J. Austral. Math. Soc. (*Series A*) **49** (1990), 241–249

ALLGEMEINES ÜBER ÄUSSERE FITTINGPAARE

JOACHIM PENSE

(Received 1 July 1989; revised 30 August 1989)

Communicated by H. Lausch

Abstract

We discuss some general properties and limitations of the concept of outer Fitting pairs introduced earlier by the author. We describe an outer Fitting pair as a co-cone in the category of what we call outer groups (roughly speaking the category of groups modulo inner automorphisms). It is shown that generally no universal outer Fitting pair exists, whence this category is not co-complete. Additionally it is shown that if the target group of an outer Fitting pair is finite, then the much more amenable concept of normal Fitting pairs (that is, co-cones in the category of groups) applies.

1980 *Mathematics subject classification* (*Amer. Math. Soc.*) (1985 *Revision*): primary 20 D 10; secondary 18 B 99.

Einleitung

In [4] definiert H. Lausch—basierend auf einem Konzept von Blessenohl und Gaschütz [1]—den Begriff des normalen Fittingpaares. Ein solches ist ein Paar $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$, wobei $\mathbf{A}$ eine abelsche Gruppe und $\mathbf{d}$ eine natürliche Transformation einer Fittingklasse $\mathscr{F}$ (mit den (sub)normalen Einbettungen als Pfeilen) in das triviale Diagramm von $\mathbf{A}$ bezeichnen. (Mit anderen Worten: Ist $N, G \in \mathscr{F}$ und ist ν ein Monomorphismus von N in G mit $\nu(N) \trianglelefteq G$, so gilt $\mathbf{d}_N = \mathbf{d}_G \circ \nu$.) Solche normalen Fittingpaare haben sich in der Theorie der Fittingklassen endlicher Gruppen als äußerst hilfreich erwiesen, unter anderem bei der Konstruktion von Beispielen.

In [5] werden äußere Fittingpaare eingeführt; dabei wird die Bedingung, daß $\mathbf{A}$ eine abelsche Gruppe sein soll, fallengelassen, und die Gleichheit der

https://doi.org/10.1017/S1446788700030512 Published online by Cambridge University Press

Abbildungen $\mathbf{d}_N$ und $\mathbf{d}_G \circ \nu$ soll nur bis auf einen nachgeschalteten inneren Automorphismus von $\mathbf{A}$ gelten. Mit diesem Begriff konnte eine große Zahl von Konstruktionen von Fittingklassen vereinfacht und vereinheitlicht werden.

In dieser Note sollen nun einige allgemeine Aspekte des Begriffs der äußeren Fittingpaare untersucht werden, die nicht von dem genannten Typ von Beispielen abhängen.

Zunächst gebe ich (unter Verwendung der von P. Hall definierten universellen Gruppen) einen weiteren Typ äußerer Fittingpaare an, der allerdings keine praktische Bedeutung für die Konstruktion von Fittingklassen haben kann. Man kann ihn aber verwenden, um die Nichtexistenz sogenannter universeller äußerer Fittingpaare zu zeigen—so daß die Eleganz der Theorie normaler Fittingpaare nicht auf äußere Fittingpaare übertragen werden kann.

Darauf definiere ich die Kategorie der äußeren Gruppen, eine Quotientenkategorie der Kategorie der Gruppen, bei der diejenigen Pfeile identifiziert werden, die durch nachgeschalteten inneren Automorphismus ineinander übergehen. (Die Automorphismen in dieser Kategorie sind gerade die äußeren Automorphismen im gewöhnlichen Sinne, daher der Name.) Dies erlaubt, die Definitionen von äußeren Fittingpaaren, deren Äquivalenz, Univesalität etc. auf eine mit den entsprechenden Definitionen für normale Fittingpaare übereinstimmende Form zu bringen.

Schließlich zeige ich, daß äußere Fittingpaare mit endlicher Zielgruppe $\mathbf{A}$ immer in ein normales Fittingpaar überführt werden können.

Ich danke H. Fendrich und F. Leinen für hilfreiche Diskussionen. Das Material für diesen Artikel stammt aus der Dissertation des Autors.

