ELEMENTARFUNKTIONEN AUF RIEMANNSCHEN FLÄCHEN ALS HILFSMITTEL FÜR DIE FUNKTIONENTHEORIE MEHRERER VERÄNDERLICHEN

HEINRICH BEHNKE UND KARL STEIN

In the present paper, the authors extend the Cousin theorems and the continuity theorem, using some previous results on analytic functions connected with open Riemann surfaces.

The *Cousin theorems*, concerning the existence of analytic functions of several complex variables with prescribed poles and zeros in a given domain, have been generalized in various manners, but only in the case where the domain is schlicht. The authors proceed to the case where the given domain $\mathfrak{Z}$ is the direct product of n open Riemann surfaces. They prove the following two theorems.

(1) If in $\mathfrak{Z}$ we prescribe locally meromorphic functions (i.e., if we cover $\mathfrak{Z}$ with a denumerable set of overlapping neighbourhoods N_μ, $\mu = 1, 2, \ldots$, in each of which a meromorphic function f_μ is defined such that in the intersections $N_\mu \cap N_\nu$, $f_\mu - f_\nu$ is regular), then it is possible to determine a meromorphic function f, defined in $\mathfrak{Z}$, such that in every N_μ, $f - f_\mu$ is regular.

(2) The components of $\mathfrak{Z}$ may be simply connected with at most one exception. If in every N_μ a regular function F_μ is given such that in $N_\mu \cap N_\nu$, F_μ/F_ν is regular and non-vanishing, then there exists a regular function F, defined in $\mathfrak{Z}$, such that in every N_μ, F/F_μ is regular and non-vanishing.

The *continuity theorem* represents the basis of various investigations on singularities of analytic functions of several complex variables. In its most general form it previously has been proved only for regular functions. Now the authors generalize to the case of meromorphic functions.

In ihrer Arbeit: "Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen"[1] haben die Verfasser für beliebige offene Riemannsche Flächen Elementarfunktionen und Elementarintegrale konstruiert, um mit ihrer Hilfe Aussagen über die Approximierbarkeit von Funktionen $f(z)$ auf diesen Flächen durch spezielle Funktionen nachzuweisen. Es zeigt sich nun, dass mit diesen Hilfsmitteln und Aussagen auch grundsätzliche Theoreme der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen wesentlich erweitert werden können.

P. Cousin bewies in seiner Pariser These vom Jahre 1895,[2] dass in jedem schlichten Zylindergebiet im Raume von n komplexen Veränderlichen zu lokal vorgegebenen Polstellenflächen stets eine meromorphe Funktion mit diesen Polstellen konstruiert werden kann. Eine entsprechende Aussage wurde von ihm über die Existenz regulärer Funktionen m. V. zu vorgegebenen Nullstellen aufgestellt. Doch hat T. Gronwall[3] einen Fehler in dem hierauf bezüglichen Beweise von Cousin aufgewiesen und gezeigt, dass die Gültigkeit dieser

Received October 25, 1948.

[1]*Math. Ann.*, vol. 120 (1948).

[2]Siehe W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie* II, 1, 2. Auflage (1929), 248 ff.

[3]T. H. Gronwall, "On the Expressibility of a Uniform Function of Several Complex Variables as the Quotient of Two Functions of Entire Character," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 18 (1917).

zweiten Cousinschen Aussage auf den Fall beschränkt bleibt, dass alle Komponenten des vorgegebenen schlichten Zylindergebietes bis auf höchstens eine einfach zusammenhängend sind. Später haben sich verschiedene Autoren mit der Ausdehnung der Cousinschen Resultate beschäftigt. Allen diesen Untersuchungen ist jedoch gemeinsam, dass die Cousinschen Probleme nur in schlichten Gebieten des R_{2n} betrachtet werden. Im folgenden sollen sie nun in nichtschlichten Zylindergebieten über dem R_{2n} studiert werden. Als Komponenten eines solchen Zylindergebietes sind beliebige nichtgeschlossene Riemannsche Flächen mit Verzweigungspunkten im Innern zugelassen. Es wird bewiesen, dass die erste Cousinsche Aussage für diese Gebiete uneingeschränkt, die zweite Aussage für den Fall gültig bleibt, dass alle Komponentenflächen bis auf höchstens eine einfach zusammenhängend sind. In der Cousinschen Formulierung des Problems kann also die Voraussetzung der Schlichtheit fallen gelassen werden. Für den Spezialfall $n = 1$ lauten die hier angegebenen Erweiterungen der Cousinschen Sätze: (1) Zu jeder offenen Riemannschen Fläche kann man eine dort meromorphe Funktion finden, die an beliebig vorgegebenen, im Innern sich nicht häufenden Stellen einen vorgeschriebenen Hauptteil hat und überall anderswo auf der Fläche regulär ist. (Übertragung des Satzes von Mittag-Leffler.) (2) Zu jeder offenen Riemannschen Fläche kann man eine dort überall reguläre Funktion finden, die an beliebig vorgegebenen Stellen, die sich im Innern nicht häufen, von vorgeschriebener Ordnung verschwindet und überall anderswo auf der Fläche ungleich Null ist. (Übertragung des Satzes von Weierstrass.)[4]

Der *Kontinuitätssatz* bildet die Grundlage der Untersuchungen über die Singularitäten analytischer Funktionen m.V.[5] Er geht in seiner einfachsten Gestalt auf F. Hartogs und E. E. Levi zurück und wurde von anderen Autoren später allgemeiner formuliert. In einem wichtigen besonderen Falle lässt er sich folgendermassen aussprechen: "Gegeben sei eine Folge paralleler analytischer Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$ im R_{2n}, die gegen eine Grenzebene $\mathfrak{E}$ konvergieren. Auf den $\mathfrak{E}_\nu$ und auf $\mathfrak{E}$ mögen beschränkte Gebiete $\mathfrak{B}_\nu$ bzw. $\mathfrak{B}$ mit den Rändern $\mathfrak{C}_\nu$ bzw. $\mathfrak{C}$ liegen, und zwar mögen die $\mathfrak{B}_\nu$ gegen $\mathfrak{B}$ konvergieren. Ist dann eine Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ regulär (bzw. meromorph) und eindeutig auf allen $\mathfrak{B}_\nu$ sowie auf $\mathfrak{C}$, so ist sie regulär (bzw. meromorph) in das Innere von $\mathfrak{B}$ vom Rande aus fortsetzbar." H. Behnke hat gezeigt, dass der Satz für *reguläre* Funktionen richtig bleibt, wenn an die Stelle der Ebenen $\mathfrak{E}_\nu$ bzw. $\mathfrak{E}$ beliebige zweidimensionale analytische Flächen $\mathfrak{F}_\nu$ bzw. $\mathfrak{F}$ treten.[6] Der Beweis beruht auf der Eigenschaft der Regulärkonvexität von Regularitätsbereichen und auf dem Maximumprinzip für reguläre Funktionen; er ist daher auf den Fall mero-

[4]Siehe auch Herta Florack, *Reguläre und meromorphe Funktionen auf nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen*, Dissertation, Münster 1948.

[5]Siehe H. Behnke und P. Thullen, *Theorie der Funktionen mehrerer Komplexer Veränderlichen*, Erg. d. Math. **3**, 3 (1934), abgekürzt B.-Th. Bericht.

[6]H. Behnke, "Der Kontinuitätssatz und die Regulärkonvexität," *Math. Ann.*, vol. **113** (1936), 392-397.

morpher Funktionen nicht übertragbar. Im folgenden soll nun für diesen verallgemeinerten Kontinuitätssatz ein weiterer, sehr einfacher Beweis gegeben werden, der sich auf meromorphe Funktionen ausdehnen lässt. Ausgangspunkt ist der Beweisgang von Hartogs, wobei dann allerdings an die Stelle der Cauchyschen Integralformel für schlichte Gebiete ein verallgemeinertes Cauchysches Integral auf Riemannschen Flächen tritt, in das die Elementarfunktionen dieser Flächen eingehen. Auch das Beweisverfahren von H. Kneser[7] für den Kontinuitätssatz für meromorphe Funktionen lässt sich so übertragen. So folgt: Der verallgemeinerte Kontinuitätssatz in der Fassung von H. Behnke gilt auch für meromorphe Funktionen. Die zahlreichen Aussagen, die bisher aus dem verallgemeinerten Kontinuitätssatz gefolgert, aber nur für reguläre Funktionen ausgesprochen werden konnten, gelten demnach uneingeschränkt auch für meromorphe Funktionen.[8]

I. Funktionen und Integrale auf nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen. Wir geben zunächst eine Übersicht über die Resultate, die aus der zitierten Arbeit der Verfasser[1] benötigt werden.

SATZ A_1. *Sei $\mathfrak{R}$ eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche. Dann existiert im 4-dimensionalen Gebiet $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}_\zeta \times \mathfrak{R}_z$ eine Funktion $A(\zeta,z)$ mit folgenden Eigenschaften:*[9]

(1) *$A(\zeta,z)$ ist in $\mathfrak{Z}$ meromorph und eindeutig.*

(2) *Sind τ, t den Punkten $\mathfrak{p}(\zeta')$, $\mathfrak{p}(z')$ von $\mathfrak{R}_\zeta$ bzw. $\mathfrak{R}_z$ zugeordnete ortsuniformisierende Parameter, so ist in einer Umgebung von $\mathfrak{p}(\zeta',z') = \mathfrak{p}(\zeta') \times \mathfrak{p}(z')$:*

$$A(\zeta,z)\,\frac{d\xi}{d\tau} \equiv \frac{1}{\tau - t} + R(\tau,t), \textit{falls } \mathfrak{p}(\zeta') = \mathfrak{p}(z');$$

$$A(\zeta,z)\,\frac{d\xi}{d\tau} \equiv S(\tau,t), \textit{falls } \mathfrak{p}(\zeta') \neq \mathfrak{p}(z');$$

Dabei bedeuten $R(\tau,t)$ und $S(\tau,t)$ jeweils in einer Umgebung von $(\tau,t) = (0,0)$ reguläre Funktionen.

$A(\zeta,z)$ heisse eine *Elementarfunktion* 1. *Ordnung* auf $\mathfrak{R}$. In der Nähe von

[7]H. Kneser, "Der Satz von dem Fortbestehen der wesentlichen Singularitäten einer analytischen Funktion zweier Veränderlichen," *Jber. deutschen Math. Verein.*, vol. 41 (1932), 164 ff.; und "Ein Satz uber die Meromorphiebereiche analytischer Funktionen von mehreren Veränderlichen," *Math. Ann.*, vol. 106 (1932), 648 ff.

[8]Herr W. Rothstein hat vor einigen Jahren schon einen andere Mittel benutzenden Beweis des verallgemeinerten Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen vorgelegt, der wegen der besonderen Verhältnisse erst jetzt erscheinen konnte. Siehe W. Rothstein, "Die invariante Fassung des Kontinuitätssatzes für meromorphe Funktionen, "*Archiv der Mathematik*, vol. 1 (1948).

[9]$\mathfrak{Z}$ ist also das direkte Produkt von $\mathfrak{R}$ mit sich selbst. Durch die Schreibweise $\mathfrak{R}_\zeta$ bzw. $\mathfrak{R}_z$ werde angedeutet, dass die Variable einmal ζ, das andere Mal z heissen soll. Zur Kennzeichnung eines Punktes von $\mathfrak{R}_\zeta$ bzw. $\mathfrak{R}_z$ bzw. $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}_\zeta \times \mathfrak{R}_z$ benutzen wir die Symbole $\mathfrak{p}(\zeta)$ bzw. $\mathfrak{p}(z)$ bzw. $\mathfrak{p}(\zeta,z) = \mathfrak{p}(\zeta) \times \mathfrak{p}(z)$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-014-6 Published online by Cambridge University Press

$\mathfrak{p}(\zeta) = \mathfrak{p}(z)$ verhält sie sich im wesentlichen wie $\dfrac{1}{\zeta - z}$. Daher kann die Cauchysche Integralformel für schlichte Gebiete wie folgt übertragen werden:

SATZ A_2. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet mit stückweise glattem*[10] *Rand $\mathfrak{C}$ ganz im Innern der nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. $A(\zeta,z)$ sei eine Elementarfunktion* 1. *Ordnung auf $\mathfrak{R}$. Dann gilt für jede in $\mathfrak{G}$ eindeutige, reguläre, auf $\mathfrak{C}$ noch stetige Funktion $f(z)$*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} f(\zeta) A(\zeta,z) d\zeta.$$

Auf Riemannschen Flächen gilt folgende Übertragung des Rungeschen Approximationssatzes:

SATZ B_1. *$\mathfrak{G}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$ seien Gebiete auf der nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, und es sei $\mathfrak{G}$ Teilgebiet von $\tilde{\mathfrak{G}}$ (in Zeichen $\mathfrak{G} \subset \tilde{\mathfrak{G}}$). $\mathfrak{G}$ sei ferner relativ zu $\tilde{\mathfrak{G}}$ einfach zusammenhängend. Dann ist jede in $\mathfrak{G}$ eindeutige reguläre Funktion $f(z)$ gleichmässig im Innern von $\mathfrak{G}$ durch Funktionen approximierbar, die in $\tilde{\mathfrak{G}}$ eindeutig und regulär sind.*

Hierzu ist die Definition des relativ einfachen Zusammenhanges zu geben: $\mathfrak{G}$ heisst zu $\tilde{\mathfrak{G}}$ *relativ einfach zusammenhängend*, wenn jedes endliche System geschlossener Jordankurven in $\mathfrak{G}$, das in $\tilde{\mathfrak{G}}$ berandet, schon in $\mathfrak{G}$ berandet.

Für Funktionen mehrerer Veränderlichen gilt:

SATZ B_2. *Der Zylinderbereich $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}_1 \times \ldots \times \mathfrak{R}_n$ über dem Raume der n komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ sei Teilbereich eines Zylinderbereiches $\tilde{\mathfrak{Z}} = \tilde{\mathfrak{R}}_1 \times \ldots \times \tilde{\mathfrak{R}}_n$, dessen z_j-Projektionen $\tilde{\mathfrak{R}}_j$, $j = 1, \ldots, n$, Teilbereiche nichtgeschlossener Riemannscher Flächen $\mathfrak{R}^*_j$ seien. Jede Projektion $\mathfrak{R}_j$ sei relativ zu $\tilde{\mathfrak{R}}_j$ einfach zusammenhängend. Dann ist jede in $\mathfrak{Z}$ eindeutige reguläre Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ im Innern von $\mathfrak{Z}$ gleichmässig durch in $\tilde{\mathfrak{Z}}$ eindeutige reguläre Funktionen approximierbar.*

Ferner benötigen wir eine Aussage über die Existenz von Integralen 1. Gattung auf nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln:

SATZ C. *Sei $\mathfrak{R}$ eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche und $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_k, \ldots$ ein System einfach geschlossener, orientierter Kurven auf $\mathfrak{R}$, das eine eindimensionale Homologiebasis (bezogen auf den Ring der ganzen Zahlen als Koeffizientenbereich) von $\mathfrak{R}$ darstelle. Den $\mathfrak{C}_k$ seien beliebig komplexe Zahlen $\mathfrak{a}_k$ zugeordnet. Dann gibt es eine auf $\mathfrak{R}$ uneingeschränkt regulär fortsetzbare Funktion $\mathfrak{J}(z)$, die sich bei Fortsetzung längs eines $\mathfrak{C}_k$ oder einer zu $\mathfrak{C}_k$ homologen geschlossenen Kurve um die Konstante $\mathfrak{a}_k$ vermehrt.*

$\mathfrak{J}(z)$ heisse ein Integral 1. Gattung mit den Periodizitätsmoduln[11] $\mathfrak{a}_k$.

[10] Wir sprechen von einem stückweise glatten Kurvenstück, wenn es aus endlich vielen reell analytischen Kurvenstücken besteht.

[11] Der Begriff des Integrals 1. Gattung auf einer offenen Riemannschen Fläche ist in manchen neueren Arbeiten enger gefasst worden. Siehe etwa H. Hornich, "Über transzendente Integrale erster Gattung," *Monatshefte Math.-Phys.*, vol. 47 (1939), 380 ff.

II. Die Cousinschen Sätze für direkte Produkte nichtgeschlossener Riemannscher Flächen. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet über dem Raum der komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$. Jedem Produkt P von $\mathfrak{G}$ sei ein Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ und eine in $\mathfrak{U}(P)$ meromorphe Funktion $f_P(z_1, \ldots, z_n)$ zugeordnet, derart, dass im Durchschnitt $\mathfrak{D}(\mathfrak{U}(P), \mathfrak{U}(Q))$ der Umgebungen zweier Punkte P und Q von $\mathfrak{G}$ die Funktion

$$f_{PQ} \equiv f_P - f_Q$$

regulär ist. Wir sagen, es sei in $\mathfrak{G}$ eine Cousinsche Verteilung meromorpher Ortsfunktionen mit Äquivalenz in bezug auf Subtraktion vorgegeben . Gefragt ist, ob eine im Gesamtgebiet $\mathfrak{G}$ meromorphe Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ existiert, derart dass in $\mathfrak{U}(P)$ jeweils $F(z_1, \ldots, z_n) - f_P(z_1, \ldots, z_n)$ regulär, d.h., dass F mit allen f_P äquivalent in bezug auf Subtraktion ist. Existiert für jede solche Cousinsche Verteilung meromorpher Ortsfunktionen in $\mathfrak{G}$ eine zugehörige Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$, so sagen wir, in $\mathfrak{G}$ gelte die *erste Aussage von Cousin*[12].

Ist jedem Punkt P von $\mathfrak{G}$ in einem $\mathfrak{U}(P)$ eine *reguläre* Ortsfunktion f_P zugeordnet, sodass in $\mathfrak{D}(\mathfrak{U}(P), \mathfrak{U}(Q)$) jeweils f_P/f_Q regulär und ungleich Null ist, so sprechen wir von einer Cousinschen Verteilung regulärer Ortsfunktionen in $\mathfrak{G}$ mit Äquivalenz in bezug auf Division. Lässt sich hierzu stets eine in $\mathfrak{G}$ *reguläre* Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ finden, die mit allen f_P äquivalent in bezug auf Division ist, so sagen wir, in $\mathfrak{G}$ gelte die *zweite Aussage von Cousin.*

Als Gebiet $\mathfrak{G}$ wählen wir im folgenden das direkte Produkt von n nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$; ein solches Gebiet heisst ein Zylindergebiet. Verzweigungspunkte endlicher Ordnung und unendlich ferne Punkte sind als innere Punkte jedes $\mathfrak{R}_j$ zugelassen; die laufende Variable von $\mathfrak{R}_j$ sei mit z_j bezeichnet. Regularität und Meromorphie wird stets auf die Ortsuniformisierenden der einzelnen Riemannschen Flächen bezogen. Eine Funktion $\phi(z_1, \ldots, z_n)$ heisst also in einem vorgegebenen Punkte P von $\mathfrak{G}$ regulär bzw. meromorph, wenn sie in bezug auf die P zugeordneten Ortsuniformisierenden regulär bzw. meromorph ist.

SATZ 1. *In jedem Zylindergebiet $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}_1 \times \ldots \times \mathfrak{R}_n$, wo die $\mathfrak{R}_j$ nichtgeschlossene Riemannsche Flächen seien, gilt die erste Aussage von Cousin.*

Der Beweis von Cousin für den Fall schlichter Zylindergebiete besteht aus zwei wesentlichen Schritten: einem Heftungsverfahren und einem Approximationsprozess.[2] Wir zeigen, dass diese beiden Schritte auch in unserem Falle ausgeführt werden können.

Hierzu beweisen wir den folgenden

HILFSSATZ A. *Es seien $\overline{\mathfrak{B}}_1$, $\overline{\mathfrak{B}}^*_1$ abgeschlossene Gebiete im Innern von $\mathfrak{R}_1$, ferner $\overline{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{B}}_n$ abgeschlossene Gebiete in $\mathfrak{R}_2, \ldots,$ bzw. $\mathfrak{R}_n$. Der Durchschnitt $\overline{\mathfrak{K}}$ von $\overline{\mathfrak{B}}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}^*_1$ bestehe aus endlich vielen zueinander punktfremden, nichtgeschlossenen, stückweise glatten Kurvenstücken $\overline{\mathfrak{K}}_\rho$, $\rho = 1, \ldots, k$ (die also zu den Rändern von $\overline{\mathfrak{B}}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}^*_1$ gehören). Ferner seien $f(z_1, \ldots, z_n)$ bzw. $f^*(z_1, \ldots, z_n)$*

[12]Siehe H. Behnke und K. Stein, "Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null-und Polstellen," *Jber. Deutschen Math. Verein.*, vol. 47 (1937), 177-192.

in $\bar{\mathfrak{Z}}_0 = \bar{\mathfrak{B}}_1 \times \bar{\mathfrak{B}}_2 \times \ldots \times \bar{\mathfrak{B}}_n$ *bzw.* $\bar{\mathfrak{Z}}^*_0 = \bar{\mathfrak{B}}^*_1 \times \bar{\mathfrak{B}}_2 \times \ldots \times \bar{\mathfrak{B}}_n$ *meromorphe Funktionen, die auf* $\bar{\mathfrak{K}} \times \bar{\mathfrak{B}}_2 \times \ldots \times \bar{\mathfrak{B}}_n$ *äquivalent in bezug auf Subtraktion seien. Dann existiert im Vereinigungsgebiet*

$$\bar{\mathfrak{Z}}_0 + \bar{\mathfrak{Z}}^*_0 = (\bar{\mathfrak{B}}_1 + \bar{\mathfrak{B}}^*_1) \times \bar{\mathfrak{B}}_2 \times \ldots \times \bar{\mathfrak{B}}_n$$

eine meromorphe Funktion $G(z_1, \ldots, z_n)$, *die in* $\bar{\mathfrak{Z}}_0$ *mit* $f(z_1, \ldots, z_n)$, *in* $\bar{\mathfrak{Z}}^*_0$ *mit* $f^*(z_1, \ldots, z_n)$ *äquivalent in bezug auf Subtraktion ist.*

Beweis. Wir setzen auf $\bar{\mathfrak{K}} \times \bar{\mathfrak{B}}_2 \times \ldots \times \bar{\mathfrak{B}}_n$

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_n) - f^*(z_1, \ldots, z_n);$$

φ ist dort nach Voraussetzung regulär. Dann bilden wir

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bar{\mathfrak{K}}^*} \varphi(\zeta, z_2, \ldots, z_n)\, A(\zeta, z_1) d\zeta.$$

Hierin bedeutet $A(\zeta, z_1)$ eine Elementarfunktion 1. Ordnung auf $\mathfrak{R}_1$. Integriert wird über eine Menge $\bar{\mathfrak{K}}^*$ von Kurvenstücken $\bar{\mathfrak{K}}^*_\rho$, die aus den $\bar{\mathfrak{K}}_\rho$ auf folgende Weise erhalten werden: Jedes $\bar{\mathfrak{K}}_\rho$ wird an seinen Enden durch Hinzufügen kleiner Kurvenstücke ergänzt, die im Aussengebiet von $\bar{\mathfrak{B}}_1$ und $\bar{\mathfrak{B}}^*_1$ liegen, jedoch so, dass die Punktmenge $\bar{\mathfrak{K}}^* \times \bar{\mathfrak{B}}_2 \times \ldots \times \bar{\mathfrak{B}}_n$ noch ganz zum Regularitätsgebiet von $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ gehört. Insbesondere sollen also die Endpunkte der $\bar{\mathfrak{K}}^*_\rho$ ausserhalb von $\bar{\mathfrak{B}}_1$ und $\bar{\mathfrak{B}}^*_1$ liegen. $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ stellt dann in $\bar{\mathfrak{Z}}_0$ eine reguläre Funktion $\Phi_1(z_1, \ldots, z_n)$ und in $\bar{\mathfrak{Z}}^*_0$ eine reguläre Funktion $\Phi^*_1(z_1, \ldots, z_n)$ dar. Da $A(\zeta, z_1)$ sich auf $\bar{\mathfrak{K}}^*_\zeta \times \bar{\mathfrak{K}}^*_{z_1}$ wie $1/\zeta - z_1$ verhält, bleiben Φ_1 und Φ^*_1 bei Fortsetzung aus dem Innern von $\bar{\mathfrak{Z}}_0$ bzw. $\bar{\mathfrak{Z}}^*_0$ nach $\bar{\mathfrak{K}} \times \bar{\mathfrak{B}}_2 \times \ldots \times \bar{\mathfrak{B}}_n$ regulär, und zwar unterscheiden sie sich dort additiv um $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$, d.h. bei geeigneter Orientierung der $\bar{\mathfrak{K}}^*_\rho$ gilt auf $\bar{\mathfrak{K}} \times \bar{\mathfrak{B}}_2 \times \ldots \times \bar{\mathfrak{B}}_n$:

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \Phi_1(z_1, \ldots, z_n) - \Phi^*_1(z_1, \ldots, z_n)$$

oder $f(z_1, \ldots, z_n) - f^*(z_1, \ldots, z_n) = \Phi_1(z_1, \ldots, z_n) - \Phi^*_1(z_1, \ldots, z_n)$.

Setzen wir nun

$$g(z_1, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_n) - \Phi_1(z_1, \ldots, z_n) \text{ in } \bar{\mathfrak{Z}}_0,$$
$$g^*(z_1, \ldots, z_n) = f^*(z_1, \ldots, z_n) - \Phi^*_1(z_1, \ldots, z_n) \text{ in } \bar{\mathfrak{Z}}^*_0,$$

so ist auf $\bar{\mathfrak{K}} \times \bar{\mathfrak{B}}_2 \times \ldots \times \bar{\mathfrak{B}}_n$:

$$g(z_1, \ldots z_n) = g^*(z_1, \ldots, z_n).$$

Daher stellt

$$G(z_1, \ldots, z_n) = \begin{cases} g\ (z_1, \ldots, z_n) \text{ in } \bar{\mathfrak{Z}}_0, \\ g^*(z_1, \ldots, z_n) \text{ in } \bar{\mathfrak{Z}}^*_0, \end{cases}$$

eine gesuchte Funktion in $\bar{\mathfrak{Z}}_0 + \bar{\mathfrak{Z}}^*_0$ dar.

Zum Beweise von Satz 1 wird nun $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}_1 \times \ldots \times \mathfrak{R}_n$ approximiert durch Zylindergebiete $\mathfrak{Z}_\nu = \mathfrak{R}_1^{(\nu)} \times \ldots \times \mathfrak{R}_n^{(\nu)}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Jedes $\mathfrak{R}_j^{(\nu)}$ liegt ganz im Innern von $\mathfrak{R}_j$ und ist ein relativ zu $\mathfrak{R}_j$ einfach zusammenhängendes Polygongebiet;

(2) Jedes $\mathfrak{R}_j^{(\nu)}$ ist echtes Teilgebiet von $\mathfrak{R}_j^{(\nu+1)}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-014-6 Published online by Cambridge University Press

(3) Es ist $\lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{R}_j^{(\nu)} = \mathfrak{R}_j$.

Dann kann zu einer in $\mathfrak{Z}$ vorgegebenen Cousinschen Verteilung meromorpher Ortsfunktionen mit Äquivalenz in bezug auf Subtraktion zunächst je eine Lösungsfunktion $F_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ in jedem $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ auf folgende Weise konstruiert werden: Jedes $\overline{\mathfrak{R}}_j^{(\nu)}$ werde trianguliert; die Elementardreiecke der Zerlegung von $\overline{\mathfrak{R}}_j^{(\nu)}$ seien etwa $\overline{\mathfrak{E}}_{j,\kappa_j}^{(\nu)}$, $\kappa_j = 1, \ldots, m_j$. Die Zerlegungen seien so fein gewählt, dass jedes Gebiet $\overline{\mathfrak{E}}_{1,\kappa_1}^{(\nu)} \times \overline{\mathfrak{E}}_{2,\kappa_2}^{(\nu)} \times \ldots \times \overline{\mathfrak{E}}_{n,\kappa_n}^{(\nu)}$ ganz von einem zur vorgegebenen Cousinschen Verteilung gehörigen $\mathfrak{U}(P)$ überdeckt wird; zu jedem $\overline{\mathfrak{E}}_{1,\kappa_1}^{(\nu)} \times \ldots \times \overline{\mathfrak{E}}_{n,\kappa_n}^{(\nu)}$ gehört also eine Ortsfunktion $f_{\kappa_1, \ldots, \kappa_n}(z_1, \ldots, z_n)$, die dort bereits eine Lösungsfunktion darstellt. Ferner seien die Dreiecke $\overline{\mathfrak{E}}_{j,\kappa_j}^{(\nu)}$ für jedes j so durchnumeriert, dass stets jeweils $\overline{\mathfrak{E}}_{j,\kappa_j}^{(\nu)}$ mit dem Komplex $\overline{\mathfrak{E}}_{j,1}^{(\nu)} + \ldots + \overline{\mathfrak{E}}_{j,\kappa_j-1}^{(\nu)}$, $2 \leqq \kappa_j \leqq m_j$, längs wenigstens einer Seite oder Ecke, niemals jedoch längs aller drei Seiten zusammenhängt. Dass eine solche Numerierung der Dreiecke eines zusammenhängenden, endlichen Dreieckskomplexes einer nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche immer möglich ist, folgt in einfacher Weise durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Dreiecke. Die Funktionen $f_{\kappa_1, \ldots, \kappa_n}(z_1, \ldots, z_n)$ werden nun, in Analogie zum Vorgange von Cousin, durch endlich häufige Anwendung des Hilfssatzes A zu einer Lösungsfunktion $F_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ in $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ verheftet.

