Can. J. Math. Vol. 43 (5), 1991 pp. 1036–1044

PROBLEME DE CAUCHY A DEUX VARIABLES FUCHSIENNES

NOUR SAÏD MADI

Introduction. Nous allons considérer ici un opérateur de Cauchy à deux variables Fuchsiennes de la forme:

$$\mathcal{P} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} a_{\alpha_1,\alpha_2}(tD_t)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2} + \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+|\alpha'|\le m \\ \alpha_1+\alpha_2\ne m}} a_\alpha(t,s,y)(tD_t)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}D_y^{\alpha'}.$$

Puis nous allons chercher, sous certaines conditions d'hyperbolicité sur les racines caractéristiques Fuchsiennes, des solutions de l'équation $\mathcal{P}u = f$, dans le cas où f est régulière par rapport aux variables Fuchsiennes et analytique par rapport aux autres.

Baouendi et Goulaouic ont traité dans [1] ce même type d'opérateurs dans le cas d'une seule variable Fuchsienne. Dans [3] a été étudié le cas de plusieurs variables Fuchsiennes pour certains opérateurs de Goursat.

1. **Notations et resultats.** $x = (t,s,y)$ désigne un élément de $\mathbb{R}^{n+2}$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha')$ un multi-indice de $\mathbb{N}^{n+2}$, notons par:

$$D_t^{\alpha_1} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_t^{\alpha_1}}, \qquad D_s^{\alpha_2} = \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial_s^{\alpha_2}}, \qquad D_y^{\alpha'} = \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial_{y_1}^{\alpha_3}\cdots\partial_{y_n}^{\alpha_{n+2}}},$$

$$\text{et } D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_t^{\alpha_1}\partial_s^{\alpha_2}\partial_{y_1}^{\alpha_3}\cdots\partial_n^{\alpha_{n+2}}}$$

où

$$|\alpha'| = \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+2}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + |\alpha'|$$
$$(\alpha')! = \alpha_3\cdot\alpha_4\cdots\alpha_{n+2}, \qquad \alpha! = \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot(\alpha')!.$$

Dans $\mathbb{Z}^2$, nous considérons les relations suivantes:

$$(u_1,u_2) \le (n_1,n_2) \text{ si } u_1 \le n_1 \text{ et } u_2 \le n_2$$
$$(u_1,u_2) < (n_1,n_2) \text{ si } (u_1,u_2) \le (n_1,n_2) \text{ et } (u_1,u_2) \ne (n_1,n_2).$$

Comme c'est défini dans [4], le poids d'un monôme différentiel $b_\alpha(x)D$ par rapport à (t,s) est dit inférieur où égal à (μ_1,μ_2), s'il existe une fonction $\tilde{b}_\alpha(x)$ continue telle que:

$$b_\alpha(t,s,y) = t^{\alpha_1-\mu_1}s^{\alpha_2-\mu_2}\tilde{b}(t,s,y)$$
$$\text{avec: } (\mu_1,\mu_2) \le (\alpha_1,\alpha_2).$$

Reçu par les editeurs le 18 janvier 1990.

Considérons l'opérateur différentiel de la forme suivante:

$$\text{(I-1)} \qquad \mathcal{P} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} a_{\alpha_1,\alpha_2} t^{\alpha_1} s^{\alpha_2} D_t^{\alpha_1} D_s^{\alpha_2} + \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2\neq m \\ |\alpha|\leq m}} a_\alpha(t,s,y) t^{\alpha_1} s^{\alpha_2} D_x^\alpha.$$

D'aprés la définition donnée dans [4], $\mathcal{P}$ est un opérateur de Fuchs de poids nul par rapport à (t,s) si les monômes différentiels $a_\alpha(x)t^{\alpha_1}s^{\alpha_2}D_x^\alpha$ pour $\alpha' \neq 0$, ont un poids strictement inférieur à $(0,0)$, donc:

$$\text{(I-2)} \qquad a_\alpha(t,s,y) = t^{\eta_1} s^{\eta_2} \tilde{a}_\alpha(t,s,y) \text{ où } (0,0) < (\eta_1,\eta_2).$$

