REMARQUES SUR LA TRANSFORMATION D'UNE FAMILLE DE LOIS DE POISSON COMPOSÉES EN LOIS DE POISSON PAR GRAPPES

PAUL THYRION

Bruxelles

RÉSUMÉ

Cette note montre l'équivalence entre deux manières de présenter la condition nécessaire et suffisante pour qu'une certaine famille de lois de Poisson composées puisse se transformer en lois de Poisson par grappes et en tire, dans ce cas, la forme générale de la loi de probabilité des grappes.

I. TERMINOLOGIE

Il faut bien reconnaître que la terminologie anglaise en cette matière est parfois ambiguë: il arrive que la même expression recouvre, selon les auteurs, des significations différentes (ainsi en est-il par exemple de „Compound Poisson Variable''). On n'oserait pas affirmer non plus que la terminologie française soit universellement arrêtée. Pour des raisons de clarté, nous rappellerons donc tout d'abord le sens dans lequel nous employons systématiquement certaines expressions.

Une variable entière non négative N obéit à une loi de Poisson composée au sens restreint si

$$P(N = n; t) = P(n; t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, dU(\lambda)$$

$U(\lambda)$ étant la fonction de répartition d'une variable non négative. Si $U(\lambda)$ dépendait de t on parlerait d'une loi de Poisson composée au sens large.

https://doi.org/10.1017/S0515036100008230 Published online by Cambridge University Press

Une variable entière non négative N obéit à une loi de Poisson par grappes si

$$P(o;t) = e^{\theta(t)} \qquad \theta(o) = o \qquad \theta(t) < o.$$

$$P(n;t) = \sum_{m=1}^{=n} e^{\theta(t)} \frac{[-\theta(t)]^m}{m!} G^{m*}(n;t)$$

$G(k;t)$, dite loi de probabilité des grappes, est une loi de probabilité quelconque d'une variable entière positive, dépendant éventuellement du temps. Pour des raisons d'uniformité, nous écartons le cas théorique où $G(o;t)$ serait $> o$ (c'est-à-dire où les grappes pourraient être nulles) car il peut toujours se ramener à celui que nous considérons.

Une variable $X(t)$ obéit à une loi P généralisée (ou non-élémentaire selon les auteurs scandinaves) si sa fonction de répartition est

$$H(x;t) = \sum_{n=0}^{=\infty} P(n;t) \,.\, F^{n*}(x;t) \quad (F^{0*} = 1)$$

où $P(n;t)$ est la loi de probabilité d'une variable entière non négative, $F(x;t)$ étant une loi de répartition quelconque pour toute valeur de t. On voit dès lors qu'une loi de Poisson par grappes est une loi de Poisson généralisée pour une variable entière non négative.

2. Commentaires sur le theoreme de transformation

L'étude des possibilités d'extension de la théorie collective du risque, dans sa version initiale classique, montre l'intérêt qu'il y a de rechercher les lois de probabilité qui peuvent se transformer en lois de Poisson par grappes. Les recherches dans ce domaine se sont plus particulièrement tournées vers l'équivalence entre certaines lois de Poisson composées au sens restreint et les lois de Poisson par grappes.

A cet égard la note de H. Bühlmann et R. Buzzi [1] [1]) déposée à ce colloque établit le théorème de transformation que l'on peut énoncer comme suit (dans notre terminologie): la condition nécessaire et suffisante pour qu'une loi de Poisson composée au sens

[1]) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie indiquée in fine.

restreint soit en même temps une loi de Poisson par grappes est que sa fonction de structure $U(\lambda)$ soit indéfiniment divisible.

Or, selon Feller [2 — p. 425], une fonction $e^{-\Psi(u)}$ est la transformée de Laplace d'une fonction de répartition indéfiniment divisible d'une variable non négative, si et seulement si $\Psi(0) = 0$ et si $\Psi(u)$ a une dérivée absolument monotone.

Or la transformée de Laplace de $U(\lambda)$ peut s'écrire

$$L_U(u) = \int_0^\infty e^{-u\lambda}\, dU(\lambda) = P(o\,; u)$$

On peut toujours poser $P(o\,; u) = e^{\theta(u)}$

Dès lors si $U(\lambda)$ est indéfiniment divisible, on a toujours

$$\theta(o) = 0$$

$$\frac{d^n\,[-\theta'(u)]}{du^n} = (-1)^{n+1}\,\theta^{(n+1)}(u) \geqslant 0.$$

et vice-versa.

On retrouve ainsi le théorème de transformation que nous avions exprimé [3] de la manière suivante — moins élégante que celle des auteurs indiqués ci-dessus, mais en fait équivalente —: la forme canonique des lois de Poisson composées au sens restreint qui sont également des lois de Poisson par grappes est définie par

$$P(o : t) = e^{\theta(t)}$$

$$P(n\,; t) = \frac{(-t)^n}{n!}\, P^{(n)}\,(o\,; t) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

avec $\theta(o) = 0$

$\theta(t)$ indéfiniment dérivable et telle que

$(-1)^n\,\theta^{(n)}\,(t) \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$

Considérées comme des lois de Poisson par grappes, elles s'écrivent sous la forme

$$P(n\,; t) = \sum_{m=1}^{n} e^{\theta(t)}\, \frac{[-\theta(t)]^m}{m!}\, G^{m*}(n\,;t) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

avec $$G(k\,; t) = \frac{(-t)^k}{k!}\, \frac{\theta^{(k)}(t)}{-\theta(t)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100008230 Published online by Cambridge University Press

3. Remarque

Pour démontrer la nécessité de la condition, H. Bühlmann et R. Buzzi font appel à une restriction (voir page 2 — $\int x dF(x)$ fini) tout en exprimant des doutes sur son caractère indispensable.

Il nous semble que l'on peut éviter cette restriction en établissant le théorème tout d'abord pour une loi de Poisson composée non généralisée (selon notre terminologie). On obtiendrait ainsi l'équivalence entre les fonctions caractéristiques suivantes (selon les notations des auteurs)

$$\int_0^\infty e^{\lambda t\,(e^{iu}-1)}\, dS(\lambda) = e^{\mu(t)\,[\eta_t(u)-1]}$$

où, puisqu'il s'agit pour l'instant d'une variable entière non négative, $\eta_t(u)$ est nécessairement de la forme $\sum_{k=1}^{\infty} G(k;t) \,.\, e^{iu\,k}$

$G(k;t)$ étant une loi de probabilité d'une variable entière positive. L'identité subsiste si l'on remplace dans le premier membre e^{iu} par $X(u)$, fonction caractéristique quelconque, et corrélativement dans le second membre,

$$\eta_t(u) \text{ par } \overline{X}_t(u) = \sum_{k=1}^{\infty} G(k;t)\, X^k(u)$$

Or $\overline{X}_t(u)$ est certainement une fonction caractéristique puisque c'est une fonction linéaire de fonctions caractéristiques, dont les coefficients sont tous non négatifs et ont une somme égale à 1.

4. Nature de la loi de probabilité des grappes

a) Nous avons rappelé ci-dessus que, dans les conditions du théorème de transformation, la loi de probabilité des grappes est

$$G(k;t) = \frac{(-t)^k}{k!}\,\frac{\theta^{(k)}(t)}{-\theta(t)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Recherchons la nature générale de cette loi $G(k;t)$ qui régit le nombre d'unités dans une grappe.

Selon Feller [2 — p. 426], la condition nécessaire et suffisante — donnée ci-dessus — pour que $e^{-\Psi(u)}$ soit la transformée de Laplace d'une fonction de répartition indéfiniment divisible d'une

https://doi.org/10.1017/S0515036100008230 Published online by Cambridge University Press

variable non négative peut s'exprimer alternativement comme suit: il faut et il suffit que

$$\Psi(u) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-uv}}{v} \, dV(v)$$

$V(v)$ étant une mesure telle que

$$\int_1^\infty \frac{1}{v} \, dV(v), < \infty$$

Dès lors, revenant à nos notations, et dans les conditions imposées à $\theta(t)$, on peut poser:

$$\theta(t) = -\int_0^\infty \frac{1 - e^{-vt}}{v} \, dV(v)$$

$V(v)$ étant une fonction non décroissante de v (mais pas nécessairement une fonction de répartition).

