Canad. Math. Bull. Vol. **43** (1), 2000 pp. 126–128

Sur l'annulation de certains modules de cohomologie d'André-Quillen

José J. M. Soto

Abstract. Soient A un anneau noethérien, B un anneau régulier essentiellement de type fini sur A. Si la cohomologie d'André-Quillen $H^q(A,B,B) = 0$ pour tout $q \geq 2$ alors A est un anneau régulier.

Dans cette note les anneaux considérés seront supposés commutatifs. Soient A un anneau, B une A-algèbre, M un B-module. Considérons les B-modules d'homologie $H_i(A,B,M)$ et de cohomologie $H^i(A,B,M)$ d'André-Quillen [1], [5]. J. Herzog [4] a posé la conjecture suivante:

Conjecture Soit R un anneau local noethérien, I un idéal de R, et $S = R/I$. Supposons l'anneau R régulier. Si $H_q(R,S,S) = 0$ pour tout $q \geq 2$ alors S est un anneau d'intersection complète.

Considérons le case où l'hypothèse d'anneau régulier est sur S au lieu de sur R. Nous pouvons considérer la question: soit A un anneau noethérien, B une A-algèbre essentiellement de type fini qui est un anneau régulier. Supposons que $H_q(A,B,B) = 0$ pour tout $q \geq 2$. Alors, est A un anneau d'intersection complète? La réponse est affirmative: nous pouvons supposer A et B locaux, K et L leurs corps résiduels, et l'homomorphisme $A \to B$ local. Grâce à la suite spectrale du coefficient universel $E^2_{p,q} = \operatorname{Tor}^B_p\big(H_q(A,B,B,),L\big) \Rightarrow H_{p+q}(A,B,L)$, nous avons $H_n(A,B,L) = 0$ pour tout n assez grand. Alors il découle d'appliquer [1, 5.1, 6.26 et 7.4] au carré

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & L \end{array}$$

que $H_n(A,K,K) = 0$ pour tout $n \gg 0$. Un résultat important de L. .L Avramov [2] assure que A est un anneau d'intersection complète.

Nous considérons ici la question dans cohomologie. Nous obtenons que si $H^q(A,B,B) = 0$ pour tout $q \geq 2$, alors A non seulement est d'intersection complète mais encore régulier (Corollaire 3), et que si $H^q(A,B,B) = 0$ pour tout $q \geq 1$ alors B est une A-algèbre lisse (Corollaire 4). Les réciproques sont aussi valables.

Lemme 1 *Soient A un anneau noethérien, B une A-algèbre essentiellement de type fini et M un B-module de dimension injective finie. Alors il existe une suite spectrale convergente du deuxième quadrant*

$$E^2_{p,q} = \operatorname{Ext}^{-p}_B\big(H^q(A,B,B),M\big) \Rightarrow H_{p+q}(A,B,M).$$

Reçu par les éditeurs le 18 février, 1998.
Classification (AMS) par sujet: 13D03.

Preuve Soit $(\mathbb{L}_{B|A})_*$ un complexe de B-modules projectifs de type fini, homotope au complexe cotangent de la A-algèbre B [5, 4.12]. Soit $M \to I_0 \to I_1 \to \cdots$ une résolution injective du B-module M. Considérons le complexe double $C_{*,*}$ du deuxième quadrant, avec

$$C_{p,q} = \operatorname{Hom}_B\Big(\operatorname{Hom}_B\big((\mathbb{L}_{B|A})_q, B\big), I_{-p}\Big).$$

Comme les lignes $C_{*,q}$ sont acycliques, il est facile de voir que l'homologie du complexe simple somme directe associé $\operatorname{Tot}^{\oplus}(C_{*,*})$ est l'homologie du complexe

$$\operatorname{Hom}_B\Big(\operatorname{Hom}_B\big((\mathbb{L}_{B|A})_*, B\big), M\Big) = (\mathbb{L}_{B|A})_* \otimes_B M,$$

autrement dit, $H_i\big(\operatorname{Tot}^{\oplus}(C_{*,*})\big) = H_i(A, B, M)$; en particulier elle est indépendante du complexe $(\mathbb{L}_{B|A})_*$ choisi.

D'autre part, la suite spectrale associée à la filtration par colonnes, avec

$$E^2_{p,q} = \operatorname{Ext}_B^{-p}\big(H^q(A, B, B), M\big)$$

est faiblement convergente à l'homologie de $\operatorname{Tot}^{\Pi}(C_{*,*})$ (complexe simple produit associé). D'après l'hypothèse sur M, nous pouvons choisir I_* de longueur finie; il s'en suit que $\operatorname{Tot}^{\Pi}(C_{*,*}) = \operatorname{Tot}^{\oplus}(C_{*,*})$, et que cette suite spectrale est convergente.

Proposition 2 *Soient A un anneau noethérien, B une A-algèbre essentiellement de type fini et M un B-module de dimension injective finie. S'il existe un entier $s \geq 0$ tel que*

$$\operatorname{Ext}_B^n\big(H^{n+s}(A, B, B), M\big) = 0 \quad \textit{pour } n \geq 0$$

alors $H_s(A, B, M) = 0$.

Corollaire 3 *Soient A un anneau noethérien, B un anneau régulier essentiellement de type fini sur A. Soit $d \leq \infty$ la dimension de Krull de B. Si $H^i(A, B, B) = 0$ pour $2 \leq i \leq d + 2$, alors A est un anneau régulier.*

Preuve Nous pouvons supposer A et B locaux, K et L leurs corps résiduels, et l'homomorphisme $A \to B$ local [1, 4.59 et 5.27]. Comme B est régulier de dimension d, on a $\operatorname{Ext}_B^n(\text{-},\text{-}) = 0$ pour $n > d$. Alors il résulte de la Proposition 2, des suites de Jacobi-Zariski [1, 5.1] pour $A \to B \to L$, $A \to K \to L$, et de [1, 7.4, 6.26], que A est régulier.

Corollaire 4 *Soient A un anneau noethérien, B un anneau régulier essentiellement de type fini sur A. Soit $d \leq \infty$ la dimension de Krull de B. Si $H^i(A, B, B) = 0$ pour $1 \leq i \leq d + 1$, alors B est lisse sur A.*

Preuve Appliquez la Proposition 2, [1, 4.57] et [5, 5.5].

Nous finissons avec un lemme qui peut être utile dans le contexte de l'homologie d'André-Quillen. Soient A un anneau noethérien, B une A-algèbre essentiellement de type fini et $s \geq 1$ un entier. Considérons la suivante condition:

(C_s) $\qquad H^s(A, B_{\mathfrak{q}}, B_{\mathfrak{q}}) = 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_B(B)$.

https://doi.org/10.4153/CMB-2000-019-1 Published online by Cambridge University Press

Cette condition est remplie si $B_{\mathfrak{q}}$ est une A-algèbre lisse pour tout $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_B(B)$; c'est le cas si A est un corps et B une A-algèbre géométriquement réduite.

Lemme 5 *Si la condition* (C_s) *est satisfaite,* B *est un anneau Gorenstein de dimension* d*, et* $H^i(A,B,B) = 0$ *pour* $s+1 \leq i \leq s+d$*, alors* $H_s(A,B,B) = 0$*.*

Preuve Compte tenu de [1, 4.59, 5.27] et de l'égalité [3, Section 1, n° 4, Proposition 10, p. 138]

$$\mathrm{Ass}_B\Big(\mathrm{Hom}_B\big(H^s(A,B,B),B\big)\Big) = \mathrm{Supp}_B\big(H^s(A,B,B)\big) \cap \mathrm{Ass}_B(B)$$

l'hypothèse (C_s) implique $\mathrm{Hom}_B\big(H^s(A,B,B),B\big) = 0$ [3, Section 1, n° 1, Corollaire 1 de la Proposition 2, p. 132]. D'autre part, les dernières hypothèses impliquent $\mathrm{Ext}^n_B\big(H^{n+s}(A,B,B),B\big) = 0$ pour $n \geq 1$. La Proposition 2 nous permet de conclure.

Dans le case particulier où A est un corps, B une A-algèbre géométriquement réduite et intersection complète, ce dernier lemme pour le cas $s = 1$ (le plus intéressant) est bien connu [1, p 328].

Références

[1] M. André, *Homologie des Algèbres Commutatives.* Springer, 1974.
[2] L. L. Avramov, *Local rings of finite simplicial dimension.* Bull. Amer. Math. Soc. **10**(1984), 289–291.
[3] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative.* Chapitre 3. Hermann, 1967.
[4] J. Herzog, *Homological properties of the module of differentials.* Atas da 6^a Escola de Algebra, 33–64. IMPA, Rio de Janeiro, 1980.
[5] D. Quillen, *On the (co-)homology of commutative rings.* Proc. Sympos. Pure Math. **17**(1970), 65–87.

Departamento de Álgebra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Santiago de Compostela
E-15771 Santiago de Compostela
Espagne