1. Vorbereitungen

Wir unterscheiden endliche Gruppen G, H und möglicherweise unendliche Gruppen $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ durch die Schreibweise.

Definition 1. Eine *Fittingklasse* ist eine (wie üblich unter Isomorphismen abgeschlossene) Klasse endlicher Gruppen, die unter der Bildung von Normalteilern sowie von Produkten von Normalteilern abgeschlossen ist.

Ist $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse und G eine endliche Gruppe, so heißt der größte $\mathscr{F}$-Normalteiler von G das *$\mathscr{F}$-Radikal* $G_{\mathscr{F}}$ von G.

Eine *Fittingmenge von* $\mathbf{G}$ ist eine Menge endlicher Untergruppen der festen Gruppe $\mathbf{G}$, die unter Konjugation in $\mathbf{G}$, Normalteilerbildung und der Bildung normaler Produkte abgeschlossen ist.

Ist $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse und $\mathbf{G}$ eine Gruppe, so ist die *Spur* von $\mathscr{F}$ in $\mathbf{G}$ die Fittingmenge $\mathrm{tr}_{\mathbf{G}}(\mathscr{F}) := \{U \leq \mathbf{G} | U \in \mathscr{F}\}$.

Wir geben zum Vergleich die Definitionen zu normalen Fittingpaaren an (vgl. [2]):

DEFINITION 2. Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse. Ein *normales $\mathscr{F}$-Fittingpaar* $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ besteht aus einer Gruppe $\mathbf{A}$ und einer Familie $(\mathbf{d}_G \in \mathrm{Hom}(G, \mathbf{A}) | G \in \mathscr{F})$ derart, daß für jede normale Einbettung $\nu : N \to G \in \mathscr{F}$ die Gleichung $\mathbf{d}_N = \mathbf{d}_G \circ \nu$ erfüllt ist.

O.B.d.A. kann man $\mathbf{A}$ als abelsch annehmen; ebenso kann angenommen werden, daß $\mathbf{A} = \langle \mathbf{d}_G(G) | G \in \mathscr{F} \rangle = \bigcup_{G \in \mathscr{F}} \mathbf{d}_G(G)$.

DEFINITION 3. Für ein normales Fittingpaar $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ und einen Homomorphismus $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ definiert man das *induzierte* normale Fittingpaar $(\varphi \circ \mathbf{d}, \mathbf{B})$ durch $(\varphi \circ \mathbf{d})_G := \varphi \circ \mathbf{d}_G$.

DEFINITION 4. Zwei normale $\mathscr{F}$-Fittingpaare $(\mathbf{d}_1, \mathbf{A}_1)$ und $(\mathbf{d}_2, \mathbf{A}_2)$ heißen *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $\iota : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ gibt derart, daß für jedes $G \in \mathscr{F}$ die Gleichung $\mathbf{d}_{2G} = \iota \circ \mathbf{d}_{1G}$ gilt.

DEFINITION 5. Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse. Ein *universelles normales $\mathscr{F}$-Fittingpaar* ist ein normales $\mathscr{F}$-Fittingpaar (δ, Λ) mit der Eigenschaft, daß für jedes normale $\mathscr{F}$-Fittingpaar $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ ein eindeutiger Homomorphismus $\psi : \Lambda \to \mathbf{A}$ mit

$$\mathbf{d}_G = \psi \circ \delta_G$$

für alle G in $\mathscr{F}$ existiert.

Sicher existieren universelle normale $\mathscr{F}$-Fittingpaare für jede Fittingklasse $\mathscr{F}$: Setze einfach $(\delta, \Lambda) = \varinjlim(\mathscr{F})$, wobei die Pfeile in $\mathscr{F}$ die normalen Einbettungen zwischen Gruppen aus $\mathscr{F}$ sein sollen. Λ heißt die *Lauschgruppe* von $\mathscr{F}$. Man definiert die Fittingklassen $\mathscr{F}_* := \{G | \delta_G(G) = 1_\Lambda\}$ und $\mathscr{F}^* := \{G | (G \times G)_{\mathscr{F}}$ ist subdirekt$\}$.

Die Menge aller Fittingklassen $\mathscr{H}$ mit $\mathscr{F}_* \subseteq \mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}^*$ heißt der *Lockettabschnitt* $\mathrm{Locksec}(\mathscr{F})$ von $\mathscr{F}$. Für eine Fittingklasse $\mathscr{H}$ gilt:

$$\mathscr{H} \in \mathrm{Locksec}(\mathscr{F}) \Leftrightarrow \mathscr{H}^* = \mathscr{F}^* \Leftrightarrow \mathscr{H}_* = \mathscr{F}_*.$$

Wir definieren nun die äußeren Fittingpaare.

DEFINITION 6. Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse. Ein *äußeres $\mathscr{F}$-Fittingpaar* $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ besteht aus einer Gruppe $\mathbf{A}$ und einer Familie $(\mathbf{d}_G \in \mathrm{Hom}(G, \mathbf{A}) | G \in \mathscr{F})$, so daß für jede normale Einbettung $\nu : N \to G \in \mathscr{F}$ ein innerer Automorphismus α von $\mathbf{A}$ mit $\alpha \circ \mathbf{d}_N = \mathbf{d}_G \circ \nu$ existiert.

SATZ 7 [5]. *Sei* $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ *ein äußeres $\mathscr{F}$-Fittingpaar und* F *eine Fittingmenge von* $\mathbf{A}$. *Dann gilt: Die Klasse* $\mathbf{d}^{-1}(\mathsf{F}) := (G \in \mathscr{F} | \mathbf{d}_G(G) \in \mathsf{F})$ *ist eine Fittingklasse.*

G. Zappa hat in [7] eine ähnliche Definiton angegeben; sie ist äquivalent dazu, daßman in 6 den inneren Automorphismus α durch einen beliebigen Isomorphismus $\alpha: \mathbf{d}_N(N) \to \mathbf{d}_G\nu(N)$ ersetzt. Satz 7 gilt dann nur noch für Fittingmengen, die Spuren von Fittingklassen sind. In [7] zeigt Zappa durch eine universelle Konstruktion, daßjede Fittingklasse sogar als Kern eines solchen Zappa-Paares darstellbar ist. Für unsere Anwendungen sind wir auf die restriktivere Definition 6 angewiesen, da wir Fittingmengen konstruieren, die nicht Spuren von Fittingklassen sind (vgl. [5]).

Definition 8. Für ein äußeres Fittingpaar $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ und einen Homomorphismus $\varphi: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ definieren wir das *induzierte* äußere Fittingpaar $(\varphi \circ \mathbf{d}, \mathbf{B})$ durch $(\varphi \circ \mathbf{d})_G := \varphi \circ \mathbf{d}_G$. Für $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{A}$ bezeichnen wir mit $(\mathbf{d} \bmod \mathbf{N}, \mathbf{A}/\mathbf{N})$ das durch den natürlichen Homomorphismus auf die Faktorgruppe induzierte äußere Fittingpaar.

Definition 9. Zwei äußere $\mathscr{F}$-Fittingpaare $(\mathbf{d}_1, \mathbf{A}_1)$ und $(\mathbf{d}_2, \mathbf{A}_2)$ heißen *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $\iota: \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ gibt, so daß für jedes $G \in \mathscr{F}$ ein $\alpha_G \in \mathrm{Inn}(\mathbf{A}_2)$ existiert mit $\mathbf{d}_{2G} = \alpha_G \circ \iota \circ \mathbf{d}_{1G}$.

Sicher liefern äquivalente äußere Fittingpaare bei der Anwendung von 7 dieselben Fittingklassen als Urbilder von Fittingmengen.

2. Universelle Gruppen

Die von P. Hall eingeführten universellen Gruppen liefern einen trivialen Typus von äußeren Fittingpaaren. Wir sammeln die hier relevanten Aussagen über universelle Gruppen aus dem Buch von Kegel und Wehrfritz.