A l'operateur $\mathcal{P}$ nous associons le polynôme à deux indéterminées suivant:

$$\text{(I-3)} \qquad \begin{aligned} P(X,Y,y) = &\sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} a_{\alpha_1,\alpha_2} C_{\alpha_1}(X) C_{\alpha_2}(X) \\ &+ \sum_{\alpha_1+\alpha_2<m} a_{\alpha_1,\alpha_2,0,\ldots,0}(0,0,y) C_{\alpha_1}(X) C_{\alpha_2}(Y) \end{aligned}$$

où

$$C_{\alpha_i}(k) = \prod_{j=0}^{\alpha_i-1} (k-j) \text{ et } C_0(k) = 1.$$

Le polynôme P est appelé *le polynôme caractéristique Fuchsien* associé à l'opérateur $\mathcal{P}$.

$$\text{(I-4)} \qquad P_m(X,Y) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} a_{\alpha_1,\alpha_2} X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2}$$

est appelé *la partie principale du polynôme caractéristique Fuchsien.*

Supposons pour la suite que $a_{m,0} = 1$, alors:

$$P_m(X,Y) = (X - \lambda_1 Y) \cdots (X - \lambda_m Y).$$

Les valeurs λ_i, pour $i = 1,\ldots,m$; sont appelées *les racines Fuchsiennes* de l'operateur $\mathcal{P}$.

Sous les hypothèses suivantes:

(H_1) Les racines λ_i, pour $i = 1,\ldots,m$; sont réelles et distinctes.

(H_2) Les racines λ_i, pour $i = 1,\ldots,m$; sont strictement négatives.

(H_3) Pour tout (k_1,k_2) dans $\mathbb{N}^2$: $P(k_1,k_2,0) \neq 0$.

Nous allons montrer dans les paragraphes que suivront que si tous les coéfficients de $\mathcal{P}$ sont de classe C^∞ par rapport à (t,s) et analytiques par rapport à y au voisinage de l'origine, on a le résultat suivant:

THÉORÈME I. *Si $\mathcal{P}$ est un opérateur de la forme (I-1), de type de Fuchs de poids nul par rapport à (t,s), et si son polynôme caractéristique Fuchsien vérifie les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), alors pour toute fonction f de classe C^∞ par rapport à (t,s) et analytique par rapport à y au voisinage de l'origine, il existe u une fonction unique de classe C^∞ par rapport à (t,s) et analytique par rapport à y qui est solution de l'équation:*

$$\mathcal{P}u = f.$$

REMARQUE. D'aprés les hypothèse (H_1) et (H_2), il ne peut exister qu'un nombre fini d'élèments (k_1, k_2) dans $\mathbb{N}^2$ qui ne vérifient pas (H_3).

D'aprés l'égalité (I-2) et en utilisant la formule de Taylor aux coéfficients de l'opérateur $\mathcal{P}$, on a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = & \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} a_{\alpha_1,\alpha_2} t^{\alpha_1} s^{\alpha_2} D_t^{\alpha_1} D_s^{\alpha_2} \\
& + \sum_{\alpha_1+\alpha_2<m} a_{\alpha_1,\alpha_2,0,\ldots,0}(0,0,y) t^{\alpha_1} s^{\alpha_2} D_t^{\alpha_1} D_s^{\alpha_2} \\
& + t \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} \tilde{a}_\alpha(t,s,y) t^{\alpha_1} s^{\alpha_2} D_x^\alpha \\
& + s \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} \tilde{b}_\alpha(t,s,y) t^{\alpha_1} s^{\alpha_2} D_x^\alpha
\end{aligned}$$

(I-5)
$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = P(tD_t, sD_s, y) + t & \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} \tilde{a}_\alpha(x) t^{\alpha_1} s^{\alpha_2} D_x^\alpha \\
+ s & \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} \tilde{b}_\alpha(x) t^{\alpha_1} s^{\alpha_2} D_x^\alpha .
\end{aligned}$$

2. **Resolution de l'equation** $P(tD_t, sD_s, y)u(x) = f(x)$**.** Soit a un réel positif, notons par $B(0,a)$ l'ouvert dans $\mathbb{C}^n$ de centre 0 et de rayon a, suivant:

$$B(0,a) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; |z_i| < a \text{ pour } i = 1,\ldots,n \right\}.$$

Désignons par E_a, l'espace des fonctions continues sur $\bar{B}(0,a)$ et holomorphes sur $B(0,a)$, que nous allons munir de la norme:

(II-1)
$$\|f\|_a = \max_{z\in\bar{B}(0,a)} |f(z)|.$$

$(E_a)_{a>0}$ est une chaîne décroissante d'espaces de Banach. De plus pour $a > b > 0$, E_a s'injecte continûment dans E_b avec une norme égale à 1 (voir [1]).