Dès lors,

$$\theta^{(k)}(t) = (-1)^k \int_0^\infty v^{k-1} e^{-vt} \, dV(v)$$

$$\text{et } G(k;t) = \int_0^\infty \frac{(vt)^k}{k!} \frac{e^{-tv}}{1 - e^{-tv}} \frac{\dfrac{1 - e^{-tv}}{v} \, dV(v)}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-tv}}{v} \, dV(v)}$$

Posons

$$dW(v;t) = \frac{\dfrac{1 - e^{-tv}}{v} \, dV(v)}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-tv}}{v} \, dV(v)} = \frac{1 - e^{-tv}}{-v\theta(t)} \, dV(v)$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100008230 Published online by Cambridge University Press

On peut donc écrire $G(k; t)$ sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{(vt)^k}{k!} \frac{e^{-tv}}{1 - e^{-tv}} \, dW(v; t) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$W(v; t)$ étant une fonction de répartition d'une variable non négative v.

On voit ainsi que $G(k; t)$ est toujours une loi de Poisson tronquée par le bas (point 0 exclu), dont le paramètre est une variable aléatoire, régie par une loi de répartition dépendant du temps. Autrement dit, c'est une loi de Poisson tronquée, composée au sens large.

b) Exemple

Considérons la loi de Poisson composée

$$P(n; t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \, dU(\lambda)$$

où $$dU(\lambda) = \frac{a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-a\lambda} \, d\lambda \quad a > 0$$

qui est en fait la loi binomiale négative

$$P(n; t) = \frac{\Gamma(n + a)}{\Gamma(a)} \left(\frac{a}{a + t}\right)^a \left(\frac{t}{a + t}\right)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$U(\lambda)$ est indéfiniment divisible.

Donc $P(n; t)$ est équivalente à la loi de Poisson par grappes

$$P(o; t) = \left(\frac{a}{a + t}\right)^a$$

$$P(n; t) = \sum_{m=1}^{=n} \left(\frac{a}{a + t}\right)^a \frac{\left(a \log \frac{a + t}{a}\right)^m}{m!} \, G^{m*}(n; t)$$

avec $$G(k; t) = \int_0^\infty \frac{(vt)^k}{k!} \frac{e^{-vt}}{1 - e^{-vt}} \, dW(v; t) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

où $$dW(v; t) = \frac{(1 - e^{-tv}) dV(v)}{- v\theta(t)}$$

$V(v)$ étant tel que

$$\theta(t) = a \log \frac{a}{a+t} = -\int_0^\infty \frac{1 - e^{-vt}}{v} \, dV(v)$$

Dans ce cas, on peut vérifier que $dV(v) = a\, e^{-av} dv$

Dès lors $$dW(v; t) = \frac{(1 - e^{-tv})\, e^{-av}\, dv}{v \log \dfrac{a+t}{a}}$$

et la loi de probabilité des grappes est la loi de Poisson tronquée, composée au sens large

$$G(k; t) = \frac{1}{a \log \dfrac{a+t}{a}} \int_0^\infty \frac{v^{k-1}\, t^k}{k!} \, a\, e^{-(a+t)v}\, dv$$

$$= \frac{1}{\log \dfrac{a+t}{a}} \, \frac{1}{k} \left(\frac{t}{a+t} \right)^k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

On retrouve l'équivalence bien connue entre la loi binomiale négative et la loi de Poisson par grappes logarithmiques, établie autrefois par H. Ammeter.

Bibliographie

[1] H. Bühlmann et R. Buzzi — On a transformation of the weighted Compound Poisson Process — Colloque ASTIN — Sopot 1969.

[2] W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications — volume 2.

[3] P. Thyrion: Note sur une transformation des distributions généralisées — Bulletin de l'Association Royale des Actuaires Belges n° 61 — 1963.

[4] P. Thyron: Extension de la théorie collective du risque-Symposium on Risk Theory, Stockholm 1968.