J. Austral. Math. Soc. (*Series A*) **33** (1982), 394–400

SUR LES MESURES CONIQUES LOCALISABLES

RICHARD BECKER

(Received 13 August 1981)

Communicated by R. Vyborny

Abstract

Let X be a weakly complete proper cone, contained in an Hausdorff locally convex space E, with continuous dual E'. A positive linear form on the Risz space of functions on X generated by E' is called a conical measure on X. Let $M^+(X)$ be the set of all conical measures on X. G. Choquet asked the question: when is every conical measure on X given by a Radon measure on $(X \setminus 0)$? Let $\mathfrak{L}$ be the class of such X. In this paper we show that the fact that $X \in \mathfrak{L}$ only depends, in some sense, on the cofinal subsets of the space $E'|_X$ ordered by the order of functions on X. We derive that $X \in \mathfrak{L}$ is equivalent to $M^+(M) \in \mathfrak{L}$. We show that $\mathfrak{L}$ is closed under denumerable products.

1980 *Mathematics subject classification* (*Amer. Math. Soc.*): 46 A 55.

Soit E un espace faible séparé, de dual E', et X un cône convexe saillant et faiblement complet contenu dans E (class $\mathfrak{S}$). G. Choquet a posé la question de savoir quand toute mesure conique $\mu \geqslant 0$ ([2], Sections 30, 38, 40) sur X était localisable en une mesure de Radon généralisée sur $(X \setminus 0)$ (c'est à dire: existe t-il une famille de compacts $K_i \subset (X \setminus 0)$ et une famille de mesures de Radon $m_i \geqslant 0$, où m_i est portée par K_i, telle que $\mu = \Sigma\, m_i$).

On notera $\mathfrak{L}$ la classe des cônes de $\mathfrak{S}$ qui possèdent cette propriété.

Nous allons montrer ici, qu'en un certain sens, le fait que $X \in \mathfrak{L}$ ne dépend que des parties cofinales du polaire E'_+ de X.

Au paragraphe 6, on en déduira une conséquence intéressante: si $M^+(X)$ désigne le cône des mesures coniques $\geqslant 0$ sur X, on a:

$$(X \in \mathfrak{L}) \Leftrightarrow (M^+(X) \in \mathfrak{L}).$$

Un cas particulier bien connu est celui où l'origine admet, dans X, une base dénombrable de voisinages (classe $\mathfrak{S}_D$); alors on a aussi $M^+(X) \in \mathfrak{S}_D$; les cônes de $\mathcal{S}_D$ sont bien coiffés au sens de G. Choquet ([2] 30, 16, 17, 18) et les mesures coniques $\geqslant 0$ qu'ils portent sont localisables en des mesures de Radon $\geqslant 0$, sur des compacts de ces cônes.

Nous allons d'abord nous placer dans le cadre des cônes faiblement complets.

1. Lemme. *Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{S}$, contenus dans des e.l.c.s. E et F, et φ une application linéaire continue de E dans F, telle que $\varphi(X) \subset Y$.*

Si, pour tout compact $K \subset Y$, on a $\varphi^{-1}(K) \cap X$ compact, alors, pour toute $\lambda \in M^+(X)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

1) *λ est localisable en une mesure de Radon généralisée sur $X \setminus 0$.*

2) *$\varphi(\lambda)$ est localisable en une mesure de Radon généralisée sur $Y \setminus 0$.*

Preuve. 1) $\Rightarrow$ 2). Est presque évident (voir E. Thomas [5]).

2) $\Rightarrow$ 1). Comme $Y \in \mathcal{S}$, tout compact de Y est contenu dans un convexe compact de Y. Il en résulte que toute mesure conique $\geqslant 0$ sur Y, localisable en une mesure de Radon généralisée sur $Y \setminus 0$ est sup. de mesures coniques localisables sur des convexes compacts de $Y \setminus 0$.