Definition 10 [3]. Eine lokal endliche Gruppe $\mathbf{U}$ ist *universell*, wenn jede endliche Gruppe in $\mathbf{U}$ eingebettet werden kann, und wenn zwei isomorphe endliche Untergruppen von $\mathbf{U}$ sogar konjugiert in $\mathbf{U}$ sind.

Satz 11 [3, Theorem 6.1a]. *Sei $\mathbf{U}$ eine universelle Gruppe. Sind A und B endliche Untergruppen von $\mathbf{U}$, so wird jeder Isomorphismus von A auf B von einem inneren Automorphismus von $\mathbf{U}$ induziert.*

Satz 12 [3, Theorem 6.4]. *Es gibt universelle Gruppen abzählbarer Ordnung.*

Satz 13 [3, Theorem 6.7]. *Ist $\mathbf{U}$ eine universelle Gruppe und $\mathbf{G}$ eine abzählbare lokal endliche Gruppe, so enthält $\mathbf{U}$ überabzählbar viele verschiedene zu $\mathbf{G}$ isomorphe Untergruppen.*

Mit $\mathscr{E}$ bezeichnen wir die Fittingklasse aller endlichen Gruppen. Die beiden folgenden Aussagen sind offensichtlich:

KOROLLAR 14. *Sei* $\mathbf{U}$ *eine universelle Gruppe. Wähle für jede endliche Gruppe* G *eine Einbettung* $\iota_G^{\mathbf{U}}$ *von* G *in* $\mathbf{U}$. *Dann ist* $(\iota^{\mathbf{U}}, \mathbf{U})$ *ein äußeres* $\mathscr{E}$*-Fittingpaar.*

KOROLLAR 15. *Sei* F *eine Fittingmenge der universellen Gruppe* $\mathbf{U}$. *Ist* $\mathscr{F} := (\iota^{\mathbf{U}})^{-1}\mathsf{F}$, *so ist* $\mathsf{F} = \mathrm{tr}_{\mathbf{U}}(\mathscr{F})$.

Aus den $(\iota^{\mathbf{U}}, \mathbf{U})$-Fittingpaaren lassen sich also keine neuen Fittingklassen ableiten.

Eine Bedeutung der universellen Gruppen für uns liegt darin, daß ihre Existenz es uns ermöglicht, von Gruppenklassen, darauf definierten Abbildungen und sogar von Mengen von Gruppenklassen (z. B. Lockettabschnitten) zu sprechen, ohne mit der Mengenlehre in Konflikt zu geraten: Wir müssen nur die Gruppenklassen als Untergruppenklassen einer festen universellen Gruppe auffassen; dann haben wir sie ohne Informationsverlust in Mengen verwandelt. (Ein Informationsverlust wäre etwa dann gegeben, wenn wir nur ein Isomorphietypenvertretersystem als "Universum" unserer Betrachtung wählten: Zwei isomorphe Untergruppen einer endlichen Gruppe sollen sehr wohl als verschieden aufgefaßt werden.)

3. Äußere Gruppen

Dieser Abschnitt soll andeuten, in welchem Sinne die Begriffe "äußeres Fittingpaar" und "Äquivalenz äußerer Fittingpaare" einen "natürlichen" Charakter haben.

DEFINITION 16. Die Kategorie **OG** der äußeren Gruppen definieren wir folgendermaßen als Quotientenkategorie der Kategorie der Gruppen:

(1) Die Objekte von **OG** sind die Gruppen;

(2) Die Morphismen von **OG** sind Äquivalenzklassen von Gruppenhomomorphismen, sogenannten äußeren Homomorphismen. Dabei seien zwei Homomorphismen $\alpha, \beta: \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ äquivalent, wenn es ein $\eta \in \mathrm{Inn}(\mathbf{H})$ gibt, so daß $\beta = \eta \circ \alpha$.