Si $a > b > 0$, pour tout f dans E_b, tout u dans E_a et tout multi-indice α' dans $\mathbb{N}^n$, on a:

(II-2)
$$\|fD_y^{\alpha'} u\|_b \leq \frac{(\alpha')!}{(a-b)^{|\alpha'|}} \|f\|_b \|u\|_a.$$

L'inégalité (II-2) découle imédiatement de la formule intégrale de Cauchy appliquée à $D_y^{\alpha'} u$.

Remarquons d'abord que pour f une fonction régulière par rapport à (t,s), on a les propriétés suivantes:

(II-3)
$$t^{\alpha_1} s^{\alpha_2} D_t^{\alpha_1} D_s^{\alpha_2} f = C_{\alpha_1}(tD_t) C_{\alpha_2}(sD_s) f$$

(II-4)
$$t^{j+1} s^{k+1} D_t D_s f = (tD_t - j)(sD_s - k) t^j s^k f.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-059-1 Published online by Cambridge University Press

Donc en utilisant l'égalité (II-3), $P(tD_t, sD_s, y)$ prend la forme:

$$P(tD_t, sD_s, y) = P_m(tD_t, sD_s) + \sum_{\alpha_1+\alpha_2<m} b_{\alpha_1,\alpha_2}(y)(tD_t)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2} \text{ et} \tag{II-5}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = {} & P(tD_t, sD_s, y) \\ & + t \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} F_\alpha(x)(tD_t)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2} D_y^{\alpha'} \\ & + s \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} G_\alpha(x)(tD_t)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2} D_y^{\alpha'}. \end{aligned} \tag{II-6}$$

D'aprés (H_1) les racines λ_i, pour $i = 1, \ldots, m$, sont toutes distinctes; par conséquent pour chaque (α_1, α_2) dans $\mathbb{N}^2$ vérifiant: $\alpha_1 + \alpha_2 < m$, $(tD_t)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}$ s'écrit comme combinaison linéaire des produits de $(\alpha_1 + \alpha_2)$ termes parmis les $(tD_t - \lambda_i sD_s)$, pour $i = 1, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + 1$:

$$\begin{aligned} (tD_t)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2} = & \sum_{k=1}^{\alpha_1+\alpha_2+1} b_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+1})(tD_t - \lambda_1 sD_s) \cdots (tD_t - \lambda_{k-1} sD_s) \\ & \cdot (tD_t - \lambda_{k+1} sD_s) \cdots (tD_t - \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+1} sD_s). \end{aligned} \tag{II-7}$$

Pour $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ dans $\mathbb{R}_+^2$, notons par $\mathcal{H}_\mu^{(i)}$ et $\mathcal{H}_\mu$ les opérateurs suivants:

$$\mathcal{H}_\mu^{(i)} f = \int_0^1 \sigma(\mu_1 - \lambda_i \mu_2 - 1) f(\sigma t, \sigma^{-\lambda_i} s, y)\, d\sigma. \tag{II-8}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mu f = \left(\prod_{i=1}^m \mathcal{H}_\mu^{(i)}\right) f = & \int_{[0,1]^m} (\sigma_1 \cdots \sigma_m)^{\mu_1 - 1} (\sigma_1^{-\lambda_1} \cdots \sigma_m^{-\lambda_m})^{\mu_2} \\ & \cdot f(\sigma_1 \cdots \sigma_m t, \sigma_1^{-\lambda_1} \cdots \sigma_m^{-\lambda_m} s, y)\, d\sigma_1 \cdots d\sigma_m. \end{aligned} \tag{II-9}$$

En utilisant une intégration par parties, on prouve aisèment que:

$$(tD_t - \lambda_i sD_s + \mu_1 - \mu_2 \lambda_i)\mathcal{H}_\mu^{(i)} u = \mathcal{H}_\mu^{(i)}(tD_t - \lambda_i sD_s + \mu_1 - \mu_2 \lambda_i) u = u.$$

Donc:

$$\mathcal{H}_\mu P_m(tD_t + \mu_1, sD_s + \mu_2) u = P_m(tD_t + \mu_1, sD_s + \mu_2)\mathcal{H}_\mu u = u. \tag{II-10}$$