On suppose d'abord que $\varphi(\lambda)$ est localisable sur un convexe compact K de $Y \setminus 0$: on sait qu'on peut supposer $K \subset u^{-1}(1)$, où $u \in F'$. Soit $K' = \varphi^{-1}(K) \cap X$; par hypothèse, c'est un convexe compact de $X \setminus 0$, contenu dans $v^{-1}(1)$ où $v = u \circ \varphi$ est un élément de E'. Alors λ est limite de mesures coniques discrètes ([2] 30.9) $\Sigma_1^n \varepsilon_{r(\lambda_i)}$ avec des $\lambda_i \in M^+(X)$ vérifiant $\Sigma_1^n \lambda_i = \lambda$ et $\lambda_i \neq 0$.

Notons que $(\lambda_i \neq 0) \Rightarrow (\varphi(\lambda_i) \neq 0)$, puisque $\varphi^{-1}(0) \cap X = (0)$. Or on a $\Sigma_1^n \varepsilon_{r(\lambda_i)} = \Sigma_i^n \lambda_i(v).\ \varepsilon_{r(\lambda_i)}/\lambda_i(v)$; le dernier Σ peut s'inter-prêter comme une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur K' puisque $\lambda_i(v) = \varphi(\lambda_i)(u) > 0$, $\Sigma_1^n \lambda_i(v) = \lambda(u)$ et que $\varepsilon_{r(\lambda_i)}/\lambda_i(v) \in K'$. D'où une localisation de λ sur K', en passant à la limite.

Pour passer au cas général, il reste à montrer que toute $\lambda \in M^+(X)$, vérifiant 2ème), peut s'écrire $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ avec $\lambda_1 \neq 0$ et $\varphi(\lambda_1)$ localisable sur un convexe compact de $Y \setminus 0$. Pour cela, il suffit d'utiliser le lemme suivant:

2. Lemme. *Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{S}$, contenus dans des e.l.c.s. E et F, et φ une application linéaire continue de E dans F, telle que $\varphi(X) \subset Y$. Soient $\lambda \in M^+(X)$ et $\mu = \varphi(\lambda)$. Pour toute décomposition de μ en $\mu_1 + \mu_2$, il existe une décomposition de λ en $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ telle que $\mu_1 = \varphi(\lambda_1)$ et $\mu_2 = \varphi(\lambda_2)$.*

Preuve. Désignons par $h(X)$ et $h(Y)$ les treillis de fonctions sur X et Y engendrés par $E'|_X$ et $E'|_Y$. On se place dans $h(X) \times h(X)$; soit p la forme sous-linéaire définie sur cet espace, à valeurs dans $R \cup (+\infty)$, telle que:

$$p(f_1, f_2) = \inf(\mu_1(g_1);\ g_1 \in h(Y), g_1 \circ \varphi \geqslant f_1) + \inf(\mu_2(g_2) \colon g_2 \in h(Y), g_2 \circ \varphi \geqslant f_2).$$

On voit que $(f_1, f_2 \leqslant 0) \Rightarrow (p \leqslant 0)$. Soit $\tilde{\lambda}$ définie sur la diagonale de $h(X) \times h(X)$ par: $\tilde{\lambda}(f, f) = \lambda(f)$; on voit que $\tilde{\lambda}$ est majorée par p.

D'après la version du théorème de Hahn-Banach due à Dinges [3] (voir aussi [1]), $\tilde{\lambda}$ se prolonge en une forme linéaire λ sur $h(X) \times h(X)$, majorée par p, telle que $\hat{\lambda}(f_1, f_2) = \lambda_1(f_1) + \lambda_2(f_2)$. Il est clair que $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, puisque, pour toute $f \in h(X)$ on a $p(f, 0) \leqslant 0$ et $p(0, f) \leqslant 0$. Montrons que $\varphi(\lambda_1) = \mu_1$ et $\varphi(\lambda_2) = \mu_2$:

Soit $f \in h(Y)$; on a $\varphi(\lambda_1)(f) = \lambda_1(f \circ \varphi) \leqslant p(f \circ \varphi, 0) \leqslant \mu_1(f)$; d'où $\mu_1(f) = \lambda_1(f \circ \varphi)$ soit $\varphi(\lambda_1) = \mu_1$.

