Canad. J. Math. Vol. **65** (2), 2013 pp. 266–298
http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2012-034-8

Les applications conforme-harmoniques

Vincent Bérard

Résumé. Sur une surface de Riemann, l'énergie d'une application à valeurs dans une variété riemannienne est une fonctionnelle invariante conforme, ses points critiques sont les applications harmoniques. Nous proposons ici un analogue en dimension supérieure, en construisant une fonctionnelle invariante conforme pour les applications entre deux variétés riemanniennes, dont la variété de départ est de dimension n paire. Ses points critiques satisfont une EDP elliptique d'ordre n non-linéaire qui est covariante conforme par rapport à la variété de départ, on les appelle les applications conforme-harmoniques. Dans le cas des fonctions, on retrouve l'opérateur GJMS, dont le terme principal est une puissance $n/2$ du laplacien. Quand n est impaire, les mêmes idées permettent de montrer que le terme constant dans le développement asymptotique de l'énergie d'une application asymptotiquement harmonique sur une variété AHE est indépendant du choix du représentant de l'infini conforme.

1 Introduction

Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes de dimension n et m, dans toute la suite, on considérera que ces variétés sont compactes et de classe C^∞. On appelle énergie des applications de (M, g) dans (N, h), la fonctionnelle E_g définie de la manière suivante :

$$E_g(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |T\varphi|^2_{g,h}\,\mathrm{dvol}_g,$$

où $T\varphi$ désigne l'application tangente de φ, qui est une section du fibré des 1-formes à valeurs dans les champs de vecteurs de TN tirés-en-arrière par φ, qu'on note $\Omega^1(M) \otimes \varphi^* TN$. Les applications harmoniques de (M, g) dans (N, h) sont définies comme les points critiques de l'énergie et un résultat classique les caractérise comme étant les solutions de l'équation $\delta^g T\varphi = 0$, où δ^g désigne la divergence du fibré $\Omega^1(M) \otimes \varphi^* TN$ construit canoniquement avec les connexions de Levi–Civita de g et h (celle de h étant tirée-en-arrière par φ). Dans le cas des applications d'une surface à valeurs dans une variété riemannienne quelconque, il est connu que l'énergie ne dépend que de la classe conforme de la métrique de départ (et bien sur de l'application et de la métrique d'arrivée), c'est-à-dire que pour deux métriques conformes g et $\overline{g} := e^{2\omega} g$ sur une variété de dimension 2, on a :

$$E_{\overline{g}}(\varphi) = E_g(\varphi) \quad \text{et} \quad \delta^{\overline{g}} T\varphi = e^{-2\omega}\delta^g T\varphi.$$

Il faut remarquer que le laplacien est en général un opérateur non-linéaire, ainsi quand la variété M est une surface, être harmonique signifie que l'application en question est solution d'une équation non-linéaire d'ordre 2 qui est covariante par

Reçu par la rédaction le 15 juin, 2011; revu le 13 juillet, 2012.
Publié electronique au 29 décembre, 2012.
Classification (AMS) par sujet: **53C21**, 53C43, 53A30.
Mots clés: géométrie riemannienne, applications harmoniques, applications conforme-harmoniques, géométrie conforme, analyse non- linéaire, énergie renormalisée, opérateur de Paneitz.

changement conforme de métrique sur la surface. Par contre ce n'est plus le cas quand M est de dimension strictement supérieure à 2, l'énergie n'est plus un invariant conforme et on obtient alors [5, 1.159.i)] :

$$\delta^{\bar{g}} T\varphi = e^{-2\omega}\big(\delta^g T\varphi - (n-2)\langle d\omega, T\varphi\rangle_g\big).$$

L'harmonicité n'est plus une propriété géométrique de la classe conforme de g, mais bien de la métrique g.

On peut trouver dans la littérature (voir [7], [20] et les références citées) une généralisation des applications harmoniques qui est non-conforme, ce sont les applications biharmoniques, qui sont définies comme étant les points critiques de la bi-énergie :

$$E_g^2(\varphi) := \frac{1}{2}\int_M |\delta^g T\varphi|_g^2 \,\mathrm{dvol}_g .$$

Il s'agit d'une classe d'applications qui englobent les applications harmoniques et qui permet, comme par exemple dans [19], de donner une nouvelle démonstration du théorème d'Eells–Sampson sur l'existence d'applications harmoniques dans les classes d'homotopie. On sait que les applications harmoniques n'existent pas toujours (voir l'article [10] d'Eells et Wood) et un des principaux objectifs de cette théorie est de vouloir prouver l'existence d'applications biharmoniques dans ces cas là. On peut citer encore les travaux de Baird et de Kamissoko dans [3], qui utilisent justement le fait que l'harmonicité ne soit pas une notion invariante conforme en dimension supérieure à 2, pour exhiber des applications biharmoniques qui ne sont pas harmoniques. Nous nous poserons le même type de question et nous obtiendrons aussi un résultat d'existence pour notre nouvelle classe d'applications.

Le but de cet article est de définir une nouvelle notion d'harmonicité pour les applications sur les variétés de dimension paire qui soit invariante conforme, c'est-à-dire définir une fonctionnelle invariante conforme qui va jouer le rôle de l'énergie et déterminer l'équation de ses points critiques qui va remplacer la condition non-linéaire d'annulation du laplacien. Si on se restreint aux fonctions sur les variétés de dimension paire, Graham, Jenne, Mason et Sparling [15] ont démontré en 1987 l'existence d'un opérateur différentiel covariant conforme de terme principal $\Delta^{n/2}$ sur les fonctions C^∞ de M. En dimension 4, il s'agit de l'opérateur de Paneitz P_4 :

$$\mathrm{P}_4 := \Delta^2 + \delta(\frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - 2\,\mathrm{Ric})d.$$

Nous proposons de généraliser l'équation du noyau de cet opérateur sur des fonctions, en une équation aux dérivées partielles elliptique non-linéaire d'ordre n sur les applications C^∞ de (M, g) dans (N, h) qui soit covariante conforme par rapport à g. De plus, nous construisons une fonctionnelle invariante conforme par rapport à g, dont les points critiques sont exactement les solutions de cette EDP. Bien que la démonstration de l'existence de cette EDP suit les idées de Graham, Jenne, Mason et Sparling en résolvant un problème de Cauchy, la fonctionnelle s'obtient en renormalisant l'énergie de la solution de ce problème à bord, en suivant l'idée de Graham dans [13] quand il définit son volume renormalisé. Nous obtenons le théorème suivant qui résume les théorèmes 3.1 et 4.1.

Théorème 1.1 *Soit (M^n, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, on suppose que n est pair, alors il existe une fonctionnelle sur les applications de classe C^∞ de (M, g) dans (N, h) qui est invariante conforme par rapport à g. De plus, l'équation de ses points critiques est une équation aux dérivées partielles elliptique non-linéaire d'ordre n, qui est covariante conforme elle aussi par rapport à g.*

Nous définissons les applications conforme-harmoniques de la manière suivante.

Définition 1.2 On note $\mathcal{E}_g^n$ la fonctionnelle du théorème précédent et on appelle ses points critiques, les applications conforme-harmoniques, qu'on abrège en parlant d'applications C-harmoniques.

On considère la variété (M^n, g) comme étant l'infini conforme d'une variété (X^{n+1}, g_+) particulière. Il s'agit d'une généralisation du modèle du disque de Poincaré, où (M, g) joue le rôle de la sphère $\mathbb{S}^n$ munie de sa métrique canonique et (X, g_+) le rôle de la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de la métrique hyperbolique, ce qui justifiera l'appellation métrique de Poincaré de (M, g) quand on parlera de (X, g_+). L'équation des points critiques est obtenue comme une obstruction à résoudre un problème de Cauchy dégénéré sur (X, g_+). On se donne une application φ de M dans N, il s'agit de déterminer une application $\tilde{\varphi}$ qui soit C^∞ de $\overline{X}$ dans N qui vérifie les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \varphi & \text{sur } M, \\ \delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = 0 & \text{sur } \overline{X}. \end{cases}$$

Sur les fonctions, Graham, Jenne, Mason et Sparling ont montré qu'il n'était pas toujours possible de résoudre ce problème localement ; quand la variété de départ est de dimension paire, il existe un terme logarithmique non-trivial dans le développement formel de la solution près du bord qui obstrue la régularité de la résolution. Ce terme est alors défini comme l'opérateur GJMS d'ordre maximal en φ qui ne dépend que de la classe conforme de g et de la métrique h. On va suivre la même idée pour les applications, en identifiant localement la variété d'arrivée avec son espace tangent, de manière à calculer le développement asymptotique de la composée de $\tilde{\varphi}$ avec l'exponentielle. Quand M est de dimension paire, il y a un terme logarithmique qui apparaît et qui ne dépend que de l'application de départ et de la classe conforme de g (et de la métrique h), notre EDP est simplement la condition sur φ que ce terme soit nul. Le développement asymptotique est entièrement déterminé jusque-là par φ et des termes de courbures de nos deux variétés (M, g) et (N, h), ce qui est équivalent à la donnée de la valeur sur le bord des n premières dérivées de la solution $\tilde{\varphi}$ par rapport à la coordonnée radiale. Cela nous permet de calculer le développement asymptotique de l'énergie dans un ruban $M \times [\rho; \varepsilon]$ quand ρ tend vers 0 qui admet un terme constant qui ne dépend que de φ et de la classe conforme de g (et de la métrique h). On définit ce terme constant comme étant l'image de φ par notre fonctionnelle et on montre ensuite, par une intégration par parties, que le gradient de cette fonctionnelle est bien le terme logarithmique précédent.

Du théorème précédent, on obtient directement le résultat suivant de rigidité pour les applications harmoniques sur les boules de dimension impaire, qui se généralise au cas des variétés asymptotiquement hyperboliques de dