Canad. Math. Bull. Vol. 17 (4), 1974

UNE REMARQUE SUR L'INTERPOLATION DES FONCTIONS ENTIERES

PAR
ANDRÉ GIROUX

Considérons une fonction entière $f(z)$ de type exponentiel T. Il est bien connu (voir [1]) que si le module de $f(z)$ reste borné le long de l'axe réel, on a

$$f'(x) = T\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}f\left(x+\frac{2n+1}{2T}\pi\right) \tag{1}$$

pour tout x réel. Des formules d'interpolation telles que celle-ci ont été utilisées avec succès pour résoudre divers problèmes en théorie des fonctions ou ailleurs (voir, par exemple, [2] et [3]). Le but de cette note est de montrer que la formule (1) caractérise les fonctions entières de type exponentiel. De façon précise, on a le théorème suivant.

THÉORÈME. *Soit $f(x)$ une fonction dérivable et de module borné sur l'axe réel. Supposons que pour tout x réel on ait*

$$f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,d\mu(t), \tag{2}$$

μ étant une mesure borélienne signée sur l'axe réel. Alors $f(x)$ est la restriction à l'axe réel d'une fonction entière de type exponentiel T et $T \leq \operatorname{Var}\mu$, la variation totale de la mesure μ; on suppose bien sûr, que $\operatorname{Var}\mu < +\infty$.

Démonstration. Nous allons vérifier que $f'(x)$ est dérivable et de module borné sur l'axe réel et qu'elle y satisfait l'équation de convolution

$$f''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x-t)\,d\mu(t).$$

Tout d'abord, en vertu de (2),

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|f'(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-t)|\,d\,|\mu|\,(t) \leq \sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)|\cdot\operatorname{Var}\mu$$

de telle sorte que $f'(x)$ est bornée. Cette fonction est aussi continue puisque

$$|f'(x)-f'(y)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x-t)-f(y-t)|\,d\,|\mu|\,(t)$$

et qu'en vertu du théorème de Lebesgue sur la convergence majorée, l'intégrale tend vers zéro avec $|x-y|$. Enfin, le théorème des accroissements finis montre

https://doi.org/10.4153/CMB-1974-109-3 Published online by Cambridge University Press

que

$$\operatorname{Re}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}\frac{f(x+h-t)-f(x-t)}{h}\,d\mu(t)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re} f'(x+\theta h-t)\,d\mu(t)$$

où $\theta=\theta(t, h)$ est un nombre compris entre 0 et 1. On a une équation correspondante pour

$$\operatorname{Im}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}.$$

Puisque $f'(x)$ est continue et bornée, le théorème de Lebesgue déjà cité nous permet de conclure que

$$f''(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x-t)\,d\mu(t).$$

Par récurrence sur n, on voit que l'on a

$$f^{(n)}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n-1)}(x-t)\,d\mu(t).$$

et

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(n)}(x)|\le \sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)|\cdot(\operatorname{Var}\mu)^n.$$

Par suite le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

est infini et la fonction $f(x)$ est en réalité la restriction à l'axe réel d'une fonction entière. Comme

$$|f(x+iy)|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}|iy|^n\le \sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)|\,e^{\operatorname{Var}\mu\cdot|y|}$$

on voit que cette fonction est de type exponentiel T et que $T\le\operatorname{Var}\mu$. Ceci complète la démonstration.

Bibliographie

1. R. P. Boas, Jr., *Entire Functions*, Academic Press, 1954, New York.

2. A. Browder, *On Bernstein's Inequality and the Norm of Hermitian Operators*, Math. Monthly **78** (1971), 871–873.

3. Q. I. Rahman, *On Asymmetric Entire Functions II*, Math. Annalen **167** (1966), 49–52.

Département de Mathématiques
Université de Montréal

https://doi.org/10.4153/CMB-1974-109-3 Published online by Cambridge University Press