BEMERKUNG 17. Die angegebene Äquivalenzrelation ist in der Tat eine Kongruenzrelation, d.h. mit der Abbildungsverknüpfung verträglich: Seien G_0, G_1, G_2 Gruppen,

$$\alpha_i, \beta_i: G_{i-1} \to G_i, \quad \beta_i = \eta_i \circ \alpha_i,$$
$$\eta_i \in \mathrm{Inn}(G_i), \quad \eta_i := g \mapsto g^{e_i} \qquad (i = 1, 2);$$

dann gilt für $g \in G_0$:

$$\begin{aligned}
\beta_2(\beta_1(g)) &= \beta_2(\eta_1(\alpha_1(g))) \\
&= \beta_2(e_1\alpha_1(g)e_1^{-1}) \\
&= \beta_2(e_1)\beta_2(\alpha_1(g))\beta_2(e_1)^{-1} \\
&= \beta_2(e_1)\eta_2(\alpha_2(\alpha_1(g)))\beta_2(e_1)^{-1} \\
&= \beta_2(e_1)e_2\alpha_2(\alpha_1(g))e_2^{-1}\beta_2(e_1)^{-1} \\
&= (\alpha_2 \circ \alpha_1(g))^{\beta_2(e_1)e_2},
\end{aligned}$$

und daher $\beta_2 \circ \beta_1 = \eta \circ (\alpha_2 \circ \alpha_1)$ mit $\eta := g \mapsto g^{\beta_2(e_1)e_2} \in \operatorname{Inn}(G_2)$.

Wir müssen hierbei die durch die Linksschreibung von Abbildungen veränderte Rechenregel $(a^b)^c = a^{cb}$ für das Konjugieren in einer Gruppe beachten.

DEFINITION 18. Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse. Eine *normales F-Fittingpaar* in **OG** ist ein Paar $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$, $\mathbf{A}$ eine Gruppe, $\mathbf{d}$ eine Familie $(\mathbf{d}_G | G \in \mathscr{F})$ von äußeren Homomorphismen $G \to \mathbf{A}$ $(G \in \mathscr{F})$, so daß für jede "äußere normale Einbettung" $\nu: N \to G$ $(G \in \mathscr{F})$ gilt: $\mathbf{d}_N = \mathbf{d}_G \circ \nu$.

BEMERKUNG 19. Ein normales Fittingpaar $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ in **OG** kann als Äquivalenzklasse (im Sinne der Äquivalenz von äußeren Fittingpaaren) äußerer Fittingpaare mit Zielgruppe $\mathbf{A}$ aufgefaßt werden.

4. Universelle äußere Fittingpaare

Da in der Kategorie **OG** im Unterschied zu der der Gruppen nicht immer Limites existieren, gelingt es nicht, den Begriff der Lauschgruppe und des Lockett-*-Operators auf äußere Fittingpaare zu übertragen.

DEFINITION 20. Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse. Ein *universelles äußeres $\mathscr{F}$-Fittingpaar* ist ein äußeres $\mathscr{F}$-Fittingpaar (δ, Λ) mit der Eigenschaft, daß für jedes äußere $\mathscr{F}$-Fittingpaar $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ ein bis auf nachgeschalteten inneren Automorphismus von $\mathbf{A}$ eindeutiger Homomorphismus $\psi: \Lambda \to \mathbf{A}$ und für jedes $G \in \mathscr{F}$ ein innerer Automorphismus α_G von $\mathbf{A}$ existieren, so daß

$$\mathbf{d}_G = \alpha_G \circ \psi \circ \delta_G$$

für alle G in $\mathscr{F}$ gilt.

Übersetzt man diese Bedingung in die Sprache der äußeren Gruppen, so erhält man eine formale Übereinstimmung mit der Definition der universellen normalen Fittingpaare.

BEMERKUNG 21. Sei (δ, Λ) ein universelles äußeres $\mathscr{F}$-Fittingpaar. Dann ist $(\delta, \Lambda) = \varinjlim \mathscr{F}$, wobei als Pfeile alle äußeren normalen Einbettungen genommenwerden.

Die Existenz universeller normaler Fittingpaare ist eine Folge der Rechts-Vollständigkeit der Kategorie der Gruppen. Diese Vollständigkeit ist für äußere Gruppen nicht gegeben, und wir erhalten (leider) sogar.

Satz 22. *Es gibt kein universelles äußeres $\mathscr{E}$-Fittingpaar.*

Beweis. Sei (δ, Λ) ein universelles äußeres $\mathscr{E}$-Fittingpaar. Sei $\mathbf{U}$ eine abzählbare universelle Gruppe (s. 12) und $(\iota^{\mathbf{U}}, \mathbf{U})$ wie in 14. Ist nun $\psi: \Lambda \to \mathbf{U}$ ein Homomorphismus, so erfüllt er nach 11 mit ι die Bedingung aus 20. Es kann also nur abzählbar viele solche ψ geben, da diese ja alle konjugiert sein sollen. Andererseits gibt es nach 13 überabzählbar viele Homomorphismen $\Lambda \to \mathbf{U}$, und das ist ein Widerspruch.

5. Normierung

Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse. Wir wählen uns ein festes angeordnetes Isomorphietypenvertretersystem

$$\mathrm{Skel}(\mathscr{F}) = \{G_1, G_2, \dots\}.$$

Für jedes $G \in \mathscr{F}$ gibt es also genau ein $n(G)$ mit $G_{n(G)} \simeq G$. Wir ordnen jedem $G \in \mathscr{F}$ einen Isomorphismus $\beta_G: G \to G_{n(G)}$ zu.

Ferner setzen wir $D_n := G_1 \times \cdots \times G_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$; diese Wahlen können so getroffen werden, daß die kanonischen Inklusionen $D_n \to D_{n+1}$ und $G_n \to D_n$ jeweils identische Abbildungen sind. Insbesondere kann die Wahl der β_G so getroffen werden, daß β_{G_n} für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität ist. (Wir tun dies, indem wir das eingeschränkte direkte Produkt $\mathbf{D}$ von $\mathrm{Skel}(\mathscr{F})$ bilden und dann die G_n, D_n durch die entsprechenden Untergruppen dieses Produktes ersetzen.)

Ist nun $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ ein äußeres $\mathscr{F}$-Fittingpaar, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\alpha_n \in \mathrm{Inn}(\mathbf{A})$, so daß

$$\alpha_n \circ \mathbf{d}_{D_n} = \mathbf{d}_{D_{n+1}}|_{D_n}.$$

Wir definieren nun für $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{\mathbf{d}}_{D_n} := \alpha_1^{-1} \circ \cdots \circ \alpha_{n-1}^{-1} \circ \mathbf{d}_{D_n}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{\mathbf{d}}_{D_n} = \tilde{\mathbf{d}}_{D_{n+1}}|_{D_n},$$

und wir erhalten durch die Festsetzung

$$\tilde{d}|_{D_n} := \tilde{\mathbf{d}}_{D_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

https://doi.org/10.1017/S1446788700030512 Published online by Cambridge University Press

einen wohldefinierten Homomorphismus $\tilde{d}$ vom eingeschränkten direkten Produkt $\mathbf{D}$ nach $\mathbf{A}$.

Für jedes $G \in \mathscr{F}$ setzen wir $\hat{\mathbf{d}}_G := \tilde{d} \circ \beta_G$.

Offensichtlich haben wir damit ein zu $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ äquivalentes äußeres Fittingpaar $(\hat{\mathbf{d}}, \mathbf{A})$ konstruiert. Dieses Paar können wir als eine "Normierung" von $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ ansehen.

Als Anwendung zeigen wir

SATZ 23. *Sei* $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ *ein äußeres* $\mathscr{F}$*-Fittingpaar mit der Eigenschaft, daß* $\mathscr{F}_0 := \mathbf{d}^{-1}(1_{\mathbf{A}})$ *im Lockettabschnitt von* $\mathscr{F}$ *liegt. Dann ist* $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ *zu einem normalen Fittingpaar* $(e, \mathbf{A})$ *äquivalent.*