Aus den $F_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ wird sodann, ebenfalls in Analogie zum Cousinschen Approximationsverfahren, eine Lösungsfunktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ im Gesamtgebiet $\mathfrak{Z}$ gewonnen. Es sei in $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$:

$$d_\nu(z_1, \ldots, z_n) = F_{\nu+1}(z_1, \ldots, z_n) - F_\nu(z_1, \ldots, z_n).$$

Die Funktion $d_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ ist in $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ regulär, da $F_{\nu+1}$ und F_ν dort äquivalent in bezug Subtraktion sind. Nach Satz B_2 können wir eine in $\mathfrak{Z}$ reguläre Funktion $r_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ finden, sodass in $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ gilt

$$| d_\nu(z_1, \ldots, z_n) - r_\nu(z_1, \ldots, z_n) | < \frac{1}{2^\nu}.$$

Wir bilden nun

$$\begin{aligned} F_1(z_1, \ldots, z_n) &+ \{ F_2(z_1, \ldots, z_n) - F_1(z_1, \ldots, z_n) - r_1(z_1, \ldots, z_n)\} + \ldots \\ \ldots &+ \{F_{\nu+1}(z_1, \ldots, z_n) - F_\nu(z_1, \ldots, z_n) - r_\nu(z_1, \ldots, z_n)\} + \ldots \end{aligned}$$

Diese unendliche Reihe konvergiert in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{Z}$ gelegenen Gebiet nach Abtrennung von je endlich vielen Gliedern absolut und gleichmässig, sie stellt also eine in ganz $\mathfrak{Z}$ meromorphe Funktion dar. Diese ist nach der Konstruktion der $F_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ eine gesuchte Lösungsfunktion zur vorgegebenen Cousinschen Verteilung. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Über die Lösbarkeit des zweiten Cousinschen Problems sagt aus

Satz 2. *In jedem Zylindergebiet $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}_1 \times \ldots \times \mathfrak{R}_n$, wo die $\mathfrak{R}_j$ nichtgeschlossene Riemannsche Flächen sind, die bis auf höchstens eine einfach zusammenhängen, gilt die zweite Aussage von Cousin.*

Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweise von Satz 1. An die Stelle von Hilfssatz A tritt ein entsprechender Hilfssatz B, in welchem jetzt f, f^* und G *reguläre* Funktionen bezeichnen, die äquivalent in bezug auf *Division* sind. Ferner müssen $\overline{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{B}}_n$ als einfach zusammenhängend vorausgesetzt werden. Zum Beweise dieses Hilfssatzes wird auf $\overline{\mathfrak{K}} \times \overline{\mathfrak{B}}_2 \times \ldots \times \overline{\mathfrak{B}}_n$ gebildet

$$\psi(z_1, \ldots, z_n) = \log \frac{f(z_1, \ldots, z_n)}{f^*(z_1, \ldots, z_n)} ;$$

dann ist $\psi(z_1, \ldots, z_n)$ dort wegen des einfachen Zusammenhanges der $\overline{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{B}}_n$ und der $\overline{\mathfrak{K}}_\rho$ eindeutig, falls ein fester Zweig des Logarithmus gewählt wird. Ferner sei gesetzt:

$$\chi(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\mathfrak{K}}^*} \psi(\zeta, z_2, \ldots, z_n) A(\zeta, z_1) d\zeta.$$

Dann ist, ähnlich wie oben,

$$G(z_1, \ldots, z_n) = \begin{cases} f(z_1, \ldots, z_n) \,.\, e^{-\chi(z_1, \ldots, z_n)} & \text{in } \overline{\mathfrak{Z}}_0, \\ f^*(z_1, \ldots, z_n) \,.\, e^{-\chi(z_1, \ldots, z_n)} & \text{in } \overline{\mathfrak{Z}}^*{}_0, \end{cases}$$

eine zu konstruierende Funktion $G(z_1, \ldots z_n)$ in $\overline{\mathfrak{Z}}_0 + \overline{\mathfrak{Z}}^*{}_0$.

Ist nun in $\mathfrak{Z}$ eine Cousinsche Verteilung regulärer Ortsfunktionen mit Äquivalenz in bezug auf Division vorgegeben, so lassen sich, wie im Beweise zu Satz 1, durch geeignete Verheftung von Ortsfunktionen unter wiederholter Anwendung des Hilfssatzes B Lösungsfunktionen $F_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ in approximierenden Zylindergebieten $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu = \overline{\mathfrak{R}}_1{}^{(\nu)} \times \ldots \times \overline{\mathfrak{R}}_n{}^{(\nu)}$ konstruieren. Dabei seien die $\mathfrak{R}_j{}^{(v)}$ mit den gleichen Eigenschaften wie oben gewählt.

Zum Approximationsverfahren ist jedoch noch eine besondere Bemerkung erforderlich. Wir bilden in $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$:

$$l_\nu(z_1, \ldots, z_n) = \log \frac{F_{\nu+1}(z_1, \ldots, z_n)}{F_\nu(z_1, \ldots, z_n)} .$$

Da $F_{\nu+1}$ und F_ν in $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ äquivalent in bezug auf Division sind, ist $l_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ in $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ regulär; aber es braucht dort nicht eindeutig zu bleiben, da einfacher Zusammenhang nur für $n - 1$ der $\mathfrak{R}_j$ vorausgesetzt ist. $l_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ kann also in $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ Periodizitätsmoduln besitzen, die sämtlich ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ sind. Nach Satz C können wir nun ein Integral 1. Gattung $a_\nu(z_m)$ in $\mathfrak{R}_m$ finden (es sei $\mathfrak{R}_m$ diejenige Komponente von $\mathfrak{Z}$, für die einfacher Zusammenhang nicht vorausgesetzt ist), sodass

$$l_\nu(z_1, \ldots, z_n) - a_\nu(z_m) = b_\nu(z_1, \ldots, z_n)$$

in $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ regulär und eindeutig ist; dabei seien links bestimmte Zweige von l_ν und a_ν gewählt. Ferner gibt es nach Satz B_2 eine in $\mathfrak{Z}$ reguläre Funktion $r_\nu(z_1, \ldots, z_n)$, sodass in $\overline{\mathfrak{Z}}_\nu$ gilt.

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-014-6 Published online by Cambridge University Press

$$|b_\nu(z_1, \ldots, z_n) - r_\nu(z_1, \ldots, z_n)| < \frac{1}{2^\nu}.$$

Das unendliche Produkt

$$F_1 \cdot \left\{\frac{F_2}{F_1} \cdot e^{-a_1 - r_1}\right\} \cdot \ldots \cdot \left\{\frac{F_{\nu+1}}{F_\nu} \cdot e^{-a_\nu - r_\nu}\right\} \cdot \ldots$$

konvergiert nun in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{Z}$ gelegenen Gebiet absolut und gleichmässig nach Abtrennung von je endlich vielen Gliedern; es stellt nach der Konstruktion der $F_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ eine gesuchte Lösungsfunktion zur gegebenen Cousinschen Verteilung dar. Damit ist Satz 2 bewiesen.

III. Der Kontinuitätssatz. Wir wollen den Kontinuitätssatz in der folgenden Fassung beweisen:

Satz 3. *$\mathfrak{G}$ sowie $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ mit den Rändern $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ seien Gebiete auf zweidimensionalen ergänzten analytischen Flächenstücken*[13] *$\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots$ im Raum von n komplexen Veränderlichen. Die $\mathfrak{F}_m$ mögen gegen $\mathfrak{F}$ konvergieren, derart dass hierbei die $\mathfrak{G}_m$ gegen $\mathfrak{G}$ gehen. $g(z_1, \ldots, z_n)$ sei regulär (bzw. meromorph) und eindeutig auf allen $\mathfrak{F}_m$ innerhalb von $\mathfrak{G}_m$, sowie auf $\mathfrak{C}$. Dann ist $g(z_1, \ldots, z_n)$ auf $\mathfrak{F}$ in ganz $\mathfrak{G}$ hinein vom Rande her regulär (bzw. meromorph) fortsetzbar und bleibt in einer 2n-dimensionalen Umgebung von $\mathfrak{G}$ eindeutig.*

Zum Beweise greifen wir eine der $\mathfrak{F}$ approximierenden analytischen Flächen $\mathfrak{F}_{m_0}$ heraus. $\mathfrak{F}_{m_0}$ gestattet, nötigenfalls nach einer geeigneten Koordinatentransformation, die Darstellung

$$z_\nu = \varphi_\nu(z_n), \qquad \nu = 1, \ldots, n-1,$$

wo die $\varphi_\nu(z_n)$ auf einer geeigneten gemeinsamen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ über der z_n-Ebene regulär und eindeutig sind. Dem Gebiete $\mathfrak{G}_{m_0}$ nebst Rand $\mathfrak{C}_{m_0}$ entspricht auf $\mathfrak{R}$ ein Gebiet $\mathfrak{G}^*_{m_0}$ mit Rand $\mathfrak{C}^*_{m_0}$, der ohne Einschränkung der Allgemeinheit—ebenso wie alle $\mathfrak{C}_m$ und $\mathfrak{C}$—als stückweise glatt angenommen werden darf.

Neben $\mathfrak{F}_{m_0}$ betrachten wir die Nachbarflächen

$$\mathfrak{F}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}): \quad z_\nu = \varphi_\nu(z_n) + \eta_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n-1,$$

wo die η_ν komplexe Parameter seien, die im $(2n-2)$-dimensionalen Gebiet

$$|\eta_\nu| < \delta, \qquad \nu = 1, \ldots, n-1,$$

variieren mögen. z_n läuft für alle diese $\mathfrak{F}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ auf $\mathfrak{R}$. Das Bild von $\mathfrak{G}^*_{m_0}$ auf $\mathfrak{F}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ nennen wir $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$, sein Rand sei $\mathfrak{C}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$. Wir denken uns $\mathfrak{F}_{m_0}$ so hinreichend nahe bei $\mathfrak{F}$ gewählt und ein geeignetes δ so festgelegt, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für alle $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ mit $|\eta_\nu| < \delta$ gehöre $\mathfrak{C}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ einer $2n$-dimensionalen Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{C})$ von $\mathfrak{C}$ an, in der nach Voraussetzung die gegebene Funktion $g(z_1, \ldots, z_n)$ regulär (bzw. meromorph) und eindeutig ist.

[13]Siehe B.—Th. Bericht, 25.

(2) Die Vereinigungsmenge der Punkte aller $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ für $|\eta_\nu| < \delta$ bildet eine $2n$-dimensionale Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$.

Unser Satz ist nun bewiesen, wenn wir zeigen können, dass $g(z_1, \ldots, z_n)$ auf jedem $\mathfrak{F}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ mit $|\eta_\nu| < \delta$ in das gesamte Innere des Gebietes $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ vom Rande $\mathfrak{C}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ her eindeutig regulär (bzw. meromorph) fortsetzbar ist, und dass die so erhaltenen Funktionselemente eine *eindeutige* Funktion in $\mathfrak{U}(\mathfrak{G})$ ausmachen.

Wir führen diesen Nachweis zunächst für den Fall einer regulären Funktion $g(z_1, \ldots, z_n)$. Hierzu setzen wir

$$f(z_n) = g(\varphi_1(z_n), \ldots, \varphi_{n-1}(z_n), z_n),$$

wo z_n im abgeschlossenen Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}^*_{m_0}$ auf $\mathfrak{R}$ variieren möge. $f(z_n)$ ist dort eindeutig und (in bezug auf die Ortsuniformisierenden) regulär. Die gleiche Eigenschaft hat

$$f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) = g(\varphi_1(z_n) + \eta_1, \ldots, \varphi_{n-1}(z_n) + \eta_{n-1}, z_n)$$

für $|\eta_\nu| < \delta_1$ bei genügend kleinem δ_1 mit $0 < \delta_1 < \delta$, und zwar in bezug auf alle n Veränderlichen $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n$, da $g(z_1, \ldots, z_n)$ in einer $2n$-dimensionalen Umgebung von $\mathfrak{F}_{m_0}$ als regulär und eindeutig vorausgesetzt ist. $f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ ist ferner regulär und eindeutig für $|\eta_\nu| < \delta$ $(\nu = 1, \ldots, \eta - 1)$ und z_n in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\mathfrak{C}^*_{m_0}$ auf $\mathfrak{R}$. Sei nun $A(\zeta, z_n)$ eine Elementarfunktion 1. Ordnung auf $\mathfrak{R}$ gemäss Satz A. Für $|\eta_\nu| < \delta_1$, $\nu = 1, \ldots, n-1$, und z_n in $\mathfrak{G}^*_{m_0}$ ist dann

$$f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}^*_{m_0}} f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, \zeta)\, A(\zeta, z_n)\, d\zeta.$$

Die rechte Seite ist aber regulär in den Veränderlichen $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n$ für $\{|\eta_\nu| < \delta \text{ und } z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0}\}$, stellt also dort eine Fortsetzung von $f(\eta_1 \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ in das Gebiet $\{|\eta_\nu| < \delta;\ z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0}\}$ dar. Damit ist auch eine Fortsetzung von $g(z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{U}(\mathfrak{G})$ gefunden. Wäre $g(z_1, \ldots, z_n)$ dort verzweigt, so kämen als Verzweigungsmannigfaltigkeiten nur Ebenen $z_n = c$ in Betracht, nämlich solche Ebenen $z_n = c$, die über Verzweigungspunkten von $\mathfrak{R}$ liegen. Dann müsste aber $g(z_1, \ldots, z_n)$ diese Ebenen auch in einer Nachbarschaft von $\mathfrak{G}_{m_0}$ als Verzweigungsmannigfaltigkeiten besitzen; das kann jedoch nicht der Fall sein, da $g(z_1, \ldots, z_n)$ dort als eindeutig vorausgesetzt ist. $g(z_1, \ldots, z_n)$ muss auch bei jeder Fortsetzung innerhalb $\mathfrak{U}(\mathfrak{G})$ eindeutig bleiben. Denn jeder geschlossene Weg ist innerhalb $\mathfrak{U}(\mathfrak{G})$ in $\mathfrak{G}_{m_0}$ hinein deformierbar, und längs eines geschlossenen Weges in $\mathfrak{G}_{m_0}$ ist $g(z_1, \ldots, z_n)$ nach Voraussetzung eindeutig fortsetzbar.

Damit ist unsere Behauptung und der Kontinuitätssatz für reguläre Funktionen bewiesen.

Es bleibt noch übrig, den ausstehenden Nachweis auch für den Fall eines meromorphen $g(z_1, \ldots, z_n)$ zu führen.

Wir betrachten wiederum die Flächen $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$:

$$z_\nu = \varphi_\nu(z_n) + \eta_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n-1, |\eta_\nu| \leqq \delta, z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0}.$$

Es sei $\mathfrak{D}^*_{m_0}$ ein hinreichend schmaler Streifen längs des Randes $\mathfrak{C}^*_{m_0}$ von $\mathfrak{G}^*_{m_0}$ (der evtl. mit $\mathfrak{C}^*_{m_0}$ in getrennte Komponenten zerfallen kann). Dann ist nach Voraussetzung

$$f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) = g(\varphi_1(z_n) + \eta_1, \ldots, \varphi_{n-1}(z_n) + \eta_{n-1}, z_n)$$

meromorph für

$$\left\{|\eta_\nu| \leqq \delta \qquad , z_n \text{ in } \mathfrak{D}^*_{m_0}\right\}$$
$$\text{und } \left\{|\eta_\nu| \leqq \delta_1 < \delta, z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0}\right\}.$$

Es kann vorkommen, dass $f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ für bestimmte feste Wertsysteme $\eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_{n-1}^{(0)}$ aus $|\eta_\nu| \leqq \delta$ als Funktion von z_n für alle z_n aus einer Komponente von $\mathfrak{D}^*_{m_0}$ singulär wird, d.h. dass ein 2-dimensionales Stück von $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_{n-1}^{(0)})$ ganz der Polmannigfaltigkeit von $g(z_1, \ldots, z_n)$ in dem über $\mathfrak{D}^*_{m_0}$ gelegenen Teil von $\mathfrak{U}(\mathfrak{G})$ angehört. Jedoch können wir dieses Vorkommnis durch Übergang zu einer Schar geeigneter Nachbarflächen $\tilde{\mathfrak{G}}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ stets vermeiden. Genauer: Es gibt ein $\epsilon > 0$ und geeignete Konstanten a_ν mit $|a_\nu| < \epsilon$, sodass folgendes gilt:

(1) Die Flächenstücke $\tilde{\mathfrak{G}}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$:

$$z_\nu = \varphi_\nu(z_n) + a_\nu . z_n + \eta_\nu \equiv \tilde{\varphi}_\nu(z_n) + \eta_\nu, |\eta_\nu| \leqq \tilde{\delta}, z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0};$$
$$\nu = 1, \ldots, n-1,$$

erfüllen eine $2n$-dimensionale Umgebung $\tilde{\mathfrak{U}}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$.

(2) $$\tilde{f}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z) = g(\tilde{\varphi}_1(z_n) + \eta_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{n-1}(z_n) + \eta_{n-1}, z_n)$$

ist meromorph für

$$\left\{|\eta_\nu| \leqq \tilde{\delta} \qquad ; z_n \text{ in } \overline{\mathfrak{D}}^*_{m_0}\right\},$$
$$\text{und } \left\{|\eta_\nu| \leqq \tilde{\delta}_1 < \tilde{\delta}; z_n \text{ in } \tilde{\mathfrak{G}}^*_{m_0}\right\}.$$

(3) Es gibt kein festes Wertsystem $\eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_{n-1}^{(0)}$ mit $|\eta_\nu^{(0)}| \leqq \tilde{\delta}$, sodass $\tilde{f}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ für $\eta_\nu = \eta_\nu^{(0)}$ und alle z_n aus einer Komponente von $\mathfrak{D}^*_{m_0}$ singulär wird.[14]

Wir denken uns diesen Übergang zu den $\tilde{\mathfrak{G}}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ nötigenfalls durchgeführt und lassen dann die Überschlängelungen wieder fort. Es darf also angenommen werden, dass kein 2-dimensionales Stück eines $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ in dem über $\mathfrak{D}^*_{m_0}$ gelegenen Teil von $\mathfrak{U}(\mathfrak{G})$ einer Polmannigfaltigkeit von $g(z_1, \ldots, z_n)$ angehört, und damit auch keiner Mannigfaltigkeit $g(z_1, \ldots, z_n) = c$ für genügend grosses c.

Angenommen nun, $g(z_1, \ldots, z_n)$ sei nicht für jedes Wertsystem $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ mit $|\eta_\nu| \leqq \delta$ ins ganze Innere von $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ vom Rande $\mathfrak{C}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ her meromorph und eindeutig fortsetzbar. Unter den Wertsystemen $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$, für die eine solche Fortsetzung nicht möglich ist, gibt es dann insbesondere ein solches—etwa $\eta'_1, \ldots, \eta'_{n-1}$—das Häufungspunkt anderer Wertsysteme $\eta_1^{(\mu)}, \ldots, \eta_{n-1}^{(\mu)}$ ist, sodass jeweils $g(z_1, \ldots, z_n)$ ins gesamte

[14]Vgl. H. Kneser, *Math. Ann.* 106, a.a.O.

Innere von $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta_1^{(\mu)}, \ldots, \eta_{n-1}^{(\mu)})$ eindeutig meromorph fortsetzbar ist. Die Annahme eines solchen Sachverhaltes kann jedoch zum Widerspruch geführt werden. Dies geschieht wie folgt:

Die Punktmenge

$$\bar{\mathfrak{D}}'_{m_0}: \qquad \{z_\nu = \varphi_\nu(z_n) + \eta'_\nu;\ z_n \text{ in } \bar{\mathfrak{D}}^*_{m_0}\}$$

enthält kein 2-dimensionales Stück, das ganz zur Polmannigfaltigkeit von $g(z_1, \ldots, z_n)$ gehört. Also wird $g(z_1, \ldots, z_n)$ auf $\bar{\mathfrak{D}}'_{m_0}$ höchstens in isolierten Punkten singulär. Daher lassen sich $\mathfrak{G}^*_{m_0}$, $\mathfrak{C}^*_{m_0}$ und das an $\bar{\mathfrak{D}}'_{m_0}$ sich anschliessende Streifengebiet $\mathfrak{D}^*_{m_0}$ nötigenfalls so abändern, dass $\mathfrak{D}'_{m_0}$ (wir behalten die Bezeichnungen bei) nur *reguläre* Stellen von $g(z_1, \ldots, z_n)$ enthält. Sodann wählen wir ein $\eta'_1, \ldots, \eta'_{n-1}$ hinreichend benachbartes Wertsystem $\eta^*_1, \ldots, \eta^*_{n-1}$, das folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Die Funktion

$$f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) = g(\varphi_1(z_n) + \eta_1, \ldots, \varphi_{n-1}(z_n) + \eta_{n-1}, z_n)$$

ist meromorph und eindeutig für

$$\{\eta_1 = \eta^*_1, \ldots, \eta_{n-1} = \eta^*_{n-1};\ z_n \text{ in } \bar{\mathfrak{G}}^*_{m_0}\},$$

(2) $f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ ist regulär und eindeutig für

$$\{|\eta_\nu - \eta'_\nu| < \delta';\ z_n \text{ in } \bar{\mathfrak{D}}^*_{m_0}\},$$

(3) es gilt $|\eta^*_\nu - \eta'_\nu| < \delta'$,

(4) $f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ besitzt für

$$\{\eta_1 = \eta^*_1, \ldots, \eta_{n-1} = \eta^*_{n-1};\ z_n \text{ in } \bar{\mathfrak{G}}^*_{m_0}\}$$

keine ausserwesentliche Singularität 2. Art.

Die Bedingung (4) ist sicher durch geeignete Wahl von $\eta^*_1, \ldots, \eta^*_{n-1}$ erfüllbar, da die ausserwesentlich singulären Stellen 2. Art von $g(z_1, \ldots, z_n)$ höchstens $(2n-4)$-dimensionale analytische Flächenstücke ausfüllen.

Ist nun $f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ für $\{\eta_\nu = \eta^*_\nu, z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0}\}$ sogar regulär, so ist nach dem oben angegebenen Beweis des Kontinuitätssatzes für reguläre Funktionen $f(\eta_1, \ldots . \eta_{n-1}, z_n)$ auch regulär und eindeutig für $\{\eta_\nu = \eta'_\nu;\ z_n \text{ in } \bar{\mathfrak{G}}^*_{m_0}\}$; da dann gleiches für $g(z_1, \ldots, z_n)$ auf $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta'_1, \ldots, \eta'_{n-1})$ gilt, ist der gewünschte Widerspruch herbeigeführt. Andernfalls besitzt $f(\eta^*_1, \ldots, \eta^*_{n-1}, z_n)$ in $\bar{\mathfrak{G}}^*_{m_0}$ wenigstens einen Pol. Es sei dann c_0 eine komplexe Zahl mit so grossem Absolutbetrag, dass

$$h(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) = \frac{1}{f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) - c_0}$$

für $\{|\eta_\nu - \eta_\nu'| \leqq \delta', z_n \text{ in } \bar{\mathfrak{D}}^*_{m_0}\}$ regulär bleibt, aber für $\eta_\nu = \eta^*_\nu$ als Funktion von z_n Pole in $\mathfrak{G}^*_{m_0}$ aufweist. Insbesondere kann c_0 so festgelegt werden, dass die Pole von $h(\eta^*_1, \ldots, \eta^*_{n-1}, z_n) \equiv h(z_n)$ innerhalb $\mathfrak{G}^*_{m_0}$ nicht in Verzweigungspunkte fallen und sämtlich einfach sind; ihre Anzahl sei $r > 0$. Nunmehr wird eine Funktion $\mathfrak{B}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ konstruiert, die für $\{|\eta_\nu - \eta'_\nu| \leqq \delta', z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0}\}$ regulär ist, nicht identisch verschwindet, aber für $\{|\eta_\nu - \eta'_\nu| \leqq \delta'' < \delta';\ z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0}\}$ mindestens an denjenigen Stellen verschwindet, wo

$h(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ Pole besitzt, und zwar mindestens von der gleichen Ordnung. Hierzu wird eine in $\bar{\mathfrak{G}}^*_{m_0}$ reguläre Funktion $\psi(z_n)$ mit folgender Eigenschaft benötigt: In den verschiedenen Polstellen von $h(z_n)$ nimmt $\psi(z_n)$ von Null und untereinander verschiedene Werte von erster Ordnung an.—Dass ein solches $\psi(z_n)$ stets existiert, wird weiter unten nachgewiesen.

In Analogie zum Vorgange von H. Kneser[14] wird jetzt gesetzt

$$\mathfrak{U}_p(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) = \frac{1}{2\pi i(p+1)} \int\limits_{\mathfrak{C}^*_{m0}} \frac{[\psi(z_n)]^{p+1} \cdot f'_{z_n}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)}{[f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) - c_0]^2}\, dz_n$$

und

$$\mathfrak{B}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) = \begin{vmatrix} \mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_r \\ \ldots \quad \ldots \\ \mathfrak{U}_{r-1}, \mathfrak{U}_r, \ldots, \mathfrak{U}_{2r-1} \\ 1, \psi(z_n), \ldots, [\psi(z_n)]^r \end{vmatrix}.$$

Dass $\mathfrak{B}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ die behaupteten Eigenschaften besitzt, ist genau wie a.a.O. nachweisbar.

Wir betrachten nun

$$F(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) = \mathfrak{B}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) \cdot h(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n) = \mathfrak{B}/(f - c_0).$$

$F(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ ist *regulär* und eindeutig für

$$\left\{ |\eta_\nu - \eta'_\nu| \leqq \delta',\ z_n \text{ in } \mathfrak{D}^*_{m_0} \right\} \text{ und für } \left\{ \eta_\nu = \eta^*_\nu,\ z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0} \right\},$$

nach dem oben geführten Beweis des Kontinuitätssatzes für reguläre Funktionen also auch regulär und eindeutig für $\left\{ |\eta_\nu - \eta'_\nu| \leqq \delta',\ z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0} \right\}$. Daraus folgt aber, dass $f(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, z_n)$ für $\left\{ \eta_\nu = \eta'_\nu, z_n \text{ in } \mathfrak{G}^*_{m_0} \right\}$ meromorph und eindeutig ist. Also lässt sich auch $g(z_1, \ldots, z_n)$ in das gesamte Innere von $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta'_1, \ldots, \eta'_{n-1})$ vom Rande aus eindeutig meromorph fortsetzen, und diese Fortsetzung ist dort nirgends verzweigt, da gleiches sonst auf fast allen approximierenden $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta^{(\mu)}_1, \ldots, \eta^{(\mu)}_{n-1})$ eintreten müsste. Damit ist der gewünschte Widerspruch herbeigeführt.

Demnach ist $g(z_1, \ldots, z_n)$ in das Innere aller $\mathfrak{G}_{m_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ mit $|\eta_\nu| \leqq \delta$ vom Rande aus eindeutig meromorph fortsetzbar. Dass hierdurch eine in $\mathfrak{U}(\mathfrak{G})$ unverzweigte eindeutige Fortsetzung von $g(z_1, \ldots, z_n)$ gegeben ist, folgt genau wie oben im Falle regulärer Funktionen. Damit ist der verallgemeinerte Kontinuitätssatz für meromorphe Funktionen bewiesen.

Es bleibt noch die Existenz der oben benötigten Funktion $\psi(z_n)$ zu zeigen. Dieser Nachweis ist enthalten in

HILFSSATZ C. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet in einer nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, ferner P_ν eine höchstens abzählbare Folge von Punkten aus $\mathfrak{G}$ ohne Häufungspunkte im Innern von $\mathfrak{G}$. Jedem P_ν sei ein Ausdruck*

$$h_\nu(\tau_\nu) = \frac{a_{-k_\nu}^{(\nu)}}{\tau_\nu^{k_\nu}} + \frac{a_{-(k_\nu-1)}^{(\nu)}}{\tau_\nu^{k_\nu-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}^{(\nu)}}{\tau_\nu} + a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} \cdot \tau_\nu + \ldots + a_{l_\nu}^{(\nu)} \cdot \tau_\nu^{l_\nu},$$

$$k_\nu \geqq 0,\ l_\nu \geqq 0,$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1950-014-6 Published online by Cambridge University Press

zugeordnet; dabei bedeute τ_ν einen zu P_ν gehörenden ortsuniformisierenden Parameter. Dann gibt es eine in $\mathfrak{G}$ eindeutige meromorphe Funktion $\psi(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) *Für $\mathfrak{p}(z) \neq P_\nu$ ist $\psi(z)$ regulär.*

(2) *Für $\mathfrak{p}(z) = P_\nu$ stimmt die Laurententwicklung von $\psi(z)$ nach dem ortsuniformisierenden Parameter τ_ν bis zum l_ν-ten Gliede mit $h_\nu(\tau_\nu)$ überein.*

Beweis. In $\mathfrak{G}$ gelten (nach Abschnitt II) beide Aussagen von Cousin. Es gibt eine in $\mathfrak{G}$ eindeutige reguläre Funktion $a(z)$, die jeweils in P_ν eine Nullstelle $(l_\nu + 1)$-ter Ordnung besitzt. In $\mathfrak{U}(P_\nu)$ gelte etwa

$$a(z) = \beta_{l_\nu+1}{}^{(\nu)} \cdot \tau_\nu{}^{l_\nu+1} + \beta_{l_\nu+2}{}^{(\nu)} \cdot \tau_\nu{}^{l_\nu+2} + \dots ; \beta_{l_\nu+1}{}^{(\nu)} \neq 0.$$

Wir ordnen jedem P_ν einen Ausdruck

$$h^*{}_\nu(\tau_\nu) = \frac{A_{-(k_\nu+l_\nu+1)}{}^{(\nu)}}{\tau_\nu{}^{k_\nu+l_\nu+1}} + \frac{A_{-(k_\nu+l_\nu)}{}^{(\nu)}}{\tau_\nu{}^{k_\nu+l_\nu}} + \dots + \frac{A_{-1}{}^{(\nu)}}{\tau_\nu}$$

zu, worin die Koeffizienten $A_{-\rho}{}^{(\nu)}$, $\rho = 1, \dots, k_\nu + l_\nu + 1$, so festgelegt seien, dass

$$(1) \qquad h^*{}_\nu(\tau_\nu) \cdot a(z) = \left(\sum_{\rho=1}^{k_\nu+l_\nu+1} \frac{A_{-\rho}{}^{(\nu)}}{\tau_\nu{}^\rho}\right) \cdot \left(\sum_{\kappa=l_\nu+1}^{\infty} \beta_\kappa{}^{(\nu)} \cdot \tau_\nu{}^\kappa\right)$$

$$= \frac{\mathfrak{a}_{-k_\nu}{}^{(\nu)}}{\tau_\nu{}^{k_\nu}} + \dots + \frac{\mathfrak{a}_{-1}{}^{(\nu)}}{\tau_\nu} + \mathfrak{a}_0{}^{(\nu)} + \dots + \mathfrak{a}_{l_\nu}{}^{(\nu)} \cdot \tau_\nu{}^{l_\nu} + \dots$$

wird; hierdurch sind die $A_{-\rho}{}^{(\nu)}$ eindeutig bestimmt. Wegen der Gültigkeit der ersten Cousinschen Aussage in $\mathfrak{G}$ gibt es eine in $\mathfrak{G}$ eindeutige meromorphe Funktion $b(z)$, für welche jeweils in P_ν der Hauptteil der Laurententwicklung nach dem Parameter τ_ν mit $h^*{}_\nu(\tau_\nu)$ übereinstimmt, die ferner in allen Punkten $\mathfrak{p}(z) \neq P_\nu$ aus $\mathfrak{G}$ regulär ist. Setzen wir nun

$$\psi(z) = a(z) \cdot b(z),$$

so hat $\psi(z)$ wegen (1) die geforderte Eigenschaft.

Münster (Westf.)