Si on choisit μ tel que:

$$\mu_1 - \lambda_i \mu_2 > 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, m.$$

Les relations (II-7) et (II-9) nous donnent pour $\alpha_1 + \alpha_2 < m$:

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{|t|\leq T \\ |s|\leq S}} |\mathcal{H}_\mu (tD + \mu_1)^{\alpha_1} (sD_s + \mu_2)^{\alpha_2} u(t, s, y)| \\ & \qquad \leq \frac{K}{[\mu_1 - \lambda \mu_2]^{m - \alpha_1 - \alpha_2}} \max_{\substack{|t|\leq T \\ |s|\leq S}} |u(t, s, y)| \end{aligned} \tag{II-11}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-059-1 Published online by Cambridge University Press

où $\lambda = \max_{1\leq i\leq m} \lambda_i$.

Désignons par $C^k([-T,T]\times[-S,S],E_a)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur $[-T,T]\times[-S,S]$ à valeurs dans E_a, que nous munissons de la norme:

$$\|f\|_{T,S,a} = \max_{\substack{|t|\leq T\\ |s|\leq S}} \|f(t,s)\|_a.$$

Prenons q un entier naturel qui vérifie les deux inégalités suivantes:

$$\text{(II-12)}\qquad \sum_{\alpha_1+\alpha_2<m} \|b_{\alpha_1,\alpha_2}\|_a K(-\lambda q)^{\alpha_1+\alpha_2} < (-\lambda q)^m$$

$$\text{(II-13)}\qquad \sum_{\alpha_1+\alpha_2<m} \|b_{\alpha_1,\alpha_2}\|_a K q^{\alpha_1+\alpha_2} < q^m.$$

Soit l'hypothèse suivante:

(H_4) Pour tout (k_1,k_2) dans $\mathbb{N}^2$, et tout y dans E_a: $P(k_1,k_2,y)\neq 0$.

Alors on a:

PROPOSITION 1. *Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_4); pour toute fonction $f(t,s,.)$ dans $C^q([-T,T]\times[-S,S],E_a)$, il existe $u(t,s,.)$ unique dans $C^q([-T,T]\times[-S,S],E_a)$ solution de l'équation différentielle:*

$$P(tD_t,sD_s,y)\,u(t,s,y) = f(t,s,y).$$

PREUVE. La formule de Taylor nous permet d'écrire f sous la forme:

$$f(t,s,.) = f_0(0,s,.) + tf_1(0,s,.) + \cdots + t^{q-1}f_{q-1}(0,s,,.) + t^q g(t,s,.).$$

Nous allons chercher une solution u de la même forme, donc:

$$\begin{aligned}P(tD_t,sD_s,y)\,u(t,s,y) &= P(0,sD_s,y)\,u_0(0,s,y) + tP(1,sD_s,y)\,u_1(0,s,y)\\ &\quad+\cdots+t^{q-1}P(q-1,sD_s,y)\,u_{q-1}(0,s,y) + t^qP(tD_t+q,sD_s,y)\,v(t,s,y)\end{aligned}$$

$u_i(0,s,y)$ et $f_i(0,s,y)$ pour $i=1,\ldots,q-1$; ont aussi pour expression:

$$u_i(0,s,y) = u_{i,0}(y) + su_{i,1}(y) + \cdots + s^{q-i-1}u_{i,q-i-1}(y) + s^{q-i}v_i(s,y)$$

$$f_i(0,s,y) = f_{i,0}(y) + sf_{i,1}(y) + \cdots + s^{q-i-1}f_{i,q-i-1}(y) + s^{q-i}g_i(s,y).$$

Ainsi l'équation $P(tD_t,sD_s,y)\,u(t,s,y) = f(t,s,y)$ nous donne:

$$\text{(II-14)}\qquad \begin{cases} P(i,j,y)\,u_{i,j}(y) = f_{i,j}(y) & \text{pour } i+j\leq q-1\\ P(i,sD_s+q-i,y)\,v_i(s,y) = g_i(s,y) & \text{pour } i: 0\leq i\leq q-1\ .\\ P(tD_t+q,sD_s,y)\,v(t,s,y) = g(t,s,y) & \end{cases}$$

En appliquant (II-10), le système (II-14) devient:

(II-15)

$$\begin{cases} u_{i,j}(y) = \frac{f_{i,j}(y)}{P(i,j,y)} \text{ pour } i+j\leq q-1\\ \Big[1+\sum_{\alpha_1+\alpha_2<m} \mathcal{H}_{i,q-i}(tD_t+i)^{\alpha_1}(sD_s+q-i)^{\alpha_2}b_{\alpha_1,\alpha_2}(y)\Big]\,v_i(s,y) = \mathcal{H}_{i,q-i}g_i(s,y)\\ \Big[1+\sum_{\alpha_1+\alpha_2<m} \mathcal{H}_{q,0}(tD_t+q)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}b_{\alpha_1,\alpha_2}(y)\Big]\,v(t,s,y) = \mathcal{H}_{q,0}g(t,s,y). \end{cases}$$

D'aprés (II-11) à (II-13), l'opérateur $\sum_{\alpha_1+\alpha_2<m}\mathcal{H}_{i,j}(tD_t+i)^{\alpha_1}(sD_s+j)^{\alpha_2}b_{\alpha_1,\alpha_2}(y)$ pour $i+j=q$, est un opérateur continu de norme strictement inférieure à 1; par conséquent on détermine de façon unique la solution u.

3. **Resolution de l'equation $\mathcal{P}u = f$.**

PROPOSITION 2. *Sous les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* (H_4), *pour toute fonction* $f(t, s, .)$ *dans* $C^q([-T, T]\times[-S, S], E_a)$, *il existe* b: $0 < b < a$, R_1: $R_1 < T$, $R_2 < S$ *et* $u(t, s, .)$ *une fonction dans* $C^q([-R_1, R_1]\times[-R_2, R_2], E_b)$ *solution unique de l'équation différentielle:*

$$\mathcal{P}u = f.$$

PREUVE. En choisissant u et f de la forme suivante:

$$u(t,s,y) = \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q-i-1} u_{i,j}(y)t^i s^j + \sum_{i=0}^{q-1} u_i(s,y)t^i s^{q-i} + t^q v(t,s,y)$$

$$f(t,s,y) = \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q-i-1} f_{i,j}(y)t^i s^j + \sum_{i=0}^{q-1} g_i(s,t)t^i s^{q-i} + t^q g(t,s,y).$$

Puis en faisant opérer $\mathcal{P}$ sur u, on constate que chaque $u_{i,j}$ se définit de façon unique à partir des $u_{h,k}$ pour $(h,k) < (i,j)$.

D'aprés (II-6), les fonctions $u_k(s, .)$ pour $k = 1, \dots, q-1$, vérifient les équations:

$$\text{(III-1)}\quad P(k, sD_s + q - k, y)\,u_k(s,y) + s \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} G_\alpha(0,s,y)k^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}D_y^{\alpha'}u_k(s,y) = h_k(s,y)$$

où: chaque h_k s'exprime en fonction de g_k et des h_i pour $i = 1, \dots, k-1$.

En utilisant les résultats donnés dans [3] (Théorème (II-1) et corollaire (II-2)), les $u_k(s,y)$ solutions de (III-1) existent et sont déterminées de façon unique. De plus $s^{q-k}u_k(s,y)$ est de classe C^q par rapport à s.

Pour déterminer v, nous allons utiliser la méthode des approximations successives. D'abord l'équation vérifiée par v est:

$$\text{(III-2)}\quad \begin{aligned} &P(tD_t + q, sD_s, y)\,v(x)\\ &\quad + t \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} F_\alpha(x)(tD_t+q)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}D_y^{\alpha'}v(x)\\ &\quad + s \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} G_\alpha(x)(tD_t+q)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}D_y^{\alpha'}v(x) = h(x). \end{aligned}$$

Notons par:

$$J = \Big[1 + \sum_{\alpha_1+\alpha_2<m} \mathcal{H}_{q,0}(tD_t+q)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}b_{\alpha_1,\alpha_2}(y)\Big]^{-1}.$$

La proposition 1 nous donne que l'équation (III-2) est équivalente à:

$$\begin{aligned} v(x) &= (\mathcal{H}_{q,0}J)h(x)\\ &= (\mathcal{H}_{q,0}J)\Big[\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} \big(tF_\alpha(x) + sG_\alpha(x)\big)(tD_t+q)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}D_y^{\alpha'}\Big]v(x). \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-059-1 Published online by Cambridge University Press