BEWEIS. Sei $N \trianglelefteq G \in \mathscr{F}$. Betrachte die Untergruppe $\beta_G(N) \times \beta_N(N)$ von $\mathbf{D}$. Bezeichne α den Automorphismus dieser Gruppe, der die beiden Komponenten vertauscht. Ist $x \in N$, so gilt

$$[\beta_G(x), \alpha] \in (\beta_G(N) \times \beta_N(N))_{\mathscr{F}_0},$$

da $\mathscr{F}_0$ im Lockettabschnitt von $\mathscr{F}$ liegt (s. [2]). Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= \tilde{d}([\beta_G(x), \alpha]) = \tilde{d}(\beta_G(x)^{-1}\alpha(\beta_G(x))) \\ &= \tilde{d}(\beta_G(x)^{-1}\beta_N(x)) = \tilde{d}(\beta_G(x)^{-1})\tilde{d}(\beta_N(x)) = \hat{\mathbf{d}}_G(x)^{-1}\hat{\mathbf{d}}_N(x), \end{aligned}$$

und damit $\hat{\mathbf{d}}_N = \hat{\mathbf{d}}_G|_N$, und $\hat{\mathbf{d}}$ ist das gesuchte e.

In Satz 23 gilt im allgemeinen nicht $\mathbf{d} = \mathbf{e}$: Sei etwa $(\mathbf{e}, Z_2)$ ein normales $\mathscr{E}$-Fittinpaar. Wir identifizieren Z_2 mit der Untergruppe $\langle(12)\rangle$ von Sym(3) und erhalten ein normales $\mathscr{E}$-Fittingpaar $(\mathbf{e}, \mathrm{Sym}(3))$. Wir konstruieren nun ein nicht-normales äuß eres $\mathscr{E}$-Fittingpaar $(\mathbf{d}, \mathrm{Sym}(3))$, zu dem $(\mathbf{e}, \mathrm{Sym}(3))$ äquivalent ist: Dazu ordnen wir jeder Gruppe $G \in \mathscr{E}$ willkürlich eine zweielementige Untergruppe $T(G)$ von Sym(3) zu; die Verknüpfung der $\mathbf{e}_G$ mit dem jeweiligen Isomorphismus $Z_2 \to T(G)$ definiert ein äußeres Fittinpaar, das bei geeigneter Wahl der $T(G)$ sicher nicht normal ist.

Gilt für Fittingklassen $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{F}$ immer $|G : G_{\mathscr{K}}| \leq n$ für alle $G \in \mathscr{F}$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so liegt bekanntlich $\mathscr{K}$ im Lockettabschnitt von $\mathscr{F}$. Es folgt:

KOROLLAR 24. *Sei* $(\mathbf{d}, A)$ *ein äußeres Fittingpaar mit endlichem* A. *Dann ist* $(\mathbf{d}, A)$ *äquivalent zu einem normalen Fittingpaar.*

Die Zielgruppe eines nicht-normalen äußeren Fittingpaares kann also ohne Einschränkung der Allgemeinheit immer als unendlich angenommen werdern.

https://doi.org/10.1017/S1446788700030512 Published online by Cambridge University Press

Literatur

[1] D. Blessenohl and W. Gaschütz, 'Über normale Schunck- und Fittingklassen', *Math. Z.* **118** (1970), 1–8.
[2] T. O. Hawkes, 'Finite soluble groups', in *Group theory, Essays for Philip Hall*, edited by K. W. Gruenberg and J. E. Roseblade, (Academic Press, London, San Francisco, Sydney, 1984).
[3] O. H. Kegel and B. A. F. Wehrfritz, *Locally finite groups*, (North-Holland, Amsterdam, 1973).
[4] H. Lausch, 'On normal Fitting classes', *Math. Z.* **130** (1973), 67–72.
[5] J. Pense, 'Outer Fitting pairs', *J. Algebra* **119** (1988), 34–50.
[6] H. Schubert, *Kategorien* I, (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970).
[7] G. Zappa, 'Sulla costruzione di classi di Fitting', *Lincei Rend. Sci. Fis. Mat. Nat.* **62**, fasc. 6 (1977), 725–728.

Fachbereich Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität
D-6500 Mainz
Federal Republic of Germany

https://doi.org/10.1017/S1446788700030512 Published online by Cambridge University Press