Nous allons indiquer un cas particulier intéressant dans lequel les conditions du Lemme 1 sont vérifiées.

3. PROPOSITION. *Soient X et Y deux éléments de $\mathfrak{S}$, contenus dans des e.l.c.s. E et F, et φ une application linéaire continue de E dans F, telle que $\varphi(X) \subset Y$. On suppose que dans E' ordonné par X°, $\varphi^t(F')$ est cofinal à X°. Alors φ est propre.*

PREUVE. Il faut prouver que φ est fermée et que l'image réciproque par φ de tout compact est compact.

L'assertion concernant les compacts résulte du fait que, pour toute partie A d'un cône de $\mathfrak{S}$, on a (A compact) $\Leftrightarrow$ (A fermé et borné).

Montrons que φ est fermée: soient A un fermé de X et $b \in \overline{\varphi(A)}$; il existe un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur A, tel que $\lim(\varphi(\mathfrak{U})) = b$. Grâce à l'hypothèse de cofinalité, on voit que, pour toute $l \in E'$, il existe une partie $U \in \mathfrak{U}$ telle que l soit bornée sur U. Donc $\mathfrak{U}$ converge vers un élément $c \in A$, tel que $\varphi(c) = b$.

4. COROLLAIRE. *Les hypothèses étant les mêmes que celles de la proposition 3, on suppose de plus φ surjective. On a alors $(X \in \mathfrak{L}) \Leftrightarrow (Y \in \mathfrak{L})$.*

PREUVE. D'après le lemme 1, il suffit de prouver que, pour toute $\mu \in M^+(Y)$, il existe $\lambda \in M^+(X)$ avec $\mu = \varphi(\lambda)$.

Par l'application $(f \in h(Y)) \rightsquigarrow (f \circ \varphi \in h(X))$ on voit que, φ étant surjective, $h(Y)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel cofinal de $h(X)$, puisque $E'|_X$ est cofinal dans $h(X)$ ([2], 30.13). Il suffit alors d'appliquer le théorème de Hahn-Banach, pour avoir l'existence de λ.

Nous allons maintenant nous placer dans le cadre des espaces vectoriels ordonnés.

Nous allons maintenant présenter un schéma différent mais entièrement équivalent à celui du corollaire 4.

On se donne un espace vectoriel V (sans topologie), ordonné par un cône convexe saillant A, fermé pour la topologie faible la plus fine de V, c'est à dire $\sigma(V, V^*)$, et tel que $V = A - A$.

Soit W un sous-espace vectoriel de V, tel que, en posant $B = W \cap A$, on ait $W = B - B$ et B cofinal à A.

REMARQUE. L'équivalence de ce schéma avec celui du corollaire 4 se constate en prenant $V = E'$, $A = X^\circ$, $W = \varphi'(F')$.

5. THEOREME. *Les cônes $A^\circ \subset V^*$ et $B^\circ \subset W^*$ appartiennent à $\mathfrak{S}$, lorsque V^* et W^* sont munis de $\sigma(V^*, V)$ et de $\sigma(W^*, W)$. On a $(A^\circ \in \mathfrak{L}) \Leftrightarrow (B^\circ \in \mathfrak{L})$.*

PREUVE. Les cônes A° et B° sont évidemment complets; le fait qu'ils sont saillants résulte des relations $V = A - A$ et $W = B - B$.

Soit φ l'application canonique de A° dans B°, telle que pour tout $u \in A^\circ$, l'élément $v = \varphi(u)$ vérifie $v(b) = u(b)$ pour tout $b \in B$.

Comme B est cofinal à A, d'après le théorème de Hahn-Banach, φ est surjective; on peut alors appliquer le corollaire 4 avec $X = A^\circ$, $Y = B^\circ$ et φ.

