_α il existe une semi-norme p_β et une constante $C_{\alpha,\beta}$ positive telles que

$$(2) \quad p_\alpha[|\lambda| \exp(-\Delta|\nu|)R(\lambda, A)(x)] < C_{\alpha,\beta}p_\beta(x) \quad \text{pour tout } x \in Y \text{ et tout } \lambda \in \mathcal{D},$$

où $C_{\alpha,\beta}$ ne dépend pas de x , et où Δ est une constante positive.

Soit alors u une solution classique de l'équation (1) dans l'intervalle $|t| < a$, avec $f \in C^{k+1}[(-a, a); Y]$ pour k entier ≥ 2 . Alors si $a' = a - \Delta - ck$ est positif, on a $u \in C^k[(-a', a'); Y]$.

Démonstration. Soit a'' tel que $0 < a'' < a'$; il suffit de montrer que $u \in C^k[(-a'', a''); Y]$. La démonstration exige plusieurs considérations et résultats préliminaires. On commence par montrer que $u(t)$ peut s'écrire comme la transformée de Fourier inverse d'une somme de fonctions faisant intervenir la résolvante. On déforme ensuite le contour de l'intégration correspondante pour obtenir plus commodément les majorations dont on déduira la régularité de u . Cette dernière résultera de la régularité correspondante de chacune des intégrales intervenant dans la représentation de u obtenue.

Posons $\delta = a' - a''$ et soit $z(t)$ une fonction scalaire indéfiniment dérivable telle que $z(t) = 1$ pour $|t| < a - \delta$ et $z(t) = 0$ pour $|t| > a - \frac{1}{2}\delta$. Posons

$$\begin{cases} v(t) = z(t)u(t) & \text{pour } |t| \leq a, \\ v = 0 & \text{pour } |t| > a. \end{cases}$$

On voit que v est une fonction de classe $C^1(\mathbf{R}, Y)$ telle que $v(t) \in D(A)$ pour tout t réel et $v = u$ pour $|t| < a - \delta$, avec

$$Lv = \frac{1}{i} \frac{dv}{dt} - Av = \frac{1}{i} [z(t)u'(t) + z'(t)u(t)] - z(t)Au(t),$$

c.-à-d.

$$(3) \quad Lv = zf - iz'u \quad \text{pour } |t| < a.$$

Définissons maintenant $f_0 = zf$ pour $|t| \leq a$ et $f_0 = 0$ si $|t| > a$, et

$$\begin{aligned} g_+ &= \begin{cases} iz'u & \text{pour } -a \leq t \leq -a + \delta, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \\ g_- &= \begin{cases} iz'u & \text{pour } a - \delta \leq t \leq a, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il vient ainsi

$$(4) \quad Lv = f_0 + g_+ + g_-$$

sur toute la droite réelle. Puisque ces fonctions sont à support compact et au moins une fois dérivables, on peut passer aux transformées de Fourier:

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \left[\frac{1}{i} v'(t) - Av(t) \right] dt = \hat{f}_0(\lambda) + \hat{g}_+(\lambda) + \hat{g}_-(\lambda).$$

A étant fermé, on obtient finalement

$$(6) \quad (\lambda - A)\hat{v}(\lambda) = \hat{f}_0(\lambda) + \hat{g}_+(\lambda) + \hat{g}_-(\lambda);$$

ces transformées étant des fonctions entières à valeurs dans Y , l'équation (6) est valable dans tout le plan complexe. Par suite, pour tout $\lambda \in \mathcal{D}$ on a

$$(7) \quad \hat{v}(\lambda) = R(\lambda)\hat{f}_0(\lambda) + R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) + R(\lambda)\hat{g}_-(\lambda).$$

