SUR LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS. III

J. DIXMIER

Dans un article antérieur **(3)**, j'ai donné quelques théorèmes généraux sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents simplement connexes. On va, dans le présent article, construire explicitement les représentations unitaires irréductibles et la formule de Plancherel des groupes de Lie nilpotents simplement connexes de dimension $\leqslant 5$.

Au § 1, on construit les algèbres de Lie nilpotentes (sur un corps quelconque) de dimension $\leqslant 5$. Ce travail a été fait indépendamment (mais non publié) par C. Chevalley. Différents auteurs se sont occupés depuis longtemps de cette classification (cf. par exemple **(7)**), mais je n'ai trouvé nulle part les tables de multiplication explicites.[1]

Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on désignera par $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, par $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Au § 2, on détermine $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ pour toutes les algèbres de Lie construites au § 1. On trouve, dans tous ces cas, que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de type fini (ce qu'on ignore en général); on constate même que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de polynômes, à l'exception d'un cas (il s'agit de l'algèbre notée plus loin $\mathfrak{g}_{5,5}$).

On peut alors déterminer l'ensemble Λ des caractères hermitiens de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ pour les algèbres $\mathfrak{g}$ du § 1. Il s'identifie à une variété algébrique affine réelle Ω birationnellement équivalente à un espace affine (en fait, sauf dans le cas de $\mathfrak{g}_{5,5}$, Ω est même un espace affine). D'après la théorie générale de **(3)**, les représentations unitaires irréductibles du groupe simplement connexe correspondant sont paramétrées "en général" par les points de Ω. L'étude détaillée est faite du § 4 au § 11, et montre qu'il existe effectivement des caractères hermitiens ne correspondant à aucune représentation unitaire irréductible, des caractères hermitiens correspondant à un nombre fini > 1 de représentations unitaires irréductibles, et des caractères hermitiens correspondant à une infinité de représentations unitaires irréductibles. On constate, dans les cas étudiés, que les représentations "exceptionnelles" sont des représentations triviales sur certains sous-groupes de dimension $\geqslant 1$, et peuvent donc être considérées comme des représentations d'un groupe de dimension strictement plus petite; ceci permet de paramétrer *toutes* les représentations unitaires irréductibles, par récurrence sur la dimension du groupe. Malheureusement,

Reçu le 28 novembre, 1957.

[1]Je n'ai pu consulter la thèse de K. A. Umlauf (Ueber die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen, insbesondere der Gruppen vom Range Null, Leipzig, 1891), citée dans la thèse de E. Cartan.

ce fait n'est pas général, comme le montre l'exemple d'un groupe nilpotent de dimension 7 étudié au § 12. Toutefois, on peut espérer que la situation pour un groupe nilpotent simplement connexe Γ quelconque d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ serait la suivante:

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de type fini; l'ensemble Λ des caractères hermitiens de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ s'identifie à une variété algébrique affine Ω birationnellement équivalente à un espace affine; l'ensemble Ω' des points de Ω correspondant à une représentation unitaire irréductible et à une seule (à une équivalence près) de Γ est une partie non vide Ω' de Ω, ouverte pour la topologie de Zariski. Les points de $\Omega - \Omega'$ correspondent aux caractères de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ nuls sur certains ideaux premiers $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$; soit $\mathfrak{a}'$ l'idéal (bilatère) de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{a}$; alors, les représentations unitaires irréductibles de Γ dont le caractère s'annule sur $\mathfrak{a}$ sont scalaires sur le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}$; et ces représentations unitaires se paramètrent "en général" à l'aide des caractères de ce centre; il y a à nouveau des exceptions, mais, de proche en proche, on est ramené au bout d'un nombre fini de pas à une famille de représentations unitaires irréductibles sans sous-famille exceptionnelle.

L'exemple de $\mathfrak{g}_{5,5}$ montre d'ailleurs que Ω' n'est peut-être pas le sous-ensemble le plus intéressant de Ω: dans ce cas, en effet, la forme différentielle rationnelle qui intervient dans la formule de Plancherel n'est régulière que sur une partie de Ω'.

Au § 13, on montre que, pour un groupe de Lie nilpotent non simplement connexe, la formule de Plancherel doit faire intervenir les représentations unitaires irréductibles exceptionnelles.

On désignera par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes, par $L_{\mathbf{C}}^p(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions complexes sur $\mathbf{R}^n$ de puissance p-ième intégrable pour la mesure de Lebesgue, par $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions complexes sur $\mathbf{R}^n$ indéfiniment différentiables à décroissance rapide, par D_i l'opérateur de dérivation par rapport à la $i$ème variable dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, par M_i l'opérateur de multiplication par la $i$ème variable dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Sur un groupe localement compact dont l'élément générique est noté γ, $d\gamma$ désignera une mesure de Haar quelconque.

1. Algèbres de Lie nilpotentes de dimension $\leqslant 5$. Soit K un corps commutatif. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les tables de multiplication ci-dessous définissent bien des algèbres de Lie nilpotentes sur K. (Dans ces tables, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ désigne une base d'une algèbre de Lie de dimension n; on donne le crochet $[x_i, x_j]$ seulement pour $i < j$ et seulement si ce crochet est $\neq 0$.)

Dimension 3:

$\mathfrak{g}_3 : [x_1, x_2] = x_3.$

Dimension 4:

$\mathfrak{g}_4 : [x_1, x_2] = x_3, \qquad [x_1, x_3] = x_4.$

Dimension 5:

$\mathfrak{g}_{5,1} : [x_1, x_2] = x_5, \quad [x_3, x_4] = x_5.$
$\mathfrak{g}_{5,2} : [x_1, x_2] = x_4, \quad [x_1, x_3] = x_5.$
$\mathfrak{g}_{5,3} : [x_1, x_2] = x_4, \quad [x_1, x_4] = x_5, \quad [x_2, x_3] = x_5.$
$\mathfrak{g}_{5,4} : [x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = x_4, \quad [x_2, x_3] = x_5.$
$\mathfrak{g}_{5,5} : [x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = x_4, \quad [x_1, x_4] = x_5.$
$\mathfrak{g}_{5,6} : [x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = x_4, \quad [x_1, x_4] = x_5, \quad [x_2, x_3] = x_5.$

Notons d'autre part $\mathfrak{g}_1$ l'unique algèbre de Lie de dimension 1 sur K. Alors:

PROPOSITION 1. *Toute algèbre de Lie nilpotente sur K de dimension $\leqslant 5$ est isomorphe à l'une des algèbres du tableau suivant:*
Dimension 1: $\mathfrak{g}_1$.
Dimension 2: $(\mathfrak{g}_1)^2$.
Dimension 3: $(\mathfrak{g}_1)^3$, $\mathfrak{g}_3$.
Dimension 4: $(\mathfrak{g}_1)^4$, $\mathfrak{g}_3 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_4$.
Dimension 5: $(\mathfrak{g}_1)^5$, $\mathfrak{g}_3 \times (\mathfrak{g}_1)^2$, $\mathfrak{g}_4 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_{5,1}$, $\mathfrak{g}_{5,2}$, $\mathfrak{g}_{5,3}$, $\mathfrak{g}_{5,4}$, $\mathfrak{g}_{5,5}$, $\mathfrak{g}_{5,6}$.
Les algèbres de ce tableau sont deux à deux non isomorphes.

Démonstration. Montrons d'abord que ces algèbres sont deux à deux non isomorphes. Ceci est évident pour les dimensions 1, 2, 3. Les centres de $(\mathfrak{g}_1)^4$, $\mathfrak{g}_3 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_4$ sont respectivement de dimensions 4, 2, 1, donc ces algèbres sont deux à deux non isomorphes. Pour les algèbres de dimension 5, les dimensions des idéaux de la série centrale descendante et de la série centrale ascendante sont données par le tableau suivant:

$(\mathfrak{g}_1)^5$:	0	5
$\mathfrak{g}_3 \times (\mathfrak{g}_1)^2$:	1, 0	3, 5
$\mathfrak{g}_4 \times \mathfrak{g}_1$:	2, 1, 0	2, 3, 5
$\mathfrak{g}_{5,1}$:	1, 0	1, 5
$\mathfrak{g}_{5,2}$:	2, 0	2, 5
$\mathfrak{g}_{5,3}$:	2, 1, 0	1, 3, 5
$\mathfrak{g}_{5,4}$:	3, 2, 0	2, 3, 5
$\mathfrak{g}_{5,5}$:	3, 2, 1, 0	1, 2, 3, 5
$\mathfrak{g}_{5,6}$:	3, 2, 1, 0	1, 2, 3, 5.

On voit que ces algèbres sont deux à deux non isomorphes, à l'exception peut-être de $\mathfrak{g}_{5,5}$ et $\mathfrak{g}_{5,6}$. Mais l'annulateur de $[\mathfrak{g}_{5,5}, \mathfrak{g}_{5,5}]$ dans $\mathfrak{g}_{5,5}$ est de dimension 4, tandis que l'annulateur de $[\mathfrak{g}_{5,6}, \mathfrak{g}_{5,6}]$ dans $\mathfrak{g}_{5,6}$ est de dimension 3; donc $\mathfrak{g}_{5,5}$ et $\mathfrak{g}_{5,6}$ sont non isomorphes.

Montrons maintenant qu'on a bien obtenu toutes les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $\leqslant 5$. Posons, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $D^1\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $D^2\mathfrak{g} = [D^1\mathfrak{g}, D^1\mathfrak{g}]$. Alors, si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, on a dim $\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g} \geqslant 2$, dim $D^1\mathfrak{g}/D^2\mathfrak{g} \geqslant 3$ (cf. **2**). Ceci posé, la classification est évidente pour les dimensions 0, 1, 2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension 3 sur K. La dimension de $D^1\mathfrak{g}$ est 0 ou 1. Si dim $D^1\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $(\mathfrak{g}_1)^3$; si dim $D^1\mathfrak{g} = 1$, $D^1\mathfrak{g}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$; prenant x_1 et x_2 dans $\mathfrak{g}$ linéairement indépendants modulo $D^1\mathfrak{g}$, $[x_1, x_2] = x_3$ engendre $D^1\mathfrak{g}$, et (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_3$. Soit maintenant $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension 4 sur K. La dimension de $D^1\mathfrak{g}$ est 0, 1 ou 2. Si dim $D^1\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $(\mathfrak{g}_1)^4$. Supposons dim $D^1\mathfrak{g} = 1$. Alors, $\mathfrak{g}$ est extension centrale de l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$, qui est de dimension 3, par $D^1\mathfrak{g}$; comme une forme bilinéaire alternée sur un espace de dimension 3 est dégénérée, on voit qu'il existe un sous-espace $\mathfrak{h}$ de dimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$, avec $\mathfrak{h} \cap D^1\mathfrak{g} = \{0\}$; soit $\mathfrak{h}'$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ de dimension 3 contenant $D^1\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g}$ soit somme directe de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$; alors $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont des idéaux, donc $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}'$, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, à $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_3$. Supposons maintenant dim $D^1\mathfrak{g} = 2$; alors $D^1\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne; il existe une base de $D^1\mathfrak{g}$ telle que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_{D^1\mathfrak{g}}x$ admette une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda(x) & 0 \end{pmatrix};$$

et λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ nulle sur $D^1\mathfrak{g}$; soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathfrak{g}$, contenant $D^1\mathfrak{g}$, contenu dans le noyau de λ; alors $\mathfrak{h}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$; soit x_1 un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{h}$; soit $u = \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}x_1$; on a $D^1\mathfrak{g} = u(\mathfrak{h})$, et u est nilpotent; utilisant pour u la forme réduite de Jordan, on voit que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_4$.

Il nous reste à classer les algèbres de Lie nilpotentes de dimension 5. Si $\mathfrak{g}$ est une telle algèbre, $D^1\mathfrak{g}$ est de dimension 0, 1, 2, ou 3, et $D^1\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne. Si dim $D^1\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $(\mathfrak{g}_1)^5$. Si dim $D^1\mathfrak{g} = 1$, $D^1\mathfrak{g}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$ et le crochet dans $\mathfrak{g}$ définit une forme bilinéaire alternée non nulle sur $\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$; suivant que cette forme est dégénérée ou non, $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_3 \times (\mathfrak{g}_1)^2$ ou à $\mathfrak{g}_{5,1}$. Supposons dim $D^1\mathfrak{g} = 2$, et soit $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Nous distinguerons trois cas:

(a) $D^1\mathfrak{g} \subset \mathfrak{c}$. Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$, qui est une algèbre de Lie abélienne de dimension 3. Le crochet dans $\mathfrak{g}$ définit une application bilinéaire alternée de $\mathfrak{h}$ dans $D^1\mathfrak{g}$, donc, après choix d'une base de $D^1\mathfrak{g}$, deux formes bilinéaires alternées f_1, f_2 sur $\mathfrak{h}$. Comme dim $\mathfrak{h} = 3$, il existe $x \in \mathfrak{h}$ tel que $f_1(x, y) = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{h}$. On peut choisir y non proportionnel à x de façon que $f_2(x, y) = 0$. Soit $z \in \mathfrak{h}$, tel que x, y, z forment une base de $\mathfrak{h}$. Soient x', y', z' des représentants de x, y, z dans $\mathfrak{g}$. On a $[x', y'] = 0$, et $[x', z']$, $[y', z']$ engendrent $D^1\mathfrak{g}$. On voit alors que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_{5,2}$.

(b) $D^1\mathfrak{g} \not\subset \mathfrak{c}$, $\mathfrak{c} \not\subset D^1\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace de dimension 1 de $\mathfrak{c}$ non contenu dans $D^1\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}'$ un sous-espace de dimension 4 de $\mathfrak{g}$ contenant $D^1\mathfrak{g}$ mais non $\mathfrak{h}$. Alors, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont deux idéaux de somme directe $\mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}'$. On a $D^1\mathfrak{h} = D^1\mathfrak{g}$, donc, d'après ce qu'on a vu plus haut, $\mathfrak{h}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_4$. Donc $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_4 \times \mathfrak{g}_1$.

(c) $\mathfrak{c} \subset D^1\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c} \neq D^1\mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{c}$ est de dimension 1. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, de dimension 4, est telle que $D^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{c}) = (D^1\mathfrak{g})/\mathfrak{c}$ soit de dimension 1, donc est isomorphe à $\mathfrak{g}_3 \times \mathfrak{g}_1$ d'après ce qu'on a vu plus haut. Il existe une base (y_1, y_2, y_3, y_4) de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ telle que

$$[y_1, y_2] = y_3, \; [y_1, y_3] = [y_1, y_4] = [y_2, y_3] = [y_2, y_4] = [y_3, y_4] = 0.$$

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 des représentants de y_1, y_2, y_3, y_4 dans $\mathfrak{g}$, et x_5 un élément non nul de $\mathfrak{c}$. En choisissant convenablement x_3, on a

$$[x_1, x_2] = x_3, \; [x_1, x_3] = \lambda x_5, \; [x_1, x_4] = \mu x_5,$$
$$[x_2, x_3] = \nu x_5, \; [x_2, x_4] = \rho x_5, \; [x_3, x_4] = \sigma x_5.$$

L'égalité

$$[[x_1, x_2], x_4] + [[x_2, x_4], x_1] + [[x_4, x_1], x_2] = 0$$

donne $\sigma = 0$. Comme $x_3 \notin \mathfrak{c}$, on a $\lambda \neq 0$ ou $\nu \neq 0$. Echangeant au besoin x_1 et x_2, on peut supposer $\lambda \neq 0$. Remplaçant x_2 par $x_2 - (\nu/\lambda)x_1$, on peut supposer $\nu = 0$. Remplaçant x_4 par $x_4 - (\mu/\lambda)x_3$, on peut supposer $\mu = 0$. Comme $x_4 \notin \mathfrak{c}$, on a $\rho \neq 0$. Multipliant x_4 et x_5 par des scalaires, on peut supposer $\lambda = \rho = 1$. On a alors la table de multiplication de $\mathfrak{g}_{5,3}$, à l'échange près de x_3 et x_4.

Enfin, $\mathfrak{g}$ étant toujours une algèbre de Lie nilpotente de dimension 5, supposons $\dim D^1\mathfrak{g} = 3$. Soit $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$. On a $\mathfrak{c} \subset D^1\mathfrak{g}$; sinon, d'après un raisonnement déjà fait, $\mathfrak{g}$ serait isomorphe au produit d'une algèbre de dimension 1 et d'une algèbre de dimension 4, et on aurait $\dim D^1\mathfrak{g} \leqslant 2$. On a $\mathfrak{c} \neq D^1\mathfrak{g}$, car, si on avait $[\mathfrak{g}, D^1\mathfrak{g}] = 0$, on aurait $\dim D^1\mathfrak{g} \leqslant 1$. Donc $\mathfrak{c}$ est de dimension 1 ou 2.

(a) Supposons $\dim \mathfrak{c} = 2$. Alors, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_3$. Il existe donc des éléments x_1, x_2, x_3 de $\mathfrak{g}$, linéairement indépendants modulo $\mathfrak{c}$, tels que

$$[x_1, x_2] = x_3, \qquad [x_1, x_3] \in \mathfrak{c}, \qquad [x_2, x_3] \in \mathfrak{c}.$$

Comme $\dim D^1\mathfrak{g} = 3$, $[x_1, x_3] = x_4$ et $[x_2, x_3] = x_5$ doivent former une base de $\mathfrak{c}$. On voit donc que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_{5,4}$.

(b) Supposons $\dim \mathfrak{c} = 1$. Alors, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_4$, donc $\mathfrak{g}$ est extension centrale de $\mathfrak{g}_4$ par $\mathfrak{g}_1$. Cette extension est définie par un cocycle f, forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}_4$. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c} = \mathfrak{g}_4$ pour laquelle la table de multiplication est celle indiquée plus haut. Ecrivant que f est un cocycle, on obtient $f(e_2, e_4) = f(e_3, e_4) = 0$. En ajoutant à f un cobord, on peut supposer que $f(e_1, e_2) = f(e_1, e_3) = 0$. La table de multiplication de $\mathfrak{g}$ est alors (x_5 désignant un élément non nul de $\mathfrak{c}$ et x_1, x_2, x_3, x_4 des représentants de e_1, e_2, e_3, e_4 dans $\mathfrak{g}$):

$$[x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = x_4, \quad [x_1, x_4] = \lambda x_5,$$
$$[x_2, x_3] = \mu x_5, \quad [x_2, x_4] = 0, \quad [x_3, x_4] = 0.$$

Comme $x_4 \notin \mathfrak{c}$, on a $\lambda \neq 0$. Remplaçant x_5 par $\lambda^{-1}x_5$, on peut supposer $\lambda = 1$. Si $\mu = 0$, $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_{5,5}$. Supposons désormais $\mu \neq 0$. Remplaçant x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 par $x_1, \mu^{-1}x_2, \mu^{-1}x_3, \mu^{-1}x_4, \mu^{-1}x_5$, on voit qu'on peut supposer $\mu = 1$. Alors, $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_{5,6}$. Ceci achève de prouver la proposition 1.

2. Centre de l'algèbre enveloppante pour les algèbres de Lie précédentes. Nous allons chercher $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ pour les algèbres de la proposition 1. Comme $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}') = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}')$, il suffit de le faire pour $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_{5,1}$, $\mathfrak{g}_{5,2}$, $\mathfrak{g}_{5,3}$, $\mathfrak{g}_{5,4}$, $\mathfrak{g}_{5,5}$, $\mathfrak{g}_{5,6}$.

PROPOSITION 2. *Supposons K de caractéristique* 0. *Utilisant les mêmes tables de multiplication qu'au* § 1, *on a le tableau suivant:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_3) &= K[x_3],\\
\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_4) &= K[x_4,\, 2x_2 x_4 - x_3^2],\\
\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,1}) &= K[x_5],\\
\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,2}) &= K[x_4,\, x_5,\, x_2 x_5 - x_3 x_4],\\
\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,3}) &= K[x_5],\\
\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,4}) &= K[x_4,\, x_5,\, 2x_1 x_5 - 2x_2 x_4 + x_3^2],\\
\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5}) &= K[x_5,\, 2x_3 x_5 - x_4^2,\, 3x_2 x_5^2 - 3x_3 x_4 x_5 + x_4^3,\\
&\qquad 9x_2^2 x_5^2 - 18x_2 x_3 x_4 x_5 + 6x_2 x_4^3 + 8x_3^3 x_5 - 3x_3^2 x_4^2],\\
\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,6}) &= K[x_5].
\end{aligned}$$

A l'exception de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5})$, ces algèbres sont des algèbres de polynômes dont le tableau précédent donne des générateurs algébriquement indépendants. L'algèbre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5})$ n'est pas une algèbre de polynômes.

Démonstration. Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, nous désignerons par $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, dans laquelle $\mathfrak{g}$ opère par des dérivations prolongeant les opérateurs de la représentation adjointe. Nous noterons $\mathfrak{I}(\mathfrak{g})$ la sous-algèbre de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g})$ formée des éléments annulés par $\mathfrak{g}$. Les éléments de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_3)$ sont les éléments f de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_3)$ satisfaisant aux équations suivantes:

$$[x_1, x_2]f'_{x_2} + [x_1, x_3]f'_{x_3} = [x_2, x_1]f'_{x_1} + [x_2, x_3]f'_{x_3} = [x_3, x_1]f'_{x_1} + [x_3, x_2]f'_{x_2} = 0,$$

qui se réduisent à

$$f'_{x_1} = f'_{x_2} = 0.$$

Donc $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_3) = K[x_3]$. L'application canonique de $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_3)$ sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_3)$ est ici un isomorphisme, et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_3) = K[x_3]$.

Pour $\mathfrak{I}(\mathfrak{g}_4)$, nous avons le système d'équations

$$x_3 f'_{x_2} + x_4 f'_{x_3} = -x_3 f'_{x_1} = -x_4 f'_{x_1} = 0.$$

Il est clair que $x_4 \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_4)$ et que $2x_2x_4 - x_3^2 \in \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_4)$. Soient $\mathfrak{h}_1 = Kx_4$, $\mathfrak{h}_2 = Kx_4 + Kx_3$, $\mathfrak{h}_3 = Kx_4 + Kx_3 + Kx_2$, qui forment une suite croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}_4$. Les équations précédentes montrent facilement que

$$0 \neq \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_4) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_4) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_2) \neq \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_4) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_3) = \mathfrak{I}(\mathfrak{g}_4).$$

Appliquons le lemme 3 de **(3)**, où on considère $\mathfrak{g}$ comme l'algèbre de Lie abélienne sous-jacente à $\mathfrak{g}_4$, munie de l'algèbre de Lie des dérivations intérieures de $\mathfrak{g}_4$. On voit que x_4 et $2x_2x_4 - x_3^2$ sont des éléments algébriquement indépendants engendrant le corps des fractions de $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_4)$, et que

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_4) \subset K[x_4, 2x_2 x_4 - x_3^2, x_4^{-1}].$$

Soit $f \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_4)$. On a donc

$$f = x_4^{-s}[x_4^r g_r + x_4^{r-1} g_{r-1} + \ldots + g_0]$$

où $g_r, g_{r-1}, \ldots, g_0 \in K[2x_2 x_4 - x_3^2]$. Si $s > 0$, g_0 est divisible par x_4. Considérant dans g_0 les termes en x_3, on en conclut que $g_0 = 0$. Donc

$$f = x_4^{-s+1}[x_4^{r-1} g_r + x_4^{r-2} g_{r-1} + \ldots + g_1].$$

Recommençant le raisonnement de proche en proche, on arrive au cas où $s = 0$, ce qui prouve que

$$f \in K[x_4, 2x_2 x_4 - x_3^2].$$

Donc $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_4) = K[x_4, 2x_2 x_4 - x_3^2]$. Comme $\mathfrak{h}_3$ est abélien, l'application canonique de $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_4)$ sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_4)$ est un isomorphisme, et $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_4) = K[x_4, 2x_2 x_4 - x_3^2]$.

Pour $\mathfrak{g}_{5,1}$, $\mathfrak{g}_{5,3}$, $\mathfrak{g}_{5,6}$, nous avons les systèmes d'équations

$$x_5 f'_{x_2} = - x_5 f'_{x_1} = x_5 f'_{x_4} = - x_5 f'_{x_3} = 0,$$
$$x_4 f'_{x_2} + x_5 f'_{x_4} = - x_4 f'_{x_1} + x_5 f'_{x_3} = - x_5 f'_{x_2} = - x_5 f'_{x_1} = 0,$$
$$x_3 f'_{x_2} + x_4 f'_{x_3} + x_5 f'_{x_4} = - x_3 f'_{x_1} + x_5 f'_{x_3} = - x_4 f'_{x_1} - x_5 f'_{x_2} = - x_5 f'_{x_1} = 0,$$

qui donnent dans les trois cas $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}) = K[x_5]$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = K[x_5]$.

Pour $\mathfrak{g}_{5,2}$, on a le système

$$x_4 f'_{x_2} + x_5 f'_{x_3} = - x_4 f'_{x_1} = - x_5 f'_{x_1} = 0.$$

Il est clair que $x_4 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2})$, $x_5 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2})$, $x_2 x_5 - x_3 x_4 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2})$. Soient $\mathfrak{h}_1 = Kx_5$, $\mathfrak{h}_2 = Kx_5 + Kx_4$, $\mathfrak{h}_3 = Kx_5 + Kx_4 + Kx_3$, $\mathfrak{h}_4 = Kx_5 + Kx_4 + Kx_3 + Kx_2$, qui forment une suite croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}_{5,2}$. On a

$$\begin{aligned} 0 \neq \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_1) \neq \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_2) &= \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_3) \\ &\neq \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_4) = \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2}). \end{aligned}$$

Raisonnant comme pour $\mathfrak{g}_4$, on voit que $x_5, x_4, x_2x_5 - x_3x_4$ sont des générateurs algébriquement indépendants du corps des fractions de $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2})$, et que

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2}) \subset K[x_4, x_5, x_2 x_5 - x_3 x_4, x_5^{-1}];$$

on voit ensuite qu'en fait $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2}) = K[x_4, x_5, x_2x_5 - x_3x_4]$. Comme $\mathfrak{h}_4$ est abélien, l'application canonique de $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,2})$ sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,2})$ est un isomorphisme, et

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,2}) = K[x_4, x_5, x_2x_5 - x_3x_4].$$

Pour $\mathfrak{g}_{5,4}$, on a le système

$$x_3 f'_{x_2} + x_4 f'_{x_3} = - x_3 f'_{x_1} + x_5 f'_{x_3} = - x_4 f'_{x_1} - x_5 f'_{x_2} = 0.$$

Il est clair que $x_4 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4})$, $x_5 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4})$, $2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4})$. Soient

$$\mathfrak{h}_1 = Kx_5,\ \mathfrak{h}_2 = Kx_5 + Kx_4,\ \mathfrak{h}_3 = Kx_5 + Kx_4 + Kx_3,\ \mathfrak{h}_4 = Kx_5 + Kx_4 \\ Kx_3 + Kx_2,$$

qui forment une suite croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}_{5,4}$. On a

$$0 \neq \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_1) \neq \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_3) \\ = \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_4) \neq \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4}).$$

Les mêmes méthodes que précédemment montrent que $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4}) = K[x_4, x_5, 2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2]$. Les images canoniques dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{5,4})$ de $x_4, x_5, 2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$ (considérés comme éléments de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{5,4})$) sont $x_4, x_5, 2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$ (considérés comme éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{5,4})$). J'ignore si l'application canonique de $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4})$ sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,4})$ est un isomorphisme. Mais nous allons voir cependant que x_4, x_5, $2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$ engendrent $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,4})$, par un raisonnement applicable à toute algèbre de Lie et certainement connu (il m'a été, en tous cas, signalé il y a longtemps par H. Cartan). Soit $a \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,4})$, et montrons que

$$a \in K[x_4, x_5, 2x_1 x_5 - 2x_2 x_4 + x_3^2].$$

Nous supposerons ce point établi pour les éléments de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,4})$ dont la filtration (dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{5,4})$) est strictement inférieure à la filtration n de a. Soit f l'image canonique de a dans $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,4})$. On a

$$f = \Sigma_j \lambda_j x_4^{m_j} x_5^{n_j} (2x_1 x_5 - 2x_2 x_4 + x_3^2)^{p_j}$$

avec $m_j + n_j + p_j \leqslant n$ pour tout j. Donc a est congru, modulo les éléments de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{5,4})$ de filtration $< n$, à

$$\Sigma_j \lambda_j x_4^{m_j} x_5^{n_j} (2x_1 x_5 - 2x_2 x_4 + x_3^2)^{p_j},$$

(calculé dans $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{5,4})$). Alors,

$$a - \Sigma_j \lambda_j x_4^{m_j} x_5^{n_j} (2x_1 x_5 - 2x_2 x_4 + x_3^2)^{p_j}$$

est un élément de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,4})$ qui appartient à $K[x_4, x_5, 2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2]$ d'après l'hypothèse de récurrence. D'où notre assertion. Ainsi,

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,4}) = K[x_4, x_5, 2x_1 x_5 - 2x_2 x_4 + x_3^2],$$

et $x_4, x_5, 2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$ sont algébriquement indépendants d'après le lemme 3 de **(3)**.

Pour $\mathfrak{g}_{5,5}$, on a le système

$$x_3 f'_{x_2} + x_4 f'_{x_3} + x_5 f'_{x_4} = - x_3 f'_{x_1} = - x_4 f'_{x_1} = - x_5 f'_{x_1} = 0.$$

Ce cas est essentiellement traité dans **(8**, p. 244**)**, mais nous allons procéder directement. On vérifie que

$$\begin{aligned} &x_5 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}), \\ &f_1 = 2x_3x_5 - x_4^2 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}), \\ &f_2 = 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}). \end{aligned}$$

Soient $\mathfrak{h}_1 = Kx_5$, $\mathfrak{h}_2 = Kx_5 + Kx_4$, $\mathfrak{h}_3 = Kx_5 + Kx_4 + Kx_3$, $\mathfrak{h}_4 = Kx_5 + Kx_4 + Kx_3 + Kx_2$, qui forment une suite croissante d'idéaux de $\mathfrak{g}_{5,5}$. On a

https://doi.org/10.4153/CJM-1958-033-5 Published online by Cambridge University Press

$$0 \neq \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_2) \neq \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_3) \neq \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}) \cap \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_4) = \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}).$$

Donc x_5, f_1, f_2 sont des générateurs algébriquement indépendants du corps des fractions de $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5})$, et $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}) \subset K[x_5, f_1, f_2, x_5^{-1}]$. Soit

$$f_3 = x_5^{-2}(f_1^3 + f_2^2) = 9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2 \in \mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}).$$

Nous allons montrer que $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}) = K[x_5, f_1, f_2, f_3]$. Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant:

LEMME 1. *Soit P un polynôme à 3 variables X, Y, Z, à coefficients dans K. Si $P(f_1, f_2, f_3)$ est divisible par x_5, $P(X, Y, Z)$ est divisible par $X^3 + Y^2$.*

En effet, soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{5,5})$ engendré par x_5. Identifions canoniquement $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{5,5})/\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{S}(Kx_1 + Kx_2 + Kx_3 + Kx_4)$. Les images canoniques de f_1, f_2, f_3 dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{5,5})/\mathfrak{a}$ sont

$$-x_4^2, x_4^3, 3x_4^2(2x_2x_4 - x_3^2).$$

D'après l'hypothèse du lemme, $P(- x_4^2, x_4^3, 3x_4^2(2x_2x_4 - x_3^2))$ est identiquement nul. Soit

$$P(X, Y, Z) = Z^rP_r(X, Y) + Z^{r-1}P_{r-1}(X, Y) + \ldots + P_0(X, Y).$$

Considérant les termes en x_3, on voit que

$$P_r(- x_4^2, x_4^3), P_{r-1}(- x_4^2, x_4^3), \ldots , P_0(- x_4^2, x_4^3)$$

sont identiquement nuls. Donc $P_r(X, Y), \ldots , P_0(X, Y)$ s'annulent sur la courbe d'équation $X^3 + Y^2 = 0$ (dans une clôture algébrique de K), et par suite sont divisibles par $X^3 + Y^2$. Donc $P(X, Y, Z)$ est divisible par $X^3 + Y^2$.

Revenons à la situation qui précéde le lemme 1. Nous allons montrer que si un élément de $K[x_5, f_1, f_2, f_3]$ est divisible par x_5^s (s entier $\geqslant 0$), son quotient f par x_5^s appartient à $K[x_5, f_1, f_2, f_3]$. Ecrivons en effet

$$f = x_5^{-s}[x_5^r g_r + x_5^{r-1}g_{r-1} + \ldots + g_0]$$

où $g_r, g_{r-1}, \ldots , g_0$ appartiennent à $K[f_1, f_2, f_3]$. Si $s > 0$, g_0 est divisible par x_5. D'après le lemme 1, $g_0 = (f_1^3 + f_2^2)g_0' = x_5^2f_3g_0'$, avec $g_0' \in K[f_1, f_2, f_3]$. Donc

$$f = x_5^{-s+1}[x_5^{r-1}g_r + x_5^{r-2}g_{r-1} + \ldots + x_5(g_2 + f_3g_0') + g_1].$$

Recommençant le raisonnement de proche en proche, on arrive au cas où $s = 0$, ce qui prouve que

$$f \in K[x_5, f_1, f_2, f_3].$$

En particulier, tout élément de $K[x_5, f_1, f_2, x_5^{-1}]$ qui est un polynôme, donc tout élément de $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5})$, appartient à $K[x_5, f_1, f_2, f_3]$. Donc $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5}) = K[x_5, f_1, f_2, f_3]$. Comme $\mathfrak{h}_4$ est abélien, l'application canonique de $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}_{5,5})$ sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5})$ est un isomorphisme, et on a

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5}) = K[x_5, 2x_3x_5 - x_4^2, 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3, 9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2].$$

Enfin, $K[x_5, f_1, f_2]$ et son corps des fractions sont respectivement isomorphes à $K[X, Y, Z]$ et $K(X, Y, Z)$ (X, Y, Z désignant des indéterminées). Comme $f_3 = x_5^{-2}(f_1^3 + f_2^2)$, on voit que $\mathfrak{Y}(\mathfrak{g}_{5,5})$ est isomorphe à $K[X, Y, Z, X^{-2}(Y^3 + Z^2)]$, c'est-à-dire à l'anneau des fonctions régulières sur la variété d'équation $TX^2 = Y^3 + Z^2$ dans l'espace affine K^1. Or cette variété n'est pas birégulièrement isomorphe à un espace affine puisqu'elle possède un point singulier à l'origine. Donc $\mathfrak{Y}(\mathfrak{g}_{5,5})$, et par suite $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5})$, ne sont pas isomorphes à des algèbres de polynômes.

3. Groupes de Lie nilpotents simplement connexes de dimension $\leqslant 5$. Supposons désormais $K = \mathbf{R}$, et cherchons les groupes de Lie (réels) nilpotents simplement connexes de dimension $\leqslant 5$. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}''$, et si Γ, Γ', Γ'' sont les groupes de Lie simplement connexes correspondant à $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$, on a $\Gamma = \Gamma' \times \Gamma''$. Il nous suffit donc de chercher les groupes $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_{5,1}, \ldots, \Gamma_{5,6}$ correspondant à $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_{5,1}, \ldots, \mathfrak{g}_{5,6}$. Il est clair que Γ_1 est isomorphe à $\mathbf{R}$.

Pour construire Γ_3, nous cherchons d'abord des formes différentielles linéairement indépendantes ω_1, ω_2, ω_3 de degré 1, à 3 variables ρ_1, ρ_2, ρ_3, vérifiant les équations de Maurer-Cartan qui sont ici

$$d\omega_1 = 0, \qquad d\omega_2 = 0, \qquad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2.$$

On peut prendre $\omega_1 = d\rho_1$, $\omega_2 = d\rho_2$, $\omega_3 = \rho_1 d\rho_2 + d\rho_3$. La loi de groupe s'obtient alors en intégrant les équations $d\rho_1' = d\rho_1$, $d\rho_2' = d\rho_2$, $\rho_1' d\rho_2' + d\rho_3' = \rho_1 d\rho_2 + d\rho_3$, d'où facilement

$$\rho_1' = \rho_1 + \sigma_1, \qquad \rho_2' = \rho_2 + \sigma_2, \qquad \rho_3' = \rho_3 + \sigma_3 - \rho_2\sigma_1.$$

Donc

(1) $$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \,.\, (\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (\rho_1 + \sigma_1,\ \rho_2 + \sigma_2,\ \rho_3 + \sigma_3 - \rho_2\sigma_1).$$

Les calculs étant purement mécaniques, nous nous contentons de les résumer pour les autres groupes.

Cas de Γ_4.

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_4 = \omega_1 \wedge \omega_3,$$
$$\omega_1 = d\rho_1, \quad \omega_2 = d\rho_2, \quad \omega_3 = \rho_1 d\rho_2 + d\rho_3, \quad \omega_4 = \tfrac{1}{2}\rho_1^2 d\rho_2 + \rho_1 d\rho_3 + d\rho_4,$$

(2) $$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \,.\, (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = (\rho_1 + \sigma_1, \rho_2 + \sigma_2, \rho_3 + \sigma_3 - \rho_2\sigma_1, \rho_4 + \sigma_4 - \rho_3\sigma_1 + \tfrac{1}{2}\rho_2\sigma_1^2).$$

Cas de $\Gamma_{5,1}$.

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0, \quad d\omega_3 = 0, \quad d\omega_4 = 0,$$
$$d\omega_5 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4,$$
$$\omega_1 = d\rho_1, \quad \omega_2 = d\rho_2, \quad \omega_3 = d\rho_3, \quad \omega_4 = d\rho_4, \quad \omega_5 = \rho_1 d\rho_2 + \rho_3 d\rho_4 + d\rho_5$$

(3) $$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \,.\, (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5) = (\rho_1 + \sigma_1,\ \rho_2 + \sigma_2,\ \rho_3 + \sigma_3,\ \rho_4 + \sigma_4,\ \rho_5 + \sigma_5 - \rho_2\sigma_1 - \rho_4\sigma_3).$$

Cas de $\Gamma_{5,2}$.

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0, \quad d\omega_3 = 0, \quad d\omega_4 = \omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_5 = \omega_1 \wedge \omega_3,$$
$$\omega_1 = d\rho_1, \quad \omega_2 = d\rho_2, \quad \omega_3 = d\rho_3, \quad \omega_4 = \rho_1 d\rho_2 + d\rho_4, \quad \omega_5 = \rho_1 d\rho_3 + d\rho_5,$$

(4) $$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \,.\, (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5) = (\rho_1 + \sigma_1,\ \rho_2 + \sigma_2,\ \rho_3 + \sigma_3,\ \rho_4 + \sigma_4 - \rho_2\sigma_1,\ \rho_5 + \sigma_5 - \rho_3\sigma_1).$$

Cas de $\Gamma_{5,3}$.

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0, \quad d\omega_3 = 0, \quad d\omega_4 = \omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_5 = \omega_1 \wedge \omega_4 + \omega_2 \wedge \omega_3,$$
$$\omega_1 = d\rho_1, \quad \omega_2 = d\rho_2, \quad \omega_3 = d\rho_3, \quad \omega_4 = \rho_1 d\rho_2 + d\rho_4,$$
$$\omega_5 = \rho_2 d\rho_3 + \rho_1 d\rho_4 + \tfrac{1}{2}\rho_1^2 d\rho_2 + d\rho_5,$$
$$(5) \quad \begin{aligned}&(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \,.\, (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)\\ &\quad = (\rho_1 + \sigma_1, \rho_2 + \sigma_2, \rho_3 + \sigma_3, \rho_4 + \sigma_4 - \rho_2\sigma_1, \rho_5 + \sigma_5 - \rho_3\sigma_2 - \rho_4\sigma_1\\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\rho_2\sigma_1^2).\end{aligned}$$

Cas de $\Gamma_{5,4}$.

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_4 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_5 = \omega_2 \wedge \omega_3,$$
$$\omega_1 = d\rho_1, \quad \omega_2 = d\rho_2, \quad \omega_3 = \rho_1 d\rho_2 + d\rho_3, \quad \omega_4 = \tfrac{1}{2}\rho_1^2 d\rho_2 + \rho_1 d\rho_3 + d\rho_4,$$
$$\omega_5 = \rho_2 d\rho_3 + d\rho_5,$$
$$(6) \quad \begin{aligned}&(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \,.\, (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)\\ &= (\rho_1 + \sigma_1, \rho_2 + \sigma_2, \rho_3 + \sigma_3 - \rho_2\sigma_1, \rho_4 + \sigma_4 - \rho_3\sigma_1 + \tfrac{1}{2}\rho_2\sigma_1^2, \rho_5 + \sigma_5\\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\rho_2^2\sigma_1 - \rho_3\sigma_2 + \rho_2\sigma_1\sigma_2).\end{aligned}$$

Cas de $\Gamma_{5,5}$.

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_4 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_5 = \omega_1 \wedge \omega_4,$$
$$\omega_1 = d\rho_1, \quad \omega_2 = d\rho_2, \quad \omega_3 = \rho_1 d\rho_2 + d\rho_3, \quad \omega_4 = \tfrac{1}{2}\rho_1^2 d\rho_2 + \rho_1 d\rho_3 + d\rho_4,$$
$$\omega_5 = \tfrac{1}{6}\rho_1^3 d\rho_2 + \tfrac{1}{2}\rho_1^2 d\rho_3 + \rho_1 d\rho_4 + d\rho_5,$$
$$(7) \quad \begin{aligned}&(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \,.\, (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)\\ &= (\rho_1 + \sigma_1, \rho_2 + \sigma_2, \rho_3 + \sigma_3 - \rho_2\sigma_1, \rho_4 + \sigma_4 + \tfrac{1}{2}\rho_2\sigma_1^2 - \rho_3\sigma_1,\\ &\qquad \rho_5 + \sigma_5 - \tfrac{1}{6}\rho_2\sigma_1^3 + \tfrac{1}{2}\rho_3\sigma_1^2 - \rho_4\sigma_1).\end{aligned}$$

Cas de $\Gamma_{5,6}$.

$$d\omega_1 = 0, \; d\omega_2 = 0, \; d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2, \; d\omega_4 = \omega_1 \wedge \omega_3, \; d\omega_5 = \omega_1 \wedge \omega_4 + \omega_2 \wedge \omega_3.$$
$$\omega_1 = d\rho_1, \quad \omega_2 = d\rho_2, \quad \omega_3 = \rho_1 d\rho_2 + d\rho_3, \quad \omega_4 = \tfrac{1}{2}\rho_1^2 d\rho_2 + \rho_1 d\rho_3 + d\rho_4,$$
$$\omega_5 = \tfrac{1}{6}\rho_1^3 d\rho_2 + \tfrac{1}{2}\rho_1^2 d\rho_3 + \rho_1 d\rho_4 + \rho_2 d\rho_3 + d\rho_5,$$
$$(8) \quad \begin{aligned}&(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) \,.\, (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)\\ &= (\rho_1 + \sigma_1, \rho_2 + \sigma_2, \rho_3 + \sigma_3 - \rho_2\sigma_1, \rho_4 + \sigma_4 + \tfrac{1}{2}\rho_2\sigma_1^2 - \rho_3\sigma_1,\\ &\qquad \rho_5 + \sigma_5 - \tfrac{1}{6}\rho_2\sigma_1^3 + \tfrac{1}{2}\rho_3\sigma_1^2 - \rho_4\sigma_1 + \tfrac{1}{2}\rho_2^2\sigma_1 - \rho_3\sigma_2 + \rho_2\sigma_1\sigma_2).\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous allons déterminer les représentations unitaires irréductibles des groupes Γ_3, Γ_4, $\Gamma_{5,1}, \ldots, \Gamma_{5,6}$, et la formule de Plancherel pour ces groupes. La classification des représentations unitaires irréductibles pourrait se faire en utilisant la théorie de Mackey **(5)**, mais nous utiliserons systématiquement **(3)**. Notons aussi que la classification des représentations unitaires irréductibles de Γ_3 et $\Gamma_{5,1}$ a été faite par von Neumann **(6)**, et que la formule de Plancherel pour Γ_3 est due à Godement **(4)**.

4. Représentations unitaires irréductibles de Γ_3. Nous utilisons la table de multiplication de $\mathfrak{g}_3$ donnée au paragraphe 1. Soient $\mathfrak{h} = \mathbf{R}x_3$, Δ le sous-groupe correspondant de Γ_3, qui est à la fois le centre et le groupe des commutateurs de Γ_3.

D'après la proposition 2, et le lemme 15 de **(3)**, il y a correspondance biunivoque entre les caractères hermitiens χ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_3)$ et les nombres réels λ. Cette correspondance est définie par la formule $\chi(x_3) = i\lambda$.

Proposition 3. (i) *Pour tout nombre réel* $\lambda \neq 0$, *il existe une représentation unitaire irréductible* U_λ *de* Γ_3 *et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend la valeur* $i\lambda$ *en* x_3. *La représentation* U_λ *opère dans* $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, *l'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables est* $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. *On a*

$$(9) \qquad U_\lambda(x_1) = D_1 \qquad U_\lambda(x_2) = i\lambda M_1 \qquad U_\lambda(x_3) = i\lambda.$$

Si γ *est l'élément de* Γ_3 *de coordonnées* (ρ_1, ρ_2, ρ_3) *et si* $f \in L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, *on a*

$$(10) \qquad (U_\lambda(\gamma)f)(\theta) = [\exp i\lambda(\rho_3 - \rho_2\theta)] f(\theta + \rho_1).$$

Si $F \in L_{\mathbf{C}}^1(\Gamma_3) \cap L_{\mathbf{C}}^2(\Gamma_3)$, *on a*

$$(11) \qquad \int_{\Gamma_3} |F(\gamma)|^2 d\gamma = \int_{\lambda \neq 0} tr(U_\lambda(F)^* U_\lambda(F))|\lambda| d\lambda.$$

(ii) *Il existe une infinité de représentations unitaires irréductibles de* Γ_3, *deux à deux non équivalentes, dont le caractère prend la valeur* 0 *en* x_3. *Ce sont les représentations triviales sur* Δ; *elles s'identifient donc aux représentations unitaires de dimension* 1 *du groupe abélien* Γ_3/Δ.

Démonstration. Soient $\mathfrak{h}' = \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_2$, qui est un idéal abélien de $\mathfrak{g}_3$, et Δ' le sous-groupe correspondant de Γ_3. Appliquons le lemme 24 de **(3)** à Γ_3 et Δ'; on peut prendre dans ce lemme $a_1 = x_3$, $a_2 = x_2$, $a = 1$, $b = x_3$. On voit que x_3 est classifiant pour $\mathfrak{g}_3$. Si $\lambda \neq 0$, il existe une représentation unitaire irréductible U_λ de Γ_3 et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend la valeur $i\lambda$ en x_3; compte tenu des lemmes 23 et 24 de **(3)**, U_λ est induite par n'importe quelle représentation unitaire de dimension 1 de Δ' dont le caractère prend la valeur $i\lambda$ en x_3, par exemple par la représentation dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_3 et 0 en x_2. D'après les lemmes 29 et 31 de **(3)**, U_λ opère dans $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, l'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables pour U_λ est $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, et on a les formules (9). La formule (10) résulte de la définition des représentations induites et du calcul suivant:

$$(\theta, 0, 0)\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (\theta + \rho_1, \rho_2, \rho_3 - \theta\rho_2) = (0, \rho_2, \rho_3 - \theta\rho_2)\ (\theta + \rho_1, 0, 0).$$

Maintenant, utilisons, dans **(3)**, la partie 2° de la démonstration du théorème 4. On peut y prendre $q = 1$, $a_1 = x_3$, $a_2 = x_2$, $b = x_3$, $F' \equiv 1$, $R_1(\lambda_1) = \lambda_1$. D'où la formule (11). Enfin, la partie (ii) de l'énoncé est évidente.

5. Représentations unitaires irréductibles de Γ_4. Nous utilisons la table de multiplication de $\mathfrak{g}_4$ donnée au § 1. Soient $\mathfrak{h} = \mathbf{R}x_4$, $\mathfrak{h}' = \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_3$, Δ et Δ' les sous-groupes correspondants de Γ_4. Alors Δ est le centre de Γ_4 et Δ' est le groupe des commutateurs de Γ_4.

D'après la proposition 2, et le lemme 15 de **(3)**, il y a correspondance biunivoque entre les caractères hermitiens χ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_4)$ et les couples (λ, μ) de nombres réels. Cette correspondance est définie par les formules $\chi(x_4) = i\lambda$, $\chi(2x_2\, x_4 - x_3^2) = \mu$.

PROPOSITION 4. *Soient* λ *et* μ *des nombres réels.*

(i) *Si* $\lambda \neq 0$, *il existe une représentation unitaire irréductible* $U_{\lambda,\mu}$ *de* Γ_4 *et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend la valeur* $i\lambda$ *en* x_4 *et la valeur* μ *en* $2x_2x_4 - x_3^2$. *La représentation* $U_{\lambda,\mu}$ *opère dans* $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$. *L'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables est* $\mathscr{S}(\mathbf{R})$. *On a*

$$(12)\quad U_{\lambda,\mu}(x_1) = D_1,\quad U_{\lambda,\mu}(x_2) = -\tfrac{1}{2}i\frac{\mu}{\lambda} + \tfrac{1}{2}i\lambda M_1^2,\quad U_{\lambda,\mu}(x_3) = i\lambda M_1,$$
$$U_{\lambda,\mu}(x_4) = i\lambda.$$

Si γ *est l'élément de* Γ_4 *de coordonnées* $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$, *et si* $f \in L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, *on a*

$$(13)\quad (U_{\lambda,\mu}(\gamma)f)(\theta) = [\exp i(-\tfrac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda}\rho_2 + \lambda\rho_4 - \lambda\rho_3\theta + \tfrac{1}{2}\lambda\rho_2\theta^2)]f(\theta + \rho_1).$$

Si $F \in L_{\mathbf{C}}^1(\Gamma_4) \cap L_{\mathbf{C}}^2(\Gamma_4)$, *on a*

$$(14)\qquad \int_{\Gamma_4} |F(\gamma)|^2 d\gamma = \int\int_{\lambda\neq 0} tr(U_{\lambda,\mu}(F)^* U_{\lambda,\mu}(F)) d\lambda d\mu.$$

(ii) *Si* $\lambda = 0$ *et* $\mu < 0$, *il n'existe aucune représentation unitaire irréductible de* Γ_4 *dont le caractère prend la valeur* $i\lambda$ *en* x_4 *et* μ *en* $2x_2x_4 - x_3^2$.

(iii) *Si* $\lambda > 0$ *et* $\mu > 0$, *il existe (à une équivalence près) deux représentations unitaires irréductibles de* Γ_4 *dont le caractère prend la valeur* $i\lambda$ *en* x_4 *et* μ *en* $2x_2x_4 - x_3^2$. *Ces représentations sont triviales sur* Δ, *donc (comme* Γ_4/Δ *est isomorphe à* Γ_3*) s'identifient à des représentations de* Γ_3, *à savoir les représentations notées* $U_{\pm\sqrt{\mu}}$ *dans la proposition* 3.

(iv) *Si* $\lambda = \mu = 0$, *il existe une infinité de représentations unitaires irréductibles de* Γ_4, *deux à deux non équivalentes, dont le caractère prend la valeur* $i\lambda$ *en* x_4 *et* μ *en* $2x_2x_4 - x_3^2$. *Ce sont les représentations triviales sur* Δ'; *elles s'identifient donc aux représentations unitaires de dimension* 1 *du groupe abélien* Γ_4/Δ'.

Démonstration. Soient $\mathfrak{h}'' = \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_2$, qui est un idéal abélien de $\mathfrak{g}_4$, et Δ'' le sous-groupe correspondant de Γ_4. Appliquons le lemme 24 de **(3)** à Γ_4 et Δ''; on peut prendre dans ce lemme $a_1 = x_4$, $a_2 = 2x_2x_4 - x_3^2$, $a_3 = x_3$, $a = 1$, $b = x_4$. On voit que x_4 est classifiant pour $\mathfrak{g}_4$. Si $\lambda \neq 0$, il existe une représentation unitaire irréductible $U_{\lambda,\mu}$ de Γ_4 et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_4 et μ en $2x_2x_4 - x_3^2$; compte tenu des lemmes 23 et 24 de **(3)**, $U_{\lambda,\mu}$ est induite par n'importe quelle représentation unitaire de dimension 1 de Δ'' dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_4 et μ en $2x_2x_4 - x_3^2$, par exemple par la représentation dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_4, 0 en x_3 et $-\frac{1}{2}i\mu/\lambda$ en x_2. D'après les lemmes 29 et 31 de **(3)**, $U_{\lambda,\mu}$ opère dans $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, l'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables pour $U_{\lambda,\mu}$ est $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, et on a les formules (12). La formule (13) résulte da la définition des représentations induites et du calcul suivant:

$$\begin{aligned}(\theta, 0, 0, 0)\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) &= (\theta + \rho_1, \rho_2, \rho_3 - \theta\rho_2, \rho_4 - \theta\rho_3 + \tfrac{1}{2}\theta^2\rho_2)\\ &= (0, \rho_2, \rho_3 - \theta\rho_2, \rho_4 - \theta\rho_3 + \tfrac{1}{2}\theta^2\rho_2)\ (\theta + \rho_1, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Soit $U'_{\lambda,\mu',\nu}$ une représentation unitaire de dimension 1 de Δ'' dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_4, $i\mu'$ en x_3, $i\nu$ en x_2. Soit $F' \in L_{\mathbf{C}}^1(\Delta'') \cap L_{\mathbf{C}}^2(\Delta'')$. D'après la formule de Plancherel ordinaire, on a pour un bon choix de $d\delta$

$$\int_{\Delta''} |F'(\delta)|^2 d\delta = 2 \int tr(U'_{\lambda,\mu',\nu}(F')^* U'_{\lambda,\mu',\nu}(F'))d\lambda d\mu' d\nu.$$

Soit μ la valeur en $2x_2x_4 - x_3^2$ du caractère de $U'_{\lambda,\mu',\nu}$. On a $\mu = -2\lambda\mu' + \nu^2$, donc $\mu' = (\nu^2 - \mu)/2\lambda$ pour $\lambda \neq 0$. Donc

$$\int_{\Delta''} |F\ (\delta)|\ d\delta = 2\pi \int tr(U_{\lambda,(\nu^2-\mu)/2\lambda,\nu}(F\ )^* U_{\lambda,(\nu^2-\mu)/2\lambda,\nu}(F\ )) \left|\frac{1}{2\lambda}\right| d\lambda d\mu d\nu.$$

Maintenant, utilisons, dans **(3)**, la partie 2° de la démonstration du théorème 4. On peut y prendre $q = 2$, $a_1 = x_4$, $a_2 = 2x_2x_4 - x_3^2$, $a_3 = x_3$, $b = x_4$, $F'(\lambda, \mu) = 1/\lambda$, $R_1(\lambda, \mu) = \lambda$. On obtient la formule (14) pour un choix convenable de la mesure de Haar $d\gamma$.

Soit U une représentation unitaire irréductible de Γ_4 dont le caractère s'annule en x_4. Alors, U est triviale sur Δ, donc s'identifie à une représentation unitaire irréductible de Γ_4/Δ qui est isomorphe à Γ_3. On a $U(2x_2x_4 - x_3^2) = -U(x_3)^2$, et $U(x_3)$ est un opérateur scalaire imaginaire pur. Alors, (ii) est immédiat et (iii) résulte de la proposition 3. Enfin, (iv) est immédiat.

6. Représentations unitaires irréductibles de $\Gamma_{5,1}$. Nous utilisons la table de multiplication de $\mathfrak{g}_{5,1}$ donnée au § 1. Soient $\mathfrak{h} = \mathbf{R}x_5$ et Δ le sous-groupe correspondant de $\Gamma_{5,1}$. Il y a correspondence biunivoque entre les caractères hermitiens χ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,1})$ et les nombres réels λ. Cette correspondance est défini par la formule $\chi(x_5) = i\lambda$.

PROPOSITION 5. (i) *Pour tout nombre réel $\lambda \neq 0$, il existe une représentation unitaire irréductible U_λ de $\Gamma_{5,1}$ et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend la valeur $i\lambda$ en x_5. La représentation U_λ opère dans $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R}^2)$. L'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables est $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$. On a*

(15) $U_\lambda(x_1) = D_1$, $U_\lambda(x_2) = i\lambda M_1$, $U_\lambda(x_3) = D_2$, $U_\lambda(x_4) = i\lambda M_2$, $U_\lambda(x_5) = i\lambda$.

Si γ est l'élément de $\Gamma_{5,1}$ de coordonnées $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)$, et si $f \in L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R}^2)$, on a

(16) $\quad (U_\lambda(\gamma)f)(\theta_1, \theta_2) = [\exp i\lambda(\rho_5 - \rho_2\theta_1 - \rho_4\theta_2)]f(\theta_1 + \rho_1, \theta_2 + \rho_3)$.

Si $F \in L_{\mathbf{C}}^1(\Gamma_{5,1}) \cap L_{\mathbf{C}}^2(\Gamma_{5,1})$, on a

$$\int_{\Gamma_{5,1}} |F(\gamma)|^2 d\gamma = \int_{\lambda\neq 0} tr(U_\lambda(F)^* U_\lambda(F))\lambda^2 d\lambda. \tag{17}$$

(ii) *Il existe une infinité de représentations unitaires irréductibles de $\Gamma_{5,1}$, deux à deux non équivalentes, dont le caractère prend la valeur 0 en x_5. Ce sont les représentations triviales sur Δ; elles s'identifient donc aux représentations unitaires de dimension 1 du groupe abélien $\Gamma_{5,1}/\Delta$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{h}' = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_2$, qui est un idéal de $\mathfrak{g}_{5,1}$ isomorphe à $\mathfrak{g}_3 \times (\mathbf{R}x_2)$. Soit Δ' le sous-groupe correspondant de $\Gamma_{5,1}$. Appliquons le lemme 24 de **(3)** à $\Gamma_{5,1}$ et Δ'; on peut prendre dans ce lemme $a_1 = x_5$, $a_2 = x_2$, $a = 1$, $b = x_5$ (compte tenu de la proposition 3). On voit que x_5 est classifiant pour $\mathfrak{g}_{5,1}$. Si $\lambda \neq 0$, il existe une représentation unitaire irréductible U_λ de $\Gamma_{5,1}$ et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend la valeur $i\lambda$ en x_5. Cette représentation est induite par n'importe quelle représentation unitaire irréductible de Δ' dont le caractère prend la valeur $i\lambda$ en x_5. Nous considérerons par exemple la représentation triviale sur le sous-groupe Δ'' de Δ' correspondant à $\mathbf{R}x_2$; comme Δ'/Δ'' est isomorphe à Γ_3, ceci détermine parfaitement la représentation considérée. Les formules (15) et les assertions qui les précèdent s'établissent alors en utilisant les mêmes références que pour la proposition 3. La formule (16) résulte du calcul suivant:

$$\begin{aligned}(\theta, 0, 0, 0, 0)(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5) &= (\theta + \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 - \theta\rho_2)\\ &= (0, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 - \theta\rho_2)(\theta + \rho_1, 0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Utilisons, dans **(3)**, la partie 2° de la démonstration du théorème 4. D'après la proposition 3, on a $F'(\lambda) = \lambda$. D'autre part, $R_1(\lambda) = \lambda$. D'où (17). La partie (ii) de l'énoncé est évidente.

7. Représentations unitaires irréductibles de $\Gamma_{5,2}$. Nous utilisons la table de multiplication de $\mathfrak{g}_{5,2}$ donnée au § 1. Soient $\mathfrak{h} = \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_5$, et Δ le sous-groupe correspondant de $\Gamma_{5,2}$, qui est à la fois le centre et le groupe des commutateurs de $\Gamma_{5,2}$. Il y a correspondance biunivoque entre les caractères hermitiens χ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,2})$ et les systèmes (λ, μ, ν) de nombres réels. Cette correspondance est définie par les formules

$$\chi(x_4) = i\lambda, \qquad \chi(x_5) = i\mu, \qquad \chi(x_2x_5 - x_3x_4) = \nu.$$

PROPOSITION 6. *Soient λ, μ, ν des nombres réels.*

(i) *Si $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$, il existe une représentation unitaire irréductible $U_{\lambda,\mu,\nu}$ de $\Gamma_{5,2}$ et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_4, $i\mu$ en x_5, ν en $x_2x_5 - x_3x_4$. Elle opère dans $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$. Les vecteurs indéfiniment différentiables sont ceux de $\mathscr{S}(\mathbf{R})$. On a*

$$(18)\qquad U_{\lambda,\mu,\nu}(x_1) = D_1,\ U_{\lambda,\mu,\nu}(x_2) = -i\frac{\mu\nu}{\lambda^2 + \mu^2} + i\lambda M_1,$$

$$U_{\lambda,\mu,\nu}(x_3) = i\frac{\lambda\nu}{\lambda^2 + \mu^2} + i\mu M_1, \qquad U_{\lambda,\mu,\nu}(x_4) = i\lambda,\ U_{\lambda,\mu,\nu}(x_5) = i\mu.$$

Si γ est l'élément de $\Gamma_{5,2}$ de coordonnées $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)$, et si $f \in L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, on a

$$(19)\qquad (U_{\lambda,\mu,\nu}(\gamma)f)(\theta) = \left[\exp i\left(\nu\frac{\lambda\rho_3 - \mu\rho_2}{\lambda^2 + \mu^2} + \lambda(\rho_4 - \rho_2\theta) + \mu(\rho_5 - \rho_3\theta)\right)\right] f(\theta + \rho_1).$$

Si $F \in L_{\mathbf{C}}^1(\Gamma_{5,2}) \cap L_{\mathbf{C}}^2(\Gamma_{5,2})$, *on a*

$$(20) \qquad \int_{\Gamma_{5,2}} |F(\gamma)|^2 d\gamma = \int\int\int_{\lambda^2+\mu^2\neq 0} tr(U_{\lambda,\mu,\nu}(F)^* U_{\lambda,\mu,\nu}(F)) d\lambda d\mu d\nu.$$

(ii) *Si* $\lambda = \mu = 0$ *et* $\nu \neq 0$, *il n'existe aucune représentation unitaire irréductible de* $\Gamma_{5,2}$ *dont le caractère prend les valeurs* $i\lambda$ *en* x_4, $i\mu$ *en* x_5, ν *en* $x_2x_5 - x_3x_4$.

(iii) *Si* $\lambda = \mu = \nu = 0$, *il existe une infinité de représentations unitaires irréductibles de* $\Gamma_{5,2}$, *deux à deux non équivalentes, dont le caractère prend les valeurs* $i\lambda$ *en* x_4, $i\mu$ *en* x_5, ν *en* $x_2x_5 - x_3x_4$. *Ce sont les représentations triviales sur* Δ; *elles s'identifient aux représentations unitaires de dimension* 1 *du groupe abélien* $\Gamma_{5,2}/\Delta$.

Démonstration. Soient $\mathfrak{h}' = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_2$, qui est un idéal abélien de $\mathfrak{g}_{5,2}$ et Δ' le sous-groupe correspondant de $\Gamma_{5,2}$. Supposons d'abord $\mu \neq 0$. Appliquons le lemme 24 de **(3)** à $\Gamma_{5,2}$ et Δ'; on peut prendre dans ce lemme

$$a_1 = x_5, \quad a_2 = x_4, \quad a_3 = x_2x_5 - x_3x_4, \quad a_4 = x_3, \quad a = 1, \quad b = x_5.$$

On voit qu'il existe une représentation unitaire irréductible $U_{\lambda,\mu,\nu}$ de $\Gamma_{5,2}$ et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_4, $i\mu$ en x_5, ν en $x_2x_5 - x_3x_4$. Cette représentation est induite par n'importe quelle représentation unitaire de dimension 1 de Δ' dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_4, $i\mu$ en x_5, ν en $x_2x_5 - x_3x_4$; nous considérerons par exemple la représentation unitaire de dimension 1 de Δ' dont le caractère prend les valeurs

$$i\lambda \text{ en } x_4, \quad i\mu \text{ en } x_5, \quad -i\frac{\mu\nu}{\lambda^2+\mu^2} \text{ en } x_2, \quad i\frac{\lambda\nu}{\lambda^2+\mu^2} \text{ en } x_3.$$

Les formules (18) et les assertions qui les précèdent s'obtiennent alors en utilisant les mêmes références que pour la proposition 3. En particulier, pour $\lambda = 0$ (et toujours $\mu \neq 0$), on a

$$U_{0,\mu,\nu}(x_1) = D_1, \quad U_{0,\mu,\nu}(x_2) = -i\frac{\nu}{\mu}, \quad U_{0,\mu,\nu}(x_3) = i\mu M_1, \quad U_{0,\mu,\nu}(x_4) = 0,$$
$$U_{0,\mu,\nu}(x_5) = i\mu.$$

D'autre part, l'application linéaire de $\mathfrak{g}_{5,2}$ sur $\mathfrak{g}_{5,2}$ qui transforme x_1 en x_1, x_2 en x_3, x_3 en x_2, x_4 en x_5, x_5 en x_4, est un automorphisme de $\mathfrak{g}_{5,2}$. Il existe donc une représentation unitaire irréductible $U_{\lambda,0,\nu}$ de $\Gamma_{5,2}$ et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend les valeurs 0 en x_5, $i\lambda$ en x_4, ν en $x_2x_5 - x_3x_4$; cette représentation est induite par la représentation unitaire de dimension 1 de Δ' dont le caractère prend les valeurs 0 en x_5, $i\lambda$ en x_4, $i\nu/\lambda$ en x_3, 0 en x_2. Cette représentation opère dans $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, les vecteurs indéfiniment différentiables sont ceux de $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, et on a

$$U_{\lambda,0,\nu}(x_1) = D_1, \quad U_{\lambda,0,\nu}(x_2) = i\lambda M_1, \quad U_{\lambda,0,\nu}(x_3) = i\frac{\nu}{\lambda}, \quad U_{\lambda,0,\nu}(x_4) = i\lambda,$$
$$U_{\lambda,0,\nu}(x_5) = 0.$$

On voit donc que les formules (18) et les assertions qui les précèdent sont valables sous la seule hypothèse que $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. La formule (19) résulte du calcul suivant:

$$(\theta, 0, 0, 0, 0)(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5) = (\theta + \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 - \rho_2\theta, \rho_5 - \rho_3\theta)$$
$$= (0, \rho_2, \rho_3, \rho_4 - \rho_2\theta, \rho_5 - \rho_3\theta)(\theta + \rho_1, 0, 0, 0, 0).$$

Dans **(3)**, partie 2° de la démonstration du théorème 4, $F'(\lambda, \mu, \nu) = 1/\mu$ et $R_1(\lambda, \mu, \nu) = \mu$. D'où (20). Les parties (ii) et (iii) de l'énoncé sont évidentes.

8. Représentations unitaires irréductibles de $\Gamma_{5,3}$. Nous utilisons la table de multiplication de $\mathfrak{g}_{5,3}$ donnée au § 1. Soient $\mathfrak{h} = \mathbf{R}x_5$, $\mathfrak{h}' = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4$, Δ et Δ' les sous-groupes correspondants de $\Gamma_{5,3}$. Alors Δ est le centre de $\Gamma_{5,3}$ et Δ' est le groupe des commutateurs de $\Gamma_{5,3}$. Il y a correspondance biunivoque entre les caractères hermitiens χ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,3})$ et les nombres réels λ. Cette correspondance est définie par la formule $\chi(x_5) = i\lambda$.

PROPOSITION 7. (i) *Pour tout nombre réel* $\lambda \neq 0$, *il existe une représentation unitaire irréductible* U_λ *de* $\Gamma_{5,3}$ *et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend la valeur* $i\lambda$ *en* x_5. *Elle opère dans* $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R}^2)$. *L'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables est* $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$. *On a*

$$(21) \qquad U_\lambda(x_1) = D_1, \quad U_\lambda(x_2) = D_2 + \tfrac{1}{2}i\lambda M_1^2, \quad U_\lambda(x_3) = i\lambda M_2,$$
$$U_\lambda(x_4) = i\lambda M_1, \quad U_\lambda(x_5) = i\lambda.$$

Si γ *est l'élément de* $\Gamma_{5,3}$ *de coordonnées* $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)$, *et si* $f \in L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R}^2)$, *on a*

$$(22) \quad (U_\lambda(\gamma)f)(\theta_1, \theta_2) = [\exp i\lambda(\rho_5 - \rho_4\theta_1 + \tfrac{1}{2}\rho_2\theta_1^2 - \rho_3\theta_2)]f(\theta_1 + \rho_1, \theta_2 + \rho_2).$$

Si $F \in L_{\mathbf{C}}^1(\Gamma_{5,3}) \cap L_{\mathbf{C}}^2(\Gamma_{5,3})$, *on a*

$$(23) \qquad \int_{\Gamma_{5,3}} |F(\gamma)|^2 d\gamma = \int_{\lambda \neq 0} tr(U_\lambda(F)^* U_\lambda(F))\lambda^2 d\lambda$$

(ii) *Il existe une infinité de représentations unitaires irréductibles de* $\Gamma_{5,3}$, *deux à deux non équivalentes, dont le caractère prend la valeur* 0 *en* x_5. *Elles s'identifient aux représentations unitaires irréductibles du groupe* $\Gamma_{5,3}/\Delta$, *qui est isomorphe à* $\Gamma_3 \times \mathbf{R}$. *Compte tenu de la proposition* 3, *elles se partagent en deux séries, suivant qu'elles sont ou non triviales sur* Δ'.

Démonstration. Soient $\mathfrak{h}'' = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_2$, qui est un idéal de $\mathfrak{g}_{5,3}$, et Δ'' le sous-groupe correspondant de $\Gamma_{5,3}$. L'algèbre $\mathfrak{h}''$ est isomorphe à $(\mathbf{R}x_2 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_5) \times \mathbf{R}x_4$, et $\mathbf{R}x_2 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_5$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_3$. Appliquons le lemme 24 de **(3)** à $\Gamma_{5,3}$ et Δ''; on peut prendre dans ce lemme $a_1 = x_5$, $a_2 = x_4$, $a = 1$, $b = x_5$. Pour $\lambda \neq 0$, il existe une représentation unitaire irréductible U_λ de $\Gamma_{5,3}$ et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend la valeur $i\lambda$ en x_5. Cette représentation est induite par n'importe quelle représentation unitaire irréductible de Δ'' dont le caractère prend la valeur $i\lambda$ en x_5, par exemple l'unique représentation unitaire irréductible de Δ'' dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_5 et 0 en x_4. Les formules (21) et les assertions qui les précèdent s'établissent alors en utilisant les mêmes références que pour la proposition 3. La formule (22) résulte du calcul suivant:

$$\begin{aligned}(\theta, 0, 0, 0, 0)(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5) &= (\theta + \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 - \theta\rho_2, \rho_5 - \theta\rho_4 + \tfrac{1}{2}\theta^2\rho_2) \\ &= (0, \rho_2, \rho_3, \rho_4 - \theta\rho_2, \rho_5 - \theta\rho_4 + \tfrac{1}{2}\theta^2\rho_2)(\theta + \rho_1, 0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Avec les notations de **(3)**, partie 2° de la démonstration du théorème 4, on a $F'(\lambda) = \lambda$, $R_1(\lambda) = \lambda$. D'où (23). La partie (ii) de l'énoncé est évidente.

9. Représentations unitaires irréductibles de $\Gamma_{5,4}$. Nous utilisons la table de multiplication de $\mathfrak{g}_{5,4}$ donnée au § 1. Soient $\mathfrak{h} = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4$, $\mathfrak{h}' = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_3$, Δ et Δ' les sous-groupes correspondants de $\Gamma_{5,4}$. Alors, Δ est le centre et Δ' est le groupe des commutateurs de $\Gamma_{5,4}$. Il y a correspondance biunivoque entre les caractères hermitiens χ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,4})$ et les systèmes de nombres réels λ, μ, ν. Cette correspondance est définie par les formules $\chi(x_4) = i\lambda$, $\chi(x_5) = i\mu$, $\chi(2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2) = \nu$.

PROPOSITION 8. Soient λ, μ, ν *des nombres réels.*

(i) *Si* $\lambda \neq 0$ *ou* $\mu \neq 0$, *il existe une représentation unitaire irréductible* $U_{\lambda,\mu,\nu}$ *de* $\Gamma_{5,4}$ *et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend les valeurs* $i\lambda$ *en* x_4, $i\mu$ *en* x_5, ν *en* $2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$. *Elle opère dans* $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$. *Les vecteurs indéfiniment différentiables sont ceux de* $\mathscr{S}(\mathbf{R})$. *On a*

$$\begin{aligned} &U_{\lambda,\mu,\nu}(x_1) = -\tfrac{1}{2}i\frac{\mu\nu}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}D_1 - \tfrac{1}{2}i\mu(\lambda^2+\mu^2)M_1^2, \\ (24)\quad &U_{\lambda,\mu,\nu}(x_2) = \tfrac{1}{2}i\frac{\lambda\nu}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}D_1 + \tfrac{1}{2}i\lambda(\lambda^2+\mu^2)M_1^2, \\ &U_{\lambda,\mu,\nu}(x_3) = i(\lambda^2+\mu^2)M_1, \quad U_{\lambda,\mu,\nu}(x_4) = i\lambda, \quad U_{\lambda,\mu,\nu}(x_5) = i\mu. \end{aligned}$$

Si γ *est l'élément de* $\Gamma_{5,4}$ *de coordonnées* $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)$, *et si* $f \in L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, *on a*

$$\begin{aligned} &(U_{\lambda,\mu,\nu}(\gamma)f)(\theta) = \Big[\exp i\Big(-\tfrac{1}{2}\frac{\nu}{\lambda^2+\mu^2}(\mu\rho_1 - \lambda\rho_2) + \lambda\rho_4 + \mu\rho_5 \\ (25)\quad &-\tfrac{1}{6}\frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}(\lambda^2\rho_1^3 + 3\lambda\mu\rho_1^2\rho_2 + 3\mu^2\rho_1\rho_2^2 - \lambda\mu\rho_2^3) + (\lambda^2+\mu^2)\rho_3\theta + \mu^2\rho_1\rho_2\theta \\ &+ \lambda\mu(\rho_1^2 - \rho_2^2)\theta - \tfrac{1}{2}(\lambda^2+\mu^2)(\mu\rho_1 - \lambda\rho_2)\theta^2\Big)\Big] f\Big(\theta + \frac{\lambda\rho_1 + \mu\rho_2}{\lambda^2+\mu^2}\Big). \end{aligned}$$

Si $F \in L_{\mathbf{C}}^1(\Gamma_{5,4}) \cap L_{\mathbf{C}}^2(\Gamma_{5,4})$, *on a*

$$(26)\qquad \int_{\Gamma_{5,4}} |F(\gamma)|^2 d\gamma = \iiint_{\lambda^2+\mu^2\neq 0} tr(U_{\lambda,\mu,\nu}(F)^* U_{\lambda,\mu,\nu}(F))\, d\lambda d\mu d\nu.$$

(ii) *Si* $\lambda = \mu = 0$ *et* $\nu > 0$, *il n'existe aucune représentation unitaire irréductible de* $\Gamma_{5,4}$ *dont le caractère prend les valeurs* $i\lambda$ *en* x_4, $i\mu$ *en* x_5, ν *en* $2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$.

(iii) *Si* $\lambda = \mu = 0$ *et* $\nu < 0$, *il existe (à une équivalence près) deux représentations unitaires irréductibles de* $\Gamma_{5,4}$ *dont le caractère prend les valeurs* $i\lambda$ *en* x_4,

https://doi.org/10.4153/CJM-1958-033-5 Published online by Cambridge University Press

$i\mu$ en x_5, ν en $2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$. Ces représentations sont triviales sur Δ, et s'identifient à des représentations de $\Gamma_{5,4}/\Delta$, donc de Γ_3; ce sont les représentations notées $U_{\pm\sqrt{-\nu}}$ dans la proposition 3.

(iv) *Si $\lambda = \mu = \nu = 0$, il existe une infinité de représentations unitaires irréductibles de $\Gamma_{5,4}$, deux à deux non équivalentes, dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_4, $i\mu$ en x_5, ν en $2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$. Ces représentations sont triviales sur Δ'. Elles s'identifient aux représentations unitaires de dimension* 1 *du groupe abélien $\Gamma_{5,4}/\Delta'$.*

Démonstration. Supposons $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$. Soient $\mathfrak{h}'' = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}(\lambda x_1 + \mu x_2)$ qui est un idéal de $\mathfrak{g}_{5,4}$ de dimension 4, et Δ'' le sous-groupe correspondant de $\Gamma_{5,4}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}''$ est isomorphe à

$$(\mathbf{R}(\lambda x_1 - \mu x_2) + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}(\lambda x_4 + \mu x_5)) \times \mathbf{R}(\mu x_4 - \lambda x_5),$$

et $\mathbf{R}(\lambda x_1 + \mu x_2) + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}(\lambda x_4 + \mu x_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_3$, avec $\mathbf{R}(\lambda x_4 + \mu x_5)$ pour centre. Appliquons cette fois le lemme 21 de **(3)** à $\Gamma_{5,4}$ et Δ'', avec

$$x = \mu x_1 - \lambda x_2, \quad a_1 = \frac{2}{\lambda^2 + \mu^2}(\lambda x_4 + \mu x_5), \quad a = 2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$$

(on notera que

$$a = \frac{2}{\lambda^2 + \mu^2}((\lambda x_4 + \mu x_5)(\mu x_1 - \lambda x_2) - (\lambda x_1 + \mu x_2)(\mu x_4 - \lambda x_5)) + x_3^2).$$

La proposition 3 montre que ce qui est noté Λ dans le lemme 21 de **(3)** est l'ensemble des caractères hermitiens de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h}'')$ non nuls en $\lambda x_4 + \mu x_5$. Le lemme 21 (iii) de **(3)** montre que $\lambda x_4 + \mu x_5$ est classifiant pour $\mathfrak{g}_{5,4}$. En particulier, un caractère qui prend les valeurs $i\lambda$ en x_4, $i\mu$ en x_5, ν en $2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$ (donc la valeur $i(\lambda^2 + \mu^2) \neq 0$ en $\lambda x_4 + \mu x_5$) correspond à une représentation unitaire irréductible $U_{\lambda,\mu,\nu}$ de $\Gamma_{5,4}$ et (à une équivalence près) à une seule. D'après le lemme 21 (ii) de **(3)**, cette représentation prolonge une représentation unitaire irréductible U' de Δ'' dont le caractère prend les valeurs $i(\lambda^2 + \mu^2)$ en $\lambda x_4 + \mu x_5$ et 0 en $\mu x_4 - \lambda x_5$. D'après la proposition 3, on peut supposer que U' opère dans $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, que les vecteurs indéfiniment différentiables pour U' sont les éléments de $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, et que

$$U'(\lambda x_1 + \mu x_2) = D_1, \quad U'(x_3) = i(\lambda^2 + \mu^2)M_1,$$
$$U'(\lambda x_4 + \mu x_5) = i(\lambda^2 + \mu^2), \quad U'(\mu x_4 - \lambda x_5) = 0.$$

Alors, $U_{\lambda,\mu,\nu}$ opère dans $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, et, d'après le lemme 28 de **(3)**, les vecteurs indéfiniment différentiables pour $U_{\lambda,\mu,\nu}$ sont les éléments de $\mathscr{S}(\mathbf{R})$, de sorte que

$$U_{\lambda,\mu,\nu}(\lambda x_1 + \mu x_2) = D_1, \quad U_{\lambda,\mu,\nu}(x_3) = i(\lambda^2 + \mu^2)M_1,$$
$$U_{\lambda,\mu,\nu}(\lambda x_4 + \mu x_5) = i(\lambda^2 + \mu^2), \quad U_{\lambda,\mu,\nu}(\mu x_4 - \lambda x_5) = 0.$$

Naturellement, $U_{\lambda,\mu,\nu}(x_4) = i\lambda$, $U_{\lambda,\mu,\nu}(x_5) = i\mu$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\nu &= U_{\lambda,\mu,\nu}(2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^{\,2}) \\
&= \frac{2}{\lambda^2+\mu^2}\,[U_{\lambda,\mu,\nu}(\mu x_1 - \lambda x_2)U_{\lambda,\mu,\nu}(\lambda x_4 + \mu x_5) - \\
&\qquad\qquad U_{\lambda,\mu,\nu}(\lambda x_1 + \mu x_2)U_{\lambda,\mu,\nu}(\mu x_4 - \lambda x_5)] + U_{\lambda,\mu,\nu}(x_3)^2 \\
&= \frac{2}{\lambda^2+\mu^2}\, i(\lambda^2+\mu^2)U_{\lambda,\mu,\nu}(\mu x_1 - \lambda x_2) - (\lambda^2+\mu^2)^2 M_1^{\,2} \\
&= 2iU_{\lambda,\mu,\nu}(\mu x_1 - \lambda x_2) - (\lambda^2+\mu^2)^2 M_1^{\,2}
\end{aligned}$$

d'où

$$U_{\lambda,\mu,\nu}(\mu x_1 - \lambda x_2) = -\tfrac{1}{2}i\nu - \tfrac{1}{2}i(\lambda^2+\mu^2)^2 M_1^{\,2}.$$

On tire de là

$$U_{\lambda,\mu,\nu}(x_1) = -\tfrac{1}{2}i\frac{\nu\mu}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}D_1 - \tfrac{1}{2}i\mu(\lambda^2+\mu^2)M_1^2$$

$$U_{\lambda,\mu,\nu}(x_2) = \tfrac{1}{2}i\frac{\nu\lambda}{\lambda^2+\mu^2} + \frac{\mu}{\lambda^2+\mu^2}D_1 + \tfrac{1}{2}i\lambda(\lambda^2+\mu^2)M_1^2$$

ce qui prouve les formules (24).

Cherchons l'application exponentielle de $\mathfrak{g}_{5,4}$ dans $\Gamma_{5,4}$. La base $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de $\mathfrak{g}_{5,4}$ admet pour base duale dans le dual de $\mathfrak{g}_{5,4}$ le système de formes différentielles invariantes à droite sur $\Gamma_{5,4}$ obtenues au § 3. Si un élément de $\mathfrak{g}_{5,4}$ a pour coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, le sous-groupe à 1 paramètre correspondant de $\Gamma_{5,4}$ s'obtient en cherchant les solutions du système

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \alpha_1, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = \alpha_2, \quad \rho_1\frac{d\rho_2}{dt} + \frac{d\rho_3}{dt} = \alpha_3,$$

$$\tfrac{1}{2}\rho_1^2\frac{d\rho_2}{dt} + \rho_1\frac{d\rho_3}{dt} + \frac{d\rho_4}{dt} = \alpha_4, \quad \rho_2\frac{d\rho_3}{dt} + \frac{d\rho_5}{dt} = \alpha_5,$$

qui s'annulent pour $t = 0$. On obtient

$$\rho_1 = \alpha_1 t, \quad \rho_2 = \alpha_2 t, \quad \rho_3 = \alpha_3 t - \tfrac{1}{2}\alpha_1\alpha_2 t^2,$$
$$\rho_4 = \alpha_4 t - \tfrac{1}{2}\alpha_1\alpha_3 t^2 + \tfrac{1}{6}\alpha_1^2\alpha_2 t^3, \quad \rho_5 = \alpha_5 t - \tfrac{1}{2}\alpha_2\alpha_3 t^2 + \tfrac{1}{3}\alpha_1\alpha_2^2 t^3.$$

En particulier, $\exp \mu_5 x_5$ est le point de coordonnées $(0, 0, 0, 0, \mu_5)$, et on a

$$U_{\lambda,\mu,\nu}(\exp \mu_5 x_5) = \exp\,(i\mu\mu_5);$$

$\exp \mu_4 x_4$ est le point de coordonnées $(0, 0, 0, \mu_4, 0)$, et on a

$$U_{\lambda,\mu,\nu}(\exp \mu_4 x_4) = \exp\,(i\lambda\mu_4);$$

$\exp \mu_3 x_3$ est le point de coordonnées $(0, 0, \mu_3, 0, 0)$, et on a

$$U_{\lambda,\mu,\nu}(\exp \mu_3 x_3) = \exp\,(i(\lambda^2+\mu^2)\mu_3 M_1);$$

$\exp \mu_2(\lambda x_1 + \mu x_2)$ est le point de coordonnées $(\lambda\mu_2, \mu\mu_2, -\tfrac{1}{2}\lambda\mu\mu_2^{\,2}, \tfrac{1}{6}\lambda^2\mu\mu_2^{\,3}, \tfrac{1}{3}\lambda\mu^2\mu_2^{\,3})$, et on a

$$U_{\lambda,\mu,\nu}(\exp \mu_2(\lambda x_1 + \mu x_2)) = \exp\,(\mu_2 D_1);$$

$\exp \mu_1(\mu x_1 - \lambda x_2)$ est le point de coordonnées $(\mu\mu_1, -\lambda\mu_1, \frac{1}{2}\lambda\mu\mu_1^2, -\frac{1}{6}\lambda\mu^2\mu_1^3, \frac{1}{3}\lambda^2\mu\mu_1^3)$, et on a

$$U_{\lambda,\mu,\nu}(\exp \mu_1(\mu x_1 - \lambda x_2)) = \exp \mu_1(-\tfrac{1}{2}i\nu - \tfrac{1}{2}i(\lambda^2 + \mu^2)^2 M_1^2).$$

Donc

$$\begin{aligned} &U_{\lambda,\mu,\nu}[\exp \mu_1(\mu x_1 - \lambda x_2) \,.\, \exp \mu_3 x_3 \,.\, \exp \mu_4 x_4 \,.\, \exp \mu_5 x_5 \,.\, \exp \mu_2(\lambda x_1 + \mu x_2)] \\ &= \exp i(-\tfrac{1}{2}\nu\mu_1 + \lambda\mu_4 + \mu\mu_5 + (\lambda^2 + \mu^2)\mu_3 M_1 - \tfrac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2)^2\mu_1 M_1^2) \exp(\mu_2 D_1). \end{aligned}$$

L'élément de $\Gamma_{5,4}$ entre crochets est

$$\begin{aligned} &(\mu\mu_1, -\lambda\mu_1, \tfrac{1}{2}\lambda\mu\mu_1^2, -\tfrac{1}{6}\lambda\mu^2\mu_1^3, \tfrac{1}{3}\lambda^2\mu\mu_1^3)(0, 0, \mu_3, 0, 0)(0, 0, 0, \mu_4, 0) \\ &(0, 0, 0, 0, \mu_5)(\lambda\mu_2, \mu\mu_2, -\tfrac{1}{2}\lambda\mu\mu_2^2, \tfrac{1}{6}\lambda^2\mu\mu_2^3, \tfrac{1}{3}\lambda\mu^2\mu_2^3) \\ &= (\mu\mu_1, -\lambda\mu_1, \tfrac{1}{2}\lambda\mu\mu_1^2, -\tfrac{1}{6}\lambda\mu^2\mu_1^3, \tfrac{1}{3}\lambda^2\mu\mu_1^3)(\lambda\mu_2, \mu\mu_2, \mu_3 - \tfrac{1}{2}\lambda\mu\mu_2^2, \mu_4 + \tfrac{1}{6}\lambda^2\mu\mu_2^3, \\ &\qquad\qquad \mu_5 + \tfrac{1}{3}\lambda\mu^2\mu_2^3) \\ &= (\lambda\mu_2 + \mu\mu_1, -\lambda\mu_1 + \mu\mu_2, \mu_3 + \tfrac{1}{2}\lambda\mu(\mu_1^2 - \mu_2^2) - \mu^2\mu_1\mu_2, \\ &\qquad -\tfrac{1}{6}\lambda\mu^2\mu_1^3 + \mu_4 + \tfrac{1}{6}\lambda^2\mu\mu_2^3 - \mu\mu_1\mu_3 + \tfrac{1}{2}\lambda\mu^2\mu_1\mu_2^2 + \tfrac{1}{2}\mu^3\mu_1^2\mu_2, \\ &\quad \tfrac{1}{3}\lambda^2\mu\mu_1^3 + \mu_5 + \tfrac{1}{3}\lambda\mu^2\mu_2^3 + \tfrac{1}{2}\mu^3\mu_1\mu_2^2 + \lambda\mu_1\mu_3 - \tfrac{1}{2}\lambda^2\mu\mu_1\mu_2^2 - \lambda\mu^2\mu_1^2\mu_2). \end{aligned}$$

Posant ces coordonnées égales à $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$, on trouve, après calculs

$$\mu_1 = \frac{\mu\rho_1 - \lambda\rho_2}{\lambda^2 + \mu^2}, \qquad \mu_2 = \frac{\lambda\rho_1 + \mu\rho_2}{\lambda^2 + \mu^2},$$
$$\mu_3(\lambda^2 + \mu^2) = \rho_3(\lambda^2 + \mu^2) + \mu^2\rho_1\rho_2 + \lambda\mu(\rho_1^2 - \rho_2^2),$$
$$\lambda\mu_4 + \mu\mu_5 = \lambda\rho_4 + \mu\rho_5 - \frac{1}{6}\frac{\mu}{\lambda^2 + \mu^2}(\lambda^2\rho_1^3 + 3\lambda\mu\rho_1^2\rho_2 + 3\mu^2\rho_1\rho_2^2 - \lambda\mu\rho_2^3).$$

D'où la formule (25). Maintenant, appliquons à $\mathfrak{g}_{5,4}$ et à l'idéal $\mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_2$ de $\mathfrak{g}_{5,4}$ la partie 1° de la démonstration du théorème 4 dans **(3)**, en y faisant $a_1 = x_4$, $a_2 = x_5$, $a_3 = 2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$, $x = x_1$, $a = 1$, $b = 2x_5$, $F'(\lambda, \mu) = \mu$ (d'après la proposition 3), $R(\lambda, \mu) = 2\mu$. On obtient la formule (26).

Les parties (ii), (iii), (iv) de l'énoncé sont évidentes.

10. Représentations unitaires irréductibles de $\Gamma_{5,5}$. Nous utilisons la table de multiplication de $\mathfrak{g}_{5,5}$ donnée au § 1. Soient X, Y, Z, T des indéterminées. D'après le § 2, il existe un homomorphisme de $\mathbf{R}[X, Y, Z, T]$ sur $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5})$ qui transforme

$$\begin{aligned} &X \text{ en } x_5,\ Y \text{ en } 2x_3x_5 - x_4^2,\ Z \text{ en } 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3, \\ &\qquad\qquad T \text{ en } 9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2, \end{aligned}$$

et dont le noyau est l'idéal de $K[X, Y, Z, T]$ engendré par $Y^3 + Z^2 - TX^2$. Si donc, pour tout caractère χ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5})$, on pose

$$\chi(x_5) = i\lambda, \quad \chi(2x_3x_5 - x_4^2) = \mu, \quad \chi(3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3) = i\nu,$$
$$\chi(9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2) = \rho,$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1958-033-5 Published online by Cambridge University Press

l'application $\chi \rightarrow (\lambda, \mu, \nu, \rho)$ est une bijection de l'ensemble des caractères de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5})$ sur l'ensemble Ξ_1 des points $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ de $\mathbf{C}^4$ tels que $\mu^3 + (i\nu)^2 - (i\lambda)^2\rho = 0$, c'est-à-dire tels que $\mu^3 - \nu^2 + \lambda^2\rho = 0$. Soit $\Xi = \Xi_1 \cap \mathbf{R}^4$. Si χ est hermitien, on a $(\lambda, \mu, \nu, \rho) \in \Xi$. Réciproquement, si $(\lambda, \mu, \nu, \rho) \in \Xi$, χ est changé en son conjugué par l'antiautomorphisme principal de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5})$, donc χ est hermitien. Ainsi, l'application $\chi \rightarrow (\lambda, \mu, \nu, \rho)$ définit une bijection de l'ensemble des caractères hermitiens de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,5})$ sur Ξ.

Soient $\mathfrak{h} = \mathbf{R}x_5$, $\mathfrak{h}' = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4$, Δ et Δ' les sous-groupes correspondants de $\Gamma_{5,5}$.

Proposition 9. *Soit* $(\lambda, \mu, \nu, \rho) \in \Xi$.

(i) *Si* $\lambda \neq 0$, *il existe une représentation unitaire irréductible* $U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}$ *de* $\Gamma_{5,5}$ *et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend les valeurs* $i\lambda$ *en* x_5, μ *en* $2x_3x_5 - x_4^2$, $i\nu$ *en* $3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3$, ρ *en* $9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2$. *Elle opère dans* $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$. *L'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables est* $\mathscr{S}(\mathbf{R})$. *On a*

$$(27)\qquad \begin{gathered} U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(x_1) = D_1, \quad U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(x_2) = -\tfrac{1}{3}i\frac{\nu}{\lambda^2} - \tfrac{1}{2}i\frac{\mu}{\lambda}M_1 + \tfrac{1}{6}i\lambda M_1^3, \\ U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(x_3) = -\tfrac{1}{2}i\frac{\mu}{\lambda} + \tfrac{1}{2}i\lambda M_1^2, \quad U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(x_4) = i\lambda M_1, \\ U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(x_5) = i\lambda. \end{gathered}$$

Si γ *est l'élément de* $\Gamma_{5,5}$ *de coordonnées* $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)$ *et si* $F \in L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, *on a*

$$(28)\qquad \begin{aligned} (U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(\gamma)f)(\theta) = \exp i\Big(&-\tfrac{1}{3}\frac{\nu}{\lambda^2}\rho_2 - \tfrac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda}(\rho_3 - \rho_2\theta) \\ &+ \lambda(\rho_5 - \rho_4\theta + \tfrac{1}{2}\rho_3\theta^2 - \tfrac{1}{6}\rho_2\theta^3)\Big)f(\theta + \rho_1). \end{aligned}$$

Si $F \in L_{\mathbf{C}}^1(\Gamma_{5,5}) \cap L_{\mathbf{C}}^2(\Gamma_{5,5})$, *on a*

$$(29)\qquad \int_{\Gamma_{5,5}} |F(\gamma)|^2 d\gamma = \iiint_{\lambda\neq 0} tr\Big(U_{\lambda,\mu,\nu,(\nu^2-\mu^3)/\lambda^2}(F)^* U_{\lambda,\mu,\nu,(\nu^2-\mu^3)/\lambda^2}(F)\Big)\frac{1}{\lambda^2}\,d\lambda d\mu d\nu.$$

(ii) *Si* $\lambda = 0$ *(donc* $\nu^2 - \mu^3 = 0$*) et* $\mu \neq 0$, *il existe une représentation unitaire irréductible* $U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}$ *de* $\Gamma_{5,5}$ *et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend les valeurs* $i\lambda$ *en* x_5, μ *en* $2x_3x_5 - x_4^2$, $i\nu$ *en* $3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3$, ρ *en* $9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2$. *Elle opère dans* $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$. *L'ensemble des vecteurs indéfiniment différentiables est* $\mathscr{S}(\mathbf{R})$. *On a*

$$(30)\qquad \begin{gathered} U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(x_1) = D_1, \quad U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(x_2) = -\tfrac{1}{6}i\frac{\rho}{\nu} - \tfrac{1}{2}i\frac{\nu}{\mu}M_1^2, \\ U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(x_3) = -i\frac{\nu}{\mu}M_1, \quad U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(x_4) = -i\frac{\nu}{\mu}, \quad U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(x_5) = 0. \end{gathered}$$

Si γ *est l'élément de* $\Gamma_{5,5}$ *de coordonnées* $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)$, *et si* $f \in L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R})$, *on a*

$$(31)\qquad (U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}(\gamma)f)(\theta) = \Big[\exp i\Big(-\tfrac{1}{6}\frac{\rho}{\nu}\rho_2 - \frac{\nu}{\mu}(\rho_4 - \rho_3\theta + \tfrac{1}{2}\rho_2\theta^2)\Big)\Big]f(\theta + \rho_1).$$

(iii) *Si* $\lambda = \mu = \nu = 0$, $\rho \neq 0$, *il n'existe aucune représentation unitaire irréductible de* $\Gamma_{5,5}$ *dont le caractère prend les valeurs*

$$i\lambda \text{ en } x_5,\ \mu \text{ en } 2x_3x_5 - x_4^2,\ i\nu \text{ en } 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3,$$
$$\rho \text{ en } 9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2.$$

(iv) *Si* $\lambda = \mu = \nu = \rho = 0$ *il y a une infinité de représentations unitaires irréductibles de* $\Gamma_{5,5}$, *deux à deux non équivalentes, dont le caractère prend les valeurs* $i\lambda$ *en* x_5, μ *en* $2x_3x_5 - x_4^2$, $i\nu$ *en* $3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3$, ρ *en* $9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2$. *Ces représentations sont triviales sur* Δ', *et s'identifient aux représentations unitaires irréductibles de* $\Gamma_{5,5}/\Delta'$, *qui est isomorphe à* Γ_3.

Démonstration. Soient $\mathfrak{h}'' = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_2$, qui est un idéal abélien de $\mathfrak{g}_{5,5}$, et Δ'' le sous-groupe correspondant de $\Gamma_{5,5}$. Appliquons le lemme 24 de **(3)** à $\Gamma_{5,5}$ et Δ''; on peut prendre dans ce lemme $a_1 = x_5$, $a_2 = 2x_3x_5 - x_4^2$, $a_3 = 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3$, $a_4 = x_4$, $x = x_1$, $a = 1$, $b = x_5$. Pour $\lambda \neq 0$, il existe une représentation unitaire irréductible $U_{\lambda,\mu,\nu,\rho}$ de $\Gamma_{5,5}$ et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_5, μ en $2x_3x_5 - x_4^2$, $i\nu$ en $3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3$, donc

$$\rho \text{ en } 9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2.$$

Cette représentation est induite par n'importe quelle représentation unitaire irréductible de Δ'' dont le caractère prend les valeurs $i\lambda$ en x_5, μ en $2x_3x_5 - x_4^2$, $i\nu$ en $3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3$, par exemple par la représentation unitaire de dimension 1 dont le caractère prend les valeurs

$$i\lambda \text{ en } x_5,\ 0 \text{ en } x_4,\ \frac{\mu}{2i\lambda} = -\tfrac{1}{2}i\frac{\mu}{\lambda} \text{ en } x_3,\ \frac{i\nu}{3(i\lambda)^2} = -\tfrac{1}{3}i\frac{\nu}{\lambda^2} \text{ en } x_2.$$

Les formules (27) et les assertions qui les précèdent s'établissent alors en utilisant les mêmes références que pour la proposition 3. La formule (28) résulte du calcul suivant:

$$\begin{aligned}(\theta, 0, 0, 0, 0)&(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)\\ &= (\theta + \rho_1, \rho_2, \rho_3 - \rho_2\theta, \rho_4 - \rho_3\theta + \tfrac{1}{2}\rho_2\theta^2, \rho_5 - \rho_4\theta + \tfrac{1}{2}\rho_3\theta^2 - \tfrac{1}{6}\rho_2\theta^3)\\ &= (0, \rho_2, \rho_3 - \rho_2\theta, \rho_4 - \rho_3\theta + \tfrac{1}{2}\rho_2\theta^2, \rho_5 - \rho_4\theta + \tfrac{1}{2}\rho_3\theta^2 - \tfrac{1}{6}\rho_2\theta^3)\\ &\qquad\qquad (\theta + \rho_1, 0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Avec les notations de **(3)**, partie 2° de la démonstration du théorème 4, on a

$$F'(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{2\lambda}\cdot\frac{1}{3\lambda^2} = \frac{1}{6\lambda^3}, \quad R_1(\lambda, \mu, \nu) = \lambda,$$

d'où la formule (29) pour un choix convenable de la mesure de Haar de $\Gamma_{5,5}$.

Si $\lambda = 0$ (donc $\nu^2 - \mu^3 = 0$), une représentation unitaire irréductible de $\Gamma_{5,5}$ dont le caractère prend la valeur $i\lambda$ en x_5 est triviale sur Δ, donc s'identifie à une représentation unitaire irréductible U' de $\Gamma_{5,5}/\Delta$; identifions $\Gamma_{5,5}/\Delta$ à

Γ_4; soient λ' et μ' les valeurs du caractère de U' en x_4 et en $2x_2x_4 - x_3^2$. Les congruences:

$$2x_3x_5 - x_4^2 \equiv - x_4^2 \pmod{x_5}$$
$$3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3 \equiv x_4^3 \pmod{x_5}$$
$$9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2 \equiv 3x_4^2(2x_2x_4 - x_3^2) \pmod{x_5}$$

montrent que μ, ν, ρ sont liés à λ', μ' par les relations

$$\mu = -(i\lambda')^2, \quad i\nu = (i\lambda')^3, \quad \rho = 3(i\lambda')^2\mu'. \tag{32}$$

Si $\mu \neq 0$ (donc $\nu \neq 0$), on en tire

$$\lambda' = -\frac{\nu}{\mu}, \quad \frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\rho}{3\nu}.$$

Les formules (30) résultent alors des formules (12) et la formule (31) de la formule (13). D'où (ii). D'autre part, (iii) résulte aussitôt des égalités (32). Enfin (iv) est immédiat.

11. Représentations unitaires irréductibles de $\Gamma_{5,6}$. Nous utilisons la table de multiplication de $\mathfrak{g}_{5,6}$ donnée au § 1. Soient $\mathfrak{h} = \mathbf{R}x_5$, Δ le sous-groupe correspondant de $\Gamma_{5,6}$. Il y a correspondance biunivoque entre les nombres réels λ et les caractères hermitiens χ de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}_{5,6})$. Cette correspondance est définie par la formule $\chi(x_5) = i\lambda$.

PROPOSITION 10. (i) *Si $\lambda \neq 0$, il existe une représentation unitaire irréductible U_λ de $\Gamma_{5,6}$ et (à une équivalence près) une seule dont le caractère prend la valeur $i\lambda$ en x_5. Elle opère dans $L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R}^2)$. Les vecteurs indéfiniment différentiables sont les éléments de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$. On a*

$$\begin{aligned} &U_\lambda(x_1) = D_1, \quad U_\lambda(x_2) = D_2 + i\lambda M_1M_2 + \tfrac{1}{6}i\lambda M_1^3, \\ &U_\lambda(x_3) = i\lambda M_2 + \tfrac{1}{2}i\lambda M_1, \quad U_\lambda(x_4) = i\lambda M_1^2, \quad U_\lambda(x_5) = i\lambda. \end{aligned} \tag{33}$$

Si γ est l'élément de $\Gamma_{5,6}$ de coordonnées $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)$, et si $f \in L_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{R}^2)$, on a

$$\begin{aligned} (U_\lambda(\gamma)f)(\theta_1, \theta_2) = [\exp i\lambda(\rho_5 - \rho_4\theta_1 + \tfrac{1}{2}\rho_2^2\theta_1^2 + \tfrac{1}{2}\rho_3\theta_1^2 - \tfrac{1}{6}\rho_2\theta_1^3 - \rho_3\theta_2 \\ - \rho_2\theta_1\theta_2)]f(\theta_1 + \rho_1, \theta_2 + \rho_2). \end{aligned} \tag{34}$$

Si $F \in L_{\mathbf{C}}^1(\Gamma_{5,6}) \cap L_{\mathbf{C}}^2(\Gamma_{5,6})$, on a

$$\int_{\Gamma_{5,6}} |F(\gamma)|^2 d\gamma = \int_{\lambda \neq 0} tr(U_\lambda(F)^* U_\lambda(F))\lambda^2 d\lambda. \tag{35}$$

(ii) *Si $\lambda = 0$, il existe une infinité de représentations unitaires irréductibles de $\Gamma_{5,6}$, deux à deux non équivalentes, dont le caractère prend la valeur $i\lambda$ en x_5. Ces représentations sont triviales sur Δ, et s'identifient aux représentations unitaires irréductibles de $\Gamma_{5,6}/\Delta$, qui est isomorphe à Γ_4.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{h}' = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_2$, qui est un idéal de $\mathfrak{g}_{5,6}$, et Δ' le sous-groupe correspondant de $\Gamma_{5,6}$. Alors, $\mathfrak{h}'$ est isomorphe à

$(\mathbf{R}x_2 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_5) \times (\mathbf{R}x_4)$; et $\mathbf{R}x_2 + \mathbf{R}x_3 + \mathbf{R}x_5$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_3$, avec $\mathbf{R}x_5$ pour centre. Les formules (33) et les assertions qui les précèdent s'obtiennent alors exactement comme pour $\Gamma_{5,3}$. La formule (34) résulte du calcul suivant:

$$\begin{aligned}(\theta, 0, 0, 0, 0)&(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5)\\ &= (\theta + \rho_1, \rho_2, \rho_3 - \rho_2\theta, \rho_4 - \rho_3\theta + \tfrac{1}{2}\rho_2\theta^2, \rho_5 - \rho_4\theta + \tfrac{1}{2}\rho_2^2\theta + \tfrac{1}{2}\rho_3\theta^2 - \tfrac{1}{6}\rho_2\theta^2)\\ &= (0, \rho_2, \rho_3 - \rho_2\theta, \rho_4 - \rho_3\theta + \tfrac{1}{2}\rho_2\theta^2, \rho_5 - \rho_4\theta + \tfrac{1}{2}\rho_2^2\theta + \tfrac{1}{2}\rho_3\theta^2 - \tfrac{1}{6}\rho_2\theta^3)\\ &\qquad\qquad (\theta + \rho_1, 0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Avec les notations de **(3)**, partie 2° de la démonstration du théorème 4, on a $F'(\lambda) = \lambda$ et $R_1(\lambda) = \lambda$; d'où (35). La partie (ii) de l'énoncé est évidente.

12. Un autre exemple. Dans tous les exemples précédents, on a trouvé un élément classifiant a appartenant au centre de l'algèbre de Lie étudiée. Ceci permettait de considérer les représentations dont le caractère s'annule en a comme des représentations d'un groupe quotient. Nous allons voir que, malheureusement, il n'en est pas ainsi en général.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle de dimension 7 dont la table de multiplication (avec les mêmes conventions qu'au § 1) est la suivante:

$$\begin{array}{lll}[x_1, x_2] = x_7, & [x_1, x_3] = x_6, & [x_1, x_4] = x_5,\\ [x_2, x_3] = x_5, & [x_2, x_4] = x_6, & [x_3, x_4] = x_7.\end{array}$$

Pour trouver $\mathfrak{J}(\mathfrak{g})$, nous avons à résoudre le système d'équations

$$\begin{array}{rrrrl} & x_7f'_{x_2} & + x_6f'_{x_3} & + x_5f'_{x_4} & = 0,\\ - x_7f'_{x_1} & & + x_5f'_{x_3} & + x_6f'_{x_4} & = 0,\\ - x_6f'_{x_1} & - x_5f'_{x_2} & & + x_7f'_{x_4} & = 0,\\ - x_5f'_{x_1} & - x_6f'_{x_2} & - x_7f'_{x_3} & & = 0.\end{array}$$

Le déterminant de ce système par rapport aux inconnues

$$f'_{x_1},\quad f'_{x_2},\quad f'_{x_3},\quad f'_{x_4}$$

n'est pas identiquement nul (il vaut $(x_5^2 + x_6^2 - x_7^2)^2$). D'où aussitôt $\mathfrak{J}(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}[x_5, x_6, x_7]$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}[x_5, x_6, x_7]$.

Soit Γ le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Par les mêmes méthodes que dans les paragraphes précédents, on peut montrer que $x_5^2 - x_6^2 + x_7^2$ est classifiant pour $\mathfrak{g}$. Nous n'aurons pas besoin de ce résultat; mais nous allons prouver ceci:

Proposition 11. *Soit χ un caractère hermitien de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ tel que $\chi(x_5^2 - x_6^2 + x_7^2) = 0$. Il existe une infinité de représentations unitaires irréductibles de Γ, deux à deux non équivalentes, admettant le caractère χ.*

Démonstration. Posons $\chi(x_5) = i\lambda$, $\chi(x_6) = i\mu$, $\chi(x_7) = i\nu$. On a donc $\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 = 0$. Distinguons trois cas:

(a) $\lambda = 0$, $\mu = \nu$. Soit $\mathfrak{h} = \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}(x_6 - x_7)$, qui est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soient y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 les images canoniques de x_1, x_2, x_3, x_4, x_6 dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; ces éléments forment une base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ par rapport à laquelle la table de multiplication de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est:

$$[y_1, y_2] = y_5, \qquad [y_1, y_3] = y_5, \qquad [y_2, y_4] = y_5, \qquad [y_3, y_4] = y_5.$$

On voit que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est isomorphe à $\mathbf{R}(y_2 - y_3) \times \mathbf{R}(y_1 + y_4) \times (\mathbf{R}y_1 + \mathbf{R}y_2 + \mathbf{R}y_5)$; et $\mathbf{R}y_1 + \mathbf{R}y_2 + \mathbf{R}y_5$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_3$ avec $\mathbf{R}y_5$ pour centre; il existe donc une infinité de représentations unitaires irréductibles de Γ' (groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$), deux à deux non équivalentes, dont le caractère prend une valeur donnée imaginaire pure en y_5. Par suite, il existe une infinité de représentations unitaires irréductibles de Γ, deux à deux non équivalentes, dont le caractère prend les valeurs $i\mu$ en x_6, 0 en x_5, 0 en $x_6 - x_7$. D'où la proposition dans ce cas.

(b) $\lambda = 0$, $\mu = -\nu$. La démonstration est analogue à celle qu'on vient d'utiliser dans le cas (a).

(c) $\lambda \neq 0$. Soit $\mathfrak{h}' = \mathbf{R}x_4 + \mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_6 + \mathbf{R}x_7 + \mathbf{R}(\lambda x_2 - \mu x_1) + \mathbf{R}(\lambda x_3 - \nu x_1)$, qui est un idéal de $\mathfrak{g}$ de dimension 6. Soit Δ le sous-groupe de Γ correspondant à $\mathfrak{h}'$. Alors, $[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}']$ est engendré par

$$\begin{aligned} z_1 &= [\lambda x_2 - \mu x_1, x_4] = \lambda x_6 - \mu x_5, \\ z_2 &= [\lambda x_3 - \nu x_1, x_4] = \lambda x_7 - \nu x_5, \\ z_3 &= [\lambda x_2 - \mu x_1, \lambda x_3 - \nu x_1] = \lambda(\lambda x_5 - \mu x_6 + \nu x_7). \end{aligned}$$

Soient α, β, γ des nombres réels. Soit ϕ la forme linéaire sur $\mathfrak{h}'$ telle que $\phi(\lambda x_2 - \mu x_1) = i\alpha$, $\phi(\lambda x_3 - \nu x_1) = i\beta$, $\phi(x_4) = i\gamma$, $\phi(x_5) = i\lambda$, $\phi(x_6) = i\mu$, $\phi(x_7) = i\nu$. On a

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &= i\lambda\mu - i\lambda\mu = 0 \\ \phi(z_2) &= i\lambda\nu - i\lambda\nu = 0 \\ \phi(z_3) &= \lambda(i\lambda^2 - i\mu^2 + i\nu^2) = 0. \end{aligned}$$

Donc ϕ est nulle sur $[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}']$. Donc il existe une représentation unitaire $U'_{\alpha,\beta,\gamma}$ de dimension 1 de Δ correspondant à ϕ. Soit $U_{\alpha,\beta,\gamma}$ la représentation unitaire de Γ induite par $U'_{\alpha,\beta,\gamma}$. En utilisant soit les méthodes des paragraphes précédents, soit le théorème 6; 2 de **(1)**, il est facile de voir que $U_{\alpha,\beta,\gamma}$ est irréductible (compte tenu du fait que $\lambda \neq 0$). D'autre part, le caractère de $U_{\alpha,\beta,\gamma}$ a même restriction à $\mathbf{R}x_5 + \mathbf{R}x_6 + \mathbf{R}x_7$ que le caractère de $U'_{\alpha,\beta,\gamma}$ **(3**, Lemme 23**)**. Le caractère de $U_{\alpha,\beta,\gamma}$ est donc χ. Pour achever la démonstration, nous allons prouver que les représentations $U_{\alpha,\beta,\gamma}$ correspondant à deux valeurs distinctes de α sont non équivalentes. Pour cela observons que

$$\begin{aligned} &[x_1, \lambda x_2 - \mu x_1 - \nu x_4] = \lambda x_7 - \nu x_5 \\ &[x_1, \lambda x_7 - \nu x_5] = 0 \\ &U'_{\alpha,\beta,\gamma}(\lambda x_2 - \mu x_1 - \nu x_4) = i(\alpha - \nu\gamma) \,.\, 1 \\ &U'_{\alpha,\beta,\gamma}(\lambda x_7 - \nu x_5) = (i\lambda\nu - i\lambda\nu) \,.\, 1 = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte (**3**, Lemme 31) que $U_{\alpha,\beta,\gamma}\,(\lambda x_2 - \mu x_1 - \nu x_4) = i(\alpha - \nu\gamma)\,.\,1$, ce qui prouve notre assertion.

COROLLAIRE. *Il n'existe pas, dans le centre de* $\mathfrak{g}$, *d'élément classifiant pour* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un élément non nul $\rho x_5 + \rho' x_6 + \rho'' x_7$ dans le centre de $\mathfrak{g}$ qui soit classifiant pour $\mathfrak{g}$. Soient λ, μ, ν, des nombres réels tels que $\rho\lambda + \rho'\mu + \rho''\nu \neq 0$, $\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 = 0$. Soit χ le caractère de $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ tel que $\chi(x_5) = i\lambda$, $\chi(x_6) = i\mu$, $\chi(x_7) = i\nu$. On a $\chi(\rho x_5 + \rho' x_6 + \rho'' x_7) \neq 0$, donc χ correspond à une représentation unitaire irréductible de Γ et à une seule (à une équivalence près). Mais $\chi(x_5{}^2 - x_6{}^2 + x_7{}^2) = 0$, ce qui contredit la proposition 11. D'où le corollaire.

13. La formule de Plancherel dans les groupes de Lie nilpotents non simplement connexes. Nous avons montré dans (**3**) que les théorèmes 1, 2, 3 de (**3**) s'étendent facilement aux groupes de Lie nilpotents non simplement connexes. Montrons maintenant que le théorème 4 de (**3**) ne se généralise pas de la même façon.

Considérons, dans Γ_4, le sous-groupe Z des éléments de coordonnées $(0, 0, 0, \rho_4)$, où ρ_4 est un entier rationnel. Ce sous-groupe est discret central. Soit $\Gamma_4' = \Gamma_4/Z$. Les représentations unitaires irréductibles de Γ_4' s'identifient aux représentations unitaires irréductibles de Γ_4 dont le caractère prend en x_4 des valeurs de la forme $2i\pi\tau$, avec τ entier rationnel. Celles de ces représentations qui sont déterminées (à une équivalence près) par leur caractère sont les représentations notées, dans la proposition 4, $U_{2\pi\tau,\mu}$ avec τ entier rationnel $\neq 0$.

Or, nous allons voir que, pour toute fonction intégrable F sur Γ_4' constante sur les classes suivant le centre (compact) de Γ_4', et pour tout entier rationnel $\tau \neq 0$, on a $U_{2\pi\tau,\mu}(F) = 0$. Ceci prouvera qu'une "formule de Plancherel" pour Γ_4' doit faire intervenir des représentations unitaires irréductibles de Γ_4' non déterminées par leurs caractères.

Comme coordonnées sur Γ_4', nous utiliserons les coordonnées ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 déduites des coordonnées de même nom sur Γ_4 par passage au quotient: ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont des nombres réels, et ρ_4 est un nombre réel modulo 1. Si $f \in L_{\mathbf{C}}{}^2(\mathbf{R})$ on a, d'après (13), et en posant $\lambda = 2\pi\tau$:

$$\begin{aligned}(U_{2\pi\tau,\mu}(F)f)(\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{1} F(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \\ &\qquad \left[\exp i\left(-\tfrac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda}\rho_2 + \lambda\rho_4 - \lambda\rho_3\theta + \tfrac{1}{2}\lambda\rho_2\theta^2\right)\right] f(\theta + \rho_1)\,d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\rho_4 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\rho_1, \rho_2, \rho_3)\left[\exp i\left(-\tfrac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda}\rho_2 - \lambda\rho_3\theta + \tfrac{1}{2}\lambda\rho_2\theta^2\right)\right] \\ &\qquad f(\theta + \rho_1)\,d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \int_0^1 (\exp i\lambda\rho_4)\,d\rho_4.\end{aligned}$$

Comme τ est entier $\neq 0$, on a

$$\int_0^1 (\exp 2i\pi\tau\rho_4)d\rho_4 = 0,$$

donc

$$(U_{2\pi\tau,\mu}(F)f)(\theta) = 0.$$

D'où notre assertion.

BIBLIOGRAPHIE

1. F. Bruhat, *Sur les représentations induites des groupes de Lie*, Bull. Soc. Math. France, *84* (1956), 97–205.
2. J. Dixmier, *Sur les algèbres dérivées d'une algèbre de Lie*, Proc. Camb. Phil. Soc., *51* (1955), 541–544.
3. J. Dixmier, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, II. Bull. Soc. Math. France,*85* (1957), 325–388.
4. R. Godement, *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires*, J. Math. pures et appl., *30* (1951), 1–110.
5. G. W. Mackey, *Imprimitivity for representations of locally compact groups*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., *35* (1941), 537–545.
6. J. von Neumann, *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren*, Math. Ann., *104* (1931), 570–578.
7. G. Vranceanu, *Classificarea grupurilor lui Lie de rang zero*, Acad. Rep. Pop. Rom., Stud. Cerc. Mat., *1* (1950), 40–86.
8. R. Weitzenbock, *Ueber die Invarianten von linearen Gruppen*, Acta Math., *58* (1932), 231–293.

Institut H. Poincaré
Paris