6. COROLLAIRE. *Soit $X \in \mathfrak{S}$; on a $(X \in \mathfrak{L}) \Leftrightarrow (M^+(X) \in \mathfrak{L})$.*

PREUVE. On applique le théorème 5, en prenant $A = h(X)$ et $B = E'|_X$; on a alors $A^\circ = M^+(X)$ et $B^\circ = X$.

7. REMARQUE. L'image de X dans $M^+(X)$ par l'application $x \rightsquigarrow \varepsilon_x$ n'étant pas convexe, l'implication $(M^+(X) \in \mathfrak{L}) \Rightarrow (X \in \mathfrak{L})$ n'est pas triviale.

Nous allons maintenant donner une caractérisation (§12) des chapeaux (§8) d'un cône $M^+(X)$; nous en déduirons une caractérisation topologique des cônes $M^+(X)$ qui sont éléments de $\mathfrak{L}$ (§13).

Nous terminerons par un résultat indépendant: La classe $\mathfrak{L}$ est stable par produit dénombrable.

8. DEFINITIONS. Soit $X \in \mathfrak{S}$; on dit que $K \subset X$ est un chapeau de X ([2], 30.16, 17, 18) lorsque K est un convexe compact de X, tel que que $X \setminus K$ soit convexe. On dit que X est bien coiffé lorsque X est la réunion de ses chapeaux. On dit que X est presque bien coiffé lorsque tout point de X est limite filtrante croissante de points contenus dans des chapeaux de X.

Si, de plus, X est réticulé, on sait que X est presque bien coiffé dès que tout point de X est sup. de points contenus dans des chapeaux de X ([4], 2.19).

9. Remarque. Il est bien connu que, si X est bien coiffé, alors $X \in \mathfrak{L}$. Par contre (X presque bien coiffé) n'entraine pas ($X \in \mathfrak{L}$): en effet, $(\mathfrak{R}^+)^I$ est presque bien coiffé pour tout I; si on avait $(\mathfrak{R}^+)^I \in \mathfrak{L}$ pour tout I, alors tout $X \in \mathfrak{L}$ serait dans $\mathfrak{L}$, puisque tout $X \in \mathfrak{S}$ se plonge dans un $(\mathfrak{R}^+)^I$ ([2], 30.10).

Cependant, on va voir au §13 que l'on a, si $X \in \mathfrak{S}$, $(M^+(X) \in \mathfrak{L}) \Leftrightarrow (M^+(X)$ presque bien coiffé).

Nous allons donner une caractérisation des chapeaux de $M^+(X)$, pour un cône $X \in \mathfrak{S}$.

10. Notations. Soit $X \in \mathfrak{S}$ et Y un exemplaire de $M^+(X)$.

Soit φ l'application canonique de Y sur X définie par $\varphi(\mu) = r(\mu) =$ (résultante de μ); on note encore φ l'application induite par φ de $M^+(Y)$ dans $M^+(X)$. Il importe de ne pas confondre, pour $\pi \in M^+(Y)$, les deux éléments $r(\pi) \in Y$ et $\varphi(\pi) \in M^+(X)$.

11. Proposition. *Soit $\mu \in M^+(X)$; il existe $\pi \in M^+(Y)$ telle que l'on ait (par abus de langage) $\varphi(\pi) = r(\pi) = \mu$. On peut prendre pour π, la mesure maximale sur Y qui représente $\mu \in Y$.*

Preuve. Si $\mu = \lim_{\mathfrak{U}} \Sigma\, \varepsilon_x$, on vérifie que $\pi = \lim_{\mathfrak{U}} \Sigma\, \varepsilon_{\varepsilon_x}$ convient.

12. Proposition. *Soit K une partie de $M^+(X)$; les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

a) *K est un chapeau de $M^+(X)$.*

b) *Il existe une partie compacte A de X telle que*
$K = (\mu$: *μ localisable sur A en une mesure de Radon* $\geqslant 0$ *de masse* $\leqslant 1)$.