Pour $|t| \leq a'' < a' - \delta$, nous avons $v \equiv u$, et en passant aux transformées de Fourier inverses nous obtenons

$$(8) \quad \begin{aligned} \sqrt{(2\pi)}u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \hat{v}(\lambda) d\lambda = \int_{-N_0}^{N_0} e^{i\lambda t} \hat{v}(\lambda) d\lambda \\ &+ \int_{-\infty}^{-N_0} e^{i\lambda t} R(\lambda)[\hat{f}_0 + \hat{g}_+ + \hat{g}_-] d\lambda + \int_{N_0}^{\infty} e^{i\lambda t} R(\lambda)[\hat{f}_0 + \hat{g}_+ + \hat{g}_-] d\lambda. \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer le théorème d'inversion de Fourier sous sa forme vectorielle parce que v est de classe C^1 et à support compact, et chacune des intégrales impliquées est p_α -absolument convergente.† Par exemple, on voit d'après (2) que

$$\int_{N_0}^{\infty} p_\alpha[e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda)] d\lambda < C_{\alpha,\beta} \int_{N_0}^{\infty} \lambda^{-1} p_\beta[\hat{g}_+(\lambda)] d\lambda,$$

mais $\hat{g}_+(\lambda) = O(1/\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ comme on peut le vérifier en intégrant par parties. Par suite,

$$\int_{N_0}^{\infty} p_\alpha[e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda)] d\lambda < \infty \quad \text{pour toute } p_\alpha.$$

Nous allons montrer que moyennant une transformation appropriée du contour d'intégration, $u(t)$ peut s'écrire, pour $|t| < a''$:

$$(9) \quad \sqrt{(2\pi)}u = u_0 + u_1 + u_2 + u_1^+ + u_1^- + u_2^+ + u_2^-$$

avec

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \int_{-N_0}^{N_0} e^{i\lambda t} \hat{v}(\lambda) d\lambda, \\ u_1(t) &= \int_{-\infty}^{-N_0} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{f}_0(\lambda) d\lambda, \quad u_2(t) = \int_{N_0}^{+\infty} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{f}_0(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

et

$$u_j^\pm(t) = \int_{\Gamma_j^\pm} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_\pm(\lambda) d\lambda \quad (j = 1, 2),$$

où toutes ces intégrales sont p_α -absolument convergentes comme nous le verrons plus loin. Γ_1^+ est la branche infinie de la courbe $\nu = (1/c) \log(\mu/N_0)$

†Une fonction f Y -valuée est dite d'intégrale p_α -absolument convergente si $\int p_\alpha f < \infty$ pour toute semi-norme p_α .

avec $\mu \geq N_0$, située dans le premier quadrant, c étant la constante de l'énoncé. Γ_2^+ est la branche symétrique de Γ_1^+ par rapport à l'axe vertical, Γ_1^- et Γ_2^- sont les symétriques de Γ_1^+ et Γ_2^+ par rapport à l'axe horizontal. Toutes ces courbes sont orientées positivement de gauche à droite.

Introduisons, pour justifier les déformations de contour, une fonction "multiplicateur": pour $r > 1$ fixé, définissons $q(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ sauf les λ imaginaires purs, par

$$q(\lambda) = \begin{cases} \exp(-\lambda^r) & \text{pour } \operatorname{Re} \lambda > 0, \\ q(-\lambda) & \text{pour } \operatorname{Re} \lambda < 0, \\ q(0) = 1, \end{cases}$$

où nous prenons la valeur principale de λ^r pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$. $q(\lambda)$ est une fonction analytique dans chaque demi-plan ouvert $\operatorname{Re} \lambda < 0$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Sur l'axe réel, q est une fois continûment différentiable, même à l'origine; de plus, $d^2q/d\lambda^2$ est absolument intégrable sur l'axe réel. Considérons la fonction

$$j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} q(\lambda) d\lambda$$

pour t réel. Elle est indéfiniment dérivable, et on peut vérifier que $j(t) = O(t^{-2})$ si $|t| \rightarrow \infty$. Pour $\epsilon > 0$ arbitraire, soit

$$j_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} j\left(\frac{t}{\epsilon}\right);$$

alors $\hat{j}_\epsilon(\lambda) = q(\epsilon\lambda)$, d'après le théorème d'inversion de Fourier classique. On peut vérifier que j_ϵ est une fonction régularisante, c.-à-d. que les convolutions $v_\epsilon = j_\epsilon * v$ de j_ϵ avec une fonction v p_α -absolument intégrable sont des fonctions indéfiniment dérivables qui convergent vers v dans le sens suivant lorsque $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha[j_\epsilon * v(t) - v(t)] dt \rightarrow 0 \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ pour toute } p_\alpha.$$

On a de plus $\hat{v}_\epsilon(\lambda) = q(\epsilon\lambda)\hat{v}(\lambda)$ en vertu des propriétés mutuelles de la transformation de Fourier et de la convolution.

Nous voulons montrer que l'intégrale

$$w_1^+(t) = \int_{N_0}^{\infty} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda$$

est égale à

$$u_1^+(t) = \int_{\Gamma_1^+} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda$$

afin d'obtenir la représentation (9).

Nous commencerons pour cela par régulariser ces fonctions de t à l'aide de j_ϵ , en formant les convolutions des ces intégrales avec j_ϵ .

LEMME 1. *La régularisée de w_1 peut se mettre sous la forme:*

$$(10) \quad j_\epsilon * w_1^+(t) = \int_{N_0}^\infty e^{i\lambda t} q(\epsilon\lambda) R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda) d\lambda.$$

Démonstration. La convergence de toutes les intégrales impliquées résultant du fait que $q(\epsilon\lambda)$ décroît plus vite que toute exponentielle $e^{-k|\lambda|}$ si $|\lambda| \rightarrow \infty$, il suffit de montrer que les transformées de Fourier des deux membres de (10) sont les mêmes. Nous avons à gauche

$$\mathcal{F}(j_\epsilon * w_1^+)(\lambda) = q(\epsilon\lambda) \hat{w}_1^+(\lambda) = q(\epsilon\lambda) R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda),$$

d'après le théorème d'inversion de Fourier. Il vient de même à droite

$$\mathcal{F}\left(\int_{N_0}^\infty e^{i\lambda t} q(\epsilon\lambda) R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda) d\lambda\right) = q(\epsilon\lambda) R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda).$$

L'égalité (10) résulte alors du théorème d'inversion de Fourier, c.q.f.d.

LEMME 2. *Soit $\Lambda(N)$ le segment vertical joignant $(N, 0)$ à $(N, (1/c) \log(N/N_0))$ sur l'arc Γ_1^+ . Alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Lambda(N)} e^{i\lambda t} q(\epsilon\lambda) R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda) d\lambda = 0.$$

Démonstration. Pour toute semi-norme p_α , en prenant $r = 2$ dans $q(\epsilon\lambda)$, l'inégalité (2) donne ici:

$$\begin{aligned} & \int_{\Lambda(N)} p_\alpha [e^{i\lambda t} q(\epsilon\lambda) R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda)] d\lambda \\ & \leq C_1 \int_0^{(1/c) \log(N/N_0)} \exp(-\nu t) \exp[-\epsilon^2(N + i\nu)^2] \exp(\Delta\nu) |\lambda|^{-1} p_\beta[\hat{g}_+(\lambda)] d\lambda \\ & \leq C_2 \int_0^{(1/c) \log(N/N_0)} \exp[(\Delta - t)\nu - \epsilon^2(N^2 - \nu^2)] N^{-2} d\nu \end{aligned}$$

en intégrant $\hat{g}_+(\lambda)$ par parties pour la majorer. On peut alors majorer le membre de droite par un terme de la forme

$$C_3 \log N \cdot N^{(\Delta-t)/c-2+(\epsilon/c)^2 \log(N/N_0)} \exp(-\epsilon^2 N^2)$$

qui tend vers 0, grâce à l'exponentielle, si $N \rightarrow \infty$, c.q.f.d.

LEMME 3. *La déformation de contour annoncée est valide pour les régularisées:*

$$(11) \quad \int_{N_0}^\infty e^{i\lambda t} q(\epsilon\lambda) R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_1^+} e^{i\lambda t} q(\epsilon\lambda) R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda) d\lambda.$$

Démonstration. Soit $\Gamma(N)$ l'arc de Γ_1^+ joignant les points $(N_0, 0)$ à $(N, (1/c) \log(N/N_0))$. Sur le parcours d'intégration

$$[N_0, N] \cup \Lambda(N) \cup \{-\Gamma(N)\},$$

on applique le théorème de Cauchy sous sa forme vectorielle à la fonction $e^{i\lambda t}q(\epsilon\lambda)R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda)$, qui est analytique dans le domaine de définition de $R(\lambda)$. Le lemme 2 entraîne l'égalité annoncée lorsqu'on fait tendre N vers l'infini, c.q.f.d.

Nous allons maintenant montrer que

$$\int_{N_0}^{\infty} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_1^+} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda,$$

en faisant tendre ϵ vers 0 dans (11).

LEMME 4. *Pour $t > -a''$, on a :*

$$(12) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1^+} e^{i\lambda t} q(\epsilon\lambda)R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_1^+} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda.$$

Démonstration. Sur Γ_1^+ on a $\text{Im } \lambda = \nu = (1/c) \log (\mu/N_0)$ avec $\mu \geq N_0$, et puisque $q(\epsilon\lambda) = \exp[-(\epsilon\lambda)^2]$, nous avons $|q(\epsilon\lambda)| \leq M < \infty$ sur l'intervalle $[N_0, \infty)$ ainsi que sur Γ_1^+ . En effet,

$$\begin{aligned} |q(\epsilon\lambda)| &= |\exp[-\epsilon^2(\mu + (i/c) \log (\mu/N_0))^2]| \\ &\leq \exp(-\epsilon^2\mu^2) \leq \exp(-\epsilon^2N_0^2) < M < \infty. \end{aligned}$$

Nous verrons (lemme 8) que l'intégrale $\int_{\Gamma_1^+} e^{i\lambda t}R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda$ est p_α -absolument convergente pourvu que $t > -a''$. La majoration précédente pour $|q(\epsilon\lambda)|$ entraîne que pour tout $\epsilon > 0$ la fonction $e^{i\lambda t}q(\epsilon\lambda)R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda)$ est intégrable. Nous pouvons donc appliquer aux intégrales de l'énoncé le théorème de la convergence dominée de Lebesgue sous sa forme généralisée pour obtenir l'égalité annoncée, puisque $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q(\epsilon\lambda) = 1$, c.q.f.d.

Ce lemme montre, d'après (11), que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{N_0}^{\infty} e^{i\lambda t} q(\epsilon\lambda)R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda$$

existe, égale à $\int_{\Gamma_1^+} e^{i\lambda t}R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda$.

Il reste donc, pour justifier la déformation de contour, à montrer le lemme suivant.

LEMME 5. *On a*

$$(13) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{N_0}^{\infty} e^{i\lambda t} q(\epsilon\lambda)R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda = \int_{N_0}^{\infty} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda,$$

la seconde intégrale étant p_α -absolument convergente pour tout t réel.

Démonstration. Lorsque ϵ tend vers 0, $q(\epsilon\lambda)$ tend vers 1 en croissant de manière monotone pour λ réel. Nous avons donc

$$(14) \quad \begin{aligned} p_\alpha[e^{i\lambda t}q(\epsilon\lambda)R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda)] &\leq p_\alpha[e^{i\lambda t}R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda)] \\ &\leq |\lambda|^{-1}C_{\alpha,\beta} \cdot p_\beta[\hat{g}_+(\lambda)] \leq C_1|\lambda|^{-2}. \end{aligned}$$

Par suite, $\int_{N_0}^{\infty} p_{\alpha}[e^{i\lambda t}R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda)] d\lambda$ est finie pour chaque semi-norme p_{α} , et comme les intégrales $\int_{N_0}^{\infty} e^{i\lambda t}q(\epsilon\lambda)R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda$ sont p_{α} -absolument convergentes d'après (14), le théorème de Lebesgue entraîne l'égalité (13), c.q.f.d.

En réunissant (11), (12), et (13) nous obtenons finalement

$$\int_{N_0}^{\infty} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_1^+} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{g}_+(\lambda) d\lambda$$

pourvu que $t > -a''$. On démontrerait de même les relations analogues concernant les parcours Γ_1^- , Γ_2^+ , Γ_2^- et les fonctions correspondantes respectivement pour $t < a''$, $t > -a''$, et $t < a''$. Par conséquent, $u(t)$ admet bien la représentation annoncée en (9).

Il nous reste à vérifier que pour $|t| < a'' = a' - \delta$, chacune des sept fonctions figurant à droite de (9) est k fois continûment dérivable.

LEMME 6. *La fonction $u_0(t) = \int_{-N_0}^{N_0} e^{i\lambda t}\hat{v}(\lambda) d\lambda$ est indéfiniment dérivable sur la droite, et à fortiori de classe $C^k[(-a', a'); Y]$.*

La démonstration est immédiate.

LEMME 7. *Les fonctions*

$$u_1(t) = \int_{-\infty}^{-N_0} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{f}_0(\lambda) d\lambda \quad \text{et} \quad u_2(t) = \int_{N_0}^{\infty} e^{i\lambda t} R(\lambda)\hat{f}_0(\lambda) d\lambda$$

sont k fois continûment dérivables sur $(-\infty, \infty)$.

Démonstration. Considérons par exemple $u_2(t)$. Par hypothèse nous avons

$$p_{\alpha}[R(\lambda)\hat{f}_0(\lambda)] \leq C_{\alpha,\beta}|\lambda|^{-1} \exp(\Delta|\text{Im } \lambda|)p_{\beta}[\hat{f}_0(\lambda)].$$

Or on peut écrire (cf. [6, p. 18]), puisque $f_0 \in C^{k+1}([-a, a]; Y)$:

$$\hat{f}_0(\lambda) = \lambda^{-k-1}\mathcal{F}(f_0^{(k+1)})(\lambda).$$

Mais

$$p_{\beta}[\mathcal{F}(f_0^{(k+1)})(\lambda)] \leq \int_{-a}^a p_{\beta}[e^{-i\lambda t}f^{(k+1)}(t)] dt \leq 2a \cdot \max_{|t| \leq a} p_{\beta}[f_0^{(k+1)}(t)] = C_1$$

puisque $f_0 \in C^{k+1}([-a, a]; Y)$. Il vient ainsi la majoration suivante sur l'axe réel:

$$p_{\alpha}[R(\lambda)\hat{f}_0(\lambda)] \leq C_2|\lambda|^{-k-2}$$

ou encore

$$p_{\alpha}[\lambda^k R(\lambda)\hat{f}_0(\lambda)] \leq C|\lambda|^{-2},$$

ce qui montre que $u_2(t)$ est p_{α} -absolument convergente ainsi que chacune des intégrales

$$(i)^j \int_{N_0}^{\infty} e^{i\lambda t} \lambda^j R(\lambda)\hat{f}_0(\lambda) d\lambda \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad \text{pour } t \text{ réel.}$$

La convergence de ces intégrales étant uniforme sur tout compact, elles représentent les dérivées d'ordre $j = 1, 2, \dots, k$ de la fonction $u_2(t)$, et sont continues pour $t \in [-\infty, \infty]$, c.q.f.d.

LEMME 8. Les fonctions $u_1^+(t) = \int_{\Gamma_1^+} e^{i\lambda t} R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda) d\lambda$, u_1^- , u_2^+ , et u_2^- définies plus haut sont k fois continûment dérivables sur l'intervalle $(-a', a')$, avec $a' = a - \Delta - ck$.

Démonstration. Nous avons

$$\hat{g}_+(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} g_+(t) dt = i \int_{-a}^{-a+\delta} e^{-i(\mu+i\nu)t} z'(t)u(t) dt$$

d'où, sur Γ_1^+ où ν est positif, la majoration suivante:

$$p_\beta[\hat{g}_+(\lambda)] \leq C_1 \exp[(-a + \delta)\nu] p_\beta \left(\int_{-a}^{-a+\delta} u(t)z'(t) dt \right) \leq C_2 \exp[(\delta - a)\nu],$$

puisque $u \in C^1[(-a, a); Y]$ et z' est continue. En appliquant ceci dans (2) il vient

$$p_\alpha[\lambda^k e^{i\lambda t} R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda)] \leq C_3 |\lambda|^{k-1} \exp[-\nu t + \Delta\nu + (\delta - a)\nu] \leq C_4 \mu^{k-1+(\Delta+\delta-t-a)/c}$$

compte tenu de la définition de Γ_1^+ . Par suite, l'intégrale

$$\int_{\Gamma_1^+} \lambda^k e^{i\lambda t} R(\lambda) \hat{g}_+(\lambda) d\lambda$$

obtenue par k dérivations formelles de $u_1^+(t)$, sera p_α -absolument convergente, uniformément en t sur tout compact, pourvu que

$$k - 1 + \frac{\Delta + \delta - t - a}{c} < -1$$

c.-à-d. pour $t > -a' + \delta = -a''$ en posant $a' = a - \Delta - ck$. Les dérivées formelles sont donc effectivement les dérivées de u_1 , et sont continues (puisque la convergence est uniforme) sur $(-a'', \infty)$. On montrerait de même que $u_1^-(t) = \int_{\Gamma_1^-} e^{i\lambda t} R(\lambda) \hat{g}_-(\lambda) d\lambda$ est de classe C^k pour $t < a''$, et que $u_2^+ \in C^k(-a'', \infty)$ ainsi que $u_2^- \in C^k(-\infty, a'')$, c.q.f.d.

L'équation (9) montre maintenant que $u(t)$ est k fois continûment dérivable sur l'intervalle $(-a'', a'')$, et puisque a'' a été choisi arbitrairement entre 0 et a' , nous obtenons finalement $u \in C^k[(-a', a'); Y]$, ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre $N_0(\epsilon) > 0$ tel que $R(\lambda)$ existe, holomorphe, dans le domaine

$$\mathcal{D}_\epsilon = \left\{ \lambda: |\text{Im } \lambda| \leq \frac{\log |\text{Re } \lambda|}{\epsilon} \text{ pour } |\lambda| \geq N_0(\epsilon) \right\}$$

et que la famille d'opérateurs

$$\{ |\lambda| \exp(-\Delta |\text{Im } \lambda|) R(\lambda), \lambda \in \mathcal{D}_\epsilon \}$$

soit équicontinue en λ . Alors toute solution u de classe $C^1[(-a, a); Y]$ de l'équation (1), avec $f \in C^\infty[(-a, a); Y]$, est elle aussi indéfiniment dérivable dans le sous intervalle $|t| < a - \Delta$.

Démonstration. Choisissons k arbitraire entier ≥ 2 . Pour $\epsilon > 0$, il existe $N_0(\epsilon)$ tel que $R(\lambda)$ existe dans le domaine \mathcal{D}_ϵ mentionné et y satisfasse les majorations analogues à (2). En prenant ϵ suffisamment petit, on peut rendre $a_{\epsilon'} = a - \Delta - \epsilon k$ arbitrairement proche de $a' = a - \Delta$. D'après le théorème, on aura $u \in C^k[(-a_{\epsilon'}, a_{\epsilon'}); Y]$, et comme $a_{\epsilon'}$ est arbitrairement proche de a' , on a $u \in C^k[(-a', a'); Y]$, c.q.f.d.

Remarques. (i) On peut également généraliser le théorème d'Agmon-Nirenberg sur l'analyticité des solutions u au cas de fonctions à valeurs dans un espace localement convexe.

(ii) Nous nous sommes appuyés, dans cette étude, sur un certain nombre de généralisations de théorème classiques au cas d'espaces localement convexes; un certain nombre d'entre elles se trouvent dans [3; 4; 5]. D'autres ont été présentées dans [2], notamment le théorème de Lebesgue sous la forme suivante:

Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions Y -valuées Bochner-intégrables qui converge en mesure (ou presque partout) vers une fonction f , et si g est une fonction Y -valuée Bochner-intégrable telle que pour toute semi-norme p_α on ait $p_\alpha f_n < p_\alpha g$ ($n = 1, 2, \dots$), alors f est Bochner-intégrable et $\{f_n\}$ converge en moyenne vers f ; en particulier, $\int f_n \rightarrow \int f$ dans la topologie de Y .

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Agmon et L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space*, Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 121-239.
2. P. Arminjon, *Quelques aspects de la théorie des équations différentielles opérationnelles*, Thèse, Université de Montréal, Montréal, Québec, 1968.
3. N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, Fasc. XXV, première partie, Livre VI: *Intégration*, Chapitre 6: *Intégration vectorielle*, Actualités Sci. Indust., No. 1281 (Hermann, Paris, 1959).
4. N. Dunford et J. T. Schwartz, *Linear operators*, Vol. I (Interscience, New York, 1958).
5. R. E. Edwards, *Functional analysis* (Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1965).
6. L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 116 (Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin, 1963).
7. G. Köthe, *Topologische lineare Räume*. I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 107 (Springer-Verlag, Berlin, 1960).

*Université de Montréal,
Montréal, Québec*