Notons par $(U_n)_{n\in N}$, $(V_n)_{n\in N}$ les suites récurrentes suivantes:

$$\begin{cases} U_0(x) = (\mathcal{H}_{q,0}J)h(x) \\ U_{n+1}(x) = (\mathcal{H}_{q,0}J)\Big[h(x) - \sum\limits_{\substack{|\alpha|\le m \\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} \big(tF_\alpha(x) + sG_\alpha(x)\big)(tD_t+q)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}D_y^{\alpha'}\Big]U_n(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0(x) = J[h(x)] \\ V_{n+1}(x) = P_m(tD_t+q, sD_s, y)[U_{n+1} - U_n] \end{cases}.$$

Alors, en a:

$$V_{n+1} = J\Big[-\sum_{\substack{|\alpha|\le m \\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} (tF_\alpha + sG_\alpha)(tD_t+q)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}\mathcal{H}_{q,0}D_y^{\alpha'}\Big]V_n.$$

Maintenant nous allons montrer par récurrence sur n, qu'il existe deux réels positifs M_1, M_2 tels que:

$$\text{(III-3)} \qquad \|V_n\|_{R_1,R_2,b} \le M_1\left[\frac{M_2(R_1+R_2)}{(a-b)^m}\right]^n \text{ pour } n\in N \text{ et } b\colon 0<b<a.$$

D'abord, on a:

$$\|V_{n+1}\|_{R_1,R_2,b} \le A_1(R_1+R_2)\sum_{\substack{|\alpha|\le m \\ \alpha_1+\alpha_2\neq m}} B_\alpha \|(tD_t+q)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}D_y^{\alpha'}V_n\|_{R_1,r_2,b}$$

où A_1 est la norme de l'opérateur J et

$$B_\alpha = \max(\|F\|_{R_1,R_2,a}, \|G\|_{R_1,R_2,a}).$$

D'aprés (II-7), on a:

$$\begin{aligned} &(tD_t+q)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}\mathcal{H}_{q,0}D_y^{\alpha'}V_n \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\alpha_1+\alpha_2+1} b_k(\lambda_1,\dots,\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+1})(tD_t-\lambda_1 sD_s+q)\cdots(tD_t-\lambda_{k-1}sD_s+q) \\ &\qquad \cdot(tD_t-\lambda_{k+1}sD_s+q)\cdots(tD_t-\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+1}sD_s+q)\mathcal{H}_{q,0}D_y^{\alpha'}V_n \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\alpha_1+\alpha_2+1} b_k(\lambda_1,\dots,\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+1})\mathcal{H}_{q,0}^{(k)}\mathcal{H}_{q,0}^{(\alpha_1+\alpha_2+1)}\cdots\mathcal{H}_{q,0}^{(m)}D_y^{\alpha'}V_n \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\alpha_1+\alpha_2+1} b_k(\lambda_1,\dots,\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+1})\int_{[Q,1]^{m-\alpha_1-\alpha_2}}\prod_{i=1}^{m-\alpha_1-\alpha_2}\sigma_i^{q-1} \\ &\qquad \cdot D_y^{\alpha'}V_n\prod_{i=1}^{m-\alpha_1-\alpha_2}\sigma_i t, \sigma_1^{-\lambda_k}\prod_{i=\alpha_1+\alpha_2+2}^{m}\sigma_{i-\alpha_1-\alpha_2}^{-\lambda_i}s, y)\,d\sigma_1\cdots d\sigma_{m-\alpha_1-\alpha_2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a:

$$\begin{aligned} &\|(tD_t+q)^{\alpha_1}(sD_s)^{\alpha_2}\mathcal{H}_{q,o}D_y^{\alpha'}V_n\|_{R_1,R_2,b} \\ &\qquad \le A_2\cdot\int_{[0,1]^{m-\alpha_1-\alpha_2}}\|D_y^{\alpha'}V_n\|_{\sigma_1^d\cdots\sigma_{m-\alpha_1-\alpha_2}^d R_1,\sigma_1^d\cdots\sigma_{m-\alpha_1-\alpha_2}^d R_2,b}\prod_{i=1}^{m-\alpha_1-\alpha_2}d\sigma_i. \end{aligned}$$

où

$$A_2 = \sum_{k=1}^{\alpha_1+\alpha_2+1} |b_k(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+1})|$$

et

$$d = \min(1, -\lambda).$$

Puis, en utilisant (II-2) et l'hypothèse de récurrence, on a pour tout réel c tel que $b < c < a$:

$$\begin{aligned} \|D_y^{\alpha'} V_n\|_{\sigma_1^d \cdots \sigma_{m-\alpha_1-\alpha_2}^d R_1, \sigma_1^d \cdots \sigma_{m-\alpha_1-\alpha_2}^d R_2, b} &\le \frac{(\alpha')!}{(c-b)^{|\alpha'|}} \|V_n\|_{\sigma_1^d \cdots \sigma_{m-\alpha_1-\alpha_2}^d R_1, \sigma_1^d \cdots \sigma_{m-\alpha_1-\alpha_2}^d R_2, c} \\ &\le \frac{(\alpha')!}{(c-b)^{|\alpha'|}} \frac{(\sigma_1 \cdots \sigma_{m-\alpha_1-\alpha_2})^{nd}(R_1+R_2)^n}{(a-c)^n} M_1 M_2^n. \end{aligned}$$

Donc, en a:

$$\begin{aligned} \|V_{n+1}\|_{R_1,R_2,b} &\le A_1 A_2 M_1 M_2^n (R_1+R_2)^{n+1} \\ &\quad \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ \alpha_1+\alpha_2 \ne m}} B_\alpha \frac{(\alpha')!}{(c-b)^{|\alpha'|}} \frac{1}{(a-c)^n} \frac{1}{(nd+1)^{m-\alpha_1-\alpha_2}}. \end{aligned}$$

Choisissons c tel que:

$$(c-b) = \frac{a-b}{nd}.$$

Alors: $(a-c) = (a-b)\left(1 - \frac{1}{nd}\right)$

D'où:

$$\begin{aligned} \|V_{n+1}\|_{R_1,R_2,b} &\le A_1 A_2 M_1 M_2^n (R_1+R_2)^{n+1} \frac{1}{(a-b)^{n+1}} \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ \alpha_1+\alpha_2 \ne m}} B_\alpha \frac{(\alpha')!}{(1-\frac{1}{nd})^n} \frac{(nd)^{|\alpha'|}}{(nd+1)^{m-\alpha_1-\alpha_2}} \\ &\le A_1 A_2 M_1 M_2^n (R_1+R_2)^{n+1} \frac{1}{(a-b)^{n+1}} \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ \alpha_1+\alpha_2 \ne m}} B_\alpha (\alpha')!\, c^{-1/d}. \end{aligned}$$

En posant:

$$M_2 = A_1 A_2 \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ \alpha_1+\alpha_2 \ne m}} B_\alpha (\alpha')!\, e^{-1/d}.$$

On a V_{n+1} qui vérifie l'inégalité (III-3), donc en choisissant R_1, R_2 et b, de tel sorte que:

$$M_2 \frac{(R_1+R_2)}{(a-b)^m} < 1.$$

La série de terme géneral V_n converge normalement vers une fonction W continue par rapport à (t, s) et analytique par rapport à y sur E_b, ainsi la suite $(U_n)_{n\in N}$ converge normalement vers $V = \mathcal{H}_{q,0}W$, qui est solution de l'équation (III-2).

Si V' est une solution quelconque de l'équation (III-2), la suite de terme géneral $P_m(tD_t + q, sD_s, y)(U_n - V')$ vérifie l'inégalité (III-3); d'où l'unicité de la solution.

Finalement, remarquons que si q vérifie les inégalités (II-12) et (II-13) alors tout entier supérieur à q les vérifie aussi, ce qui nous donne le résultat du théorème I.

RÉFÉRENCES

1. M. S. Baouendi et C. Goulaouic, *Cauchy problems with characteristic initial hypersurface*, Comm. on Pure and Appl. Math. **26**(1973), 455–475.

2. L. Hormander, *Linear partial differential operators*. Springer-Verlag, 1963.

3. N. S. Madi, *Sur certains problèmes de Goursat Fuchsiens à données initiales sur des hypersurfaces caractéristiques*, à paraître.

4. ———, *Solutions locales pour des opérateurs holomorphes Fuchsiens en plusieurs variables*, à paraître.

5. M. Tahara, *Cauchy problems for Fuchsian hyperbolic partial differential equations*, Proc. Japan Acad. **51**(1978), 92–96.

6. F. Treves, *Ovchyannikov theorem and hyper differential operators*. Notas de Matematica **46** IMPA, Brazil, 1968.

Departement de mathématiques
Université Mohamed V
Rabat, Maroc