Preuve. a) $\Leftrightarrow$ b). On va voir qu'on peut prendre $A = \varphi(K \cap (\varepsilon_x;\ x \in X))$. Désignons par K_A le second membre de l'égalité dans b).

1) Soit $\mu \in K$; elle est représentée dans Y par une mesure maximale π sur Y (voir §11); on représente ([2], 30.16, 17, 18) π par une mesure de Radon $m \geqslant 0$, de masse $\leqslant 1$, sur le compact $K \cap (\varepsilon_x;\ x \in X)$; alors $\mu \in M^+(X)$ sera représentée par $\varphi(m)$, qui est une mesure de Radon $\geqslant 0$, de masse < 1, sur A. Donc $\mu \in K_A$ et $K \subset K_A$.

2) Soit $\mu \in M^+(X)$ représentée par une mesure de Radon $m \geqslant 0$ sur A, de masse $\leqslant 1$; on a $m = \lim_{\mathfrak{U}} \Sigma\, \alpha_i \varepsilon_{x_i}$, avec $\Sigma\, \alpha_i \leqslant 1$ et $x_i \in A$. Alors $\hat{m} = \lim_{\mathfrak{U}} \Sigma\, \alpha_i \varepsilon_{\varepsilon_{x_i}}$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur K de masse $\leqslant 1$, qui représente un élément $\pi \in M^+(Y)$ tel que $r(\pi) = \mu \in Y$, comme $r(\pi) \in K$ nécessairement, on a $\mu \in K$, donc $K_A \subset K$.

https://doi.org/10.1017/S1446788700018826 Published online by Cambridge University Press

b) ⇒ a). Soit $A_1 = \{x;\ x \neq 0,\ x \in A, \exists k > 1,\ kx \in A\}$; c'est un G_δ (relatif) de A, car on a

$$A_1 = A \bigcap_n ([0, 1 - 1/n].A)^C;\text{ il est alors clair que}$$

$K = \{\mu;\ \mu$ localisable sur A_1 en une mesure de Radon $\geqslant 0$, de masse $\leqslant 1\}$. Comme la localisation en une mesure de Radon sur A_1 est unique ([4] 2.13), on en déduit que K est un chapeau de $M^+(X)$: si $\mu_1, \mu_2 \notin K$ et $(\mu_1 + \mu_2)/2 \in K$ on a μ_1, μ_2 localisables sur A_1 par des mesures $m_1, m_2 \geqslant 0$; on a $(m_1(1) + m_2(1))/2 \leqslant 1$, donc $m_1(1) \leqslant 1$ ou $m_2(1) \leqslant 1$ — Contradiction—De plus, il est clair que K est un convexe compact.

13. Corollaire. *Soit $X \in \mathfrak{S}$; les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:
a) $X \in \mathfrak{L}$.
b) *$M^+(X)$ est presque bien coiffé.*

Nous terminons en étudiant la stabilité de la class $\mathfrak{L}$.

14. Theoreme. *La classe $\mathfrak{L}$ est stable par produit dénombrable, et donc aussi par limite projective dénombrable.*

Preuve. Elle découle des deux lemmes suivants.

15. Lemme. *Soit X_1, X_2, X_n, une suite de cônes appartenant à $\mathfrak{L}$ et $X = \prod_1^\infty X_i$. On désigne par p_n la projection canonique de X sur X_n. Pour toute $\mu \in M^+(X)$, il existe $\mu_0 \leqslant \mu$, avec $\mu_0 \neq 0$ si $\mu \neq 0$ telle que, pour tout n, $p_n(\mu_0)$ soit localisable en une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur la base Y_n d'un sous cône convexe de X_n, avec Y_n compact.*

Preuve. Soit $h \in h(X)$ telle que $\mu(h) = 1$. Pour tout n soit $\mu_n = \sup(\lambda\colon 0 \leqslant \lambda \leqslant \mu,\ p_n(\lambda) = 0)$; on voit (voir Lemma 2) qu'il existe $\lambda_n \leqslant \mu - \mu_n$, telle que $\lambda_n(h) + \mu_n(h) \geqslant 1 - 1/2^{n+1}$, avec $p_n(\lambda_n)$ localisable en une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur la base Y_n compacte d'un sous-cône convexe de X_n. On voit que l'on a, en posant $\mu_0 = \inf(\lambda_n + \mu_n)$ l'inégalité: $\mu_0(h) \geqslant 1/2$: en effet, soit $\nu_n = \lambda_n + \mu_n$; on a $\nu_1 \wedge \nu_2(h) + \nu_1 \vee \nu_2(h) = \nu_1(h) + \nu_2(h)$, d'où, comme $\nu_1 \vee \nu_2 \leqslant \mu$: $\nu_1 \wedge \nu_2(h) \geqslant (1 - 1/4) + (1 - 1/8) - 1 = 5/8$; de même $\nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \nu_3(h) + (\nu_1 \wedge \nu_2) \vee \nu_3(h) = \nu_1 \wedge \nu_2(h) + \nu_3(h)$, d'où $\nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \nu_3(h) \geqslant 5/8 + 1 - 1/16 - 1 = 9/16$, puisque $(\nu_1 \wedge \nu_2) \vee \nu_3 \leqslant \mu$. De proche en proche, on a bien $\mu_0(h) \geqslant 1/2$.

https://doi.org/10.1017/S1446788700018826 Published online by Cambridge University Press

16. LEMME. *Sous les conditions du lemme* 15, *alors* μ_0 *est localisable en une mesure de Radon* $\geqslant 0$ *sur un compact de* X.

PREUVE. On notera μ au lieu de μ_0. On peut supposer que $p_n(\mu)$ est localisable sur Y_n en une mesure de Radon $\geqslant 0$ de masse $\leqslant 1$ et que $Y_n = l_n^{-1}(1)$ où l_n est une forme linéaire continue sur X_n. On a alors $\Sigma_1^\infty l_n(r(\mu))/2^n \leqslant 1$. Soit $\mu = \Sigma\,\mu_i$ une décomposition finie de μ avec $\mu_i \neq 0$ et $\mu_i \geqslant 0$. On peut écrire $\mu = \Sigma\,(\mu_i/q(\mu_i))$. $q(\mu_i)$ où $q(\lambda) = \Sigma_1^\infty l_n(r(\lambda))/2^n$, car on a toujours $0 < q(\mu_i) < +\infty$ et $\Sigma\, q(\mu_i) \leqslant 1$: En effet, comme $\mu_i \leqslant \mu$ on a $r(p_n(\mu_i)) \in$ (cône de base Y_n), donc $(q(\mu_i) = 0)$ entraine $(\mu_i = 0)$. En passant à la limite sur les décompositions $\mu = \Sigma\,\mu_i$, on voit que μ est localisable en une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur le compact $\pi_1^\infty 2^n$ conv$(0, Y_n)$, puisque $r(\mu_i)/q(\mu_i)$ appartient à ce compact et que $\Sigma\, q(\mu_i) \leqslant 1$.

Bibliographie

[1] R. Becker, 'Some consequences of a kind of Hahn-Banach Theorem,' *Séminaire Choquet*, 1977–78, n° 2.

[2] G. Choquet, *Lectures on analysis*, Vol. 1–3 (Mathematics Lecture Note Series, Benjamin, New York, Amsterdam, 1969)

[3] H. Dinges, 'Decomposition in ordered semi-groups,' *J. Functional Analysis* **5** (1970), p. 436–83

[4] A. Goullet de Rugy, 'La théorie des cônes biréticulés,' *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) **21** (1971).

[5] E. Thomas, 'Integrals representations in conucluar spaces', *Vector space measures and applications* II. Proceedings, Dublin 1977, edited by R. M. Aaron and S. Dineen, pp. 172–179 (Lecture Notes in Mathematics 645, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York).

Université Paris VI
Equipe d'Analyse, E.R.A 294
4 Place Jussieu
75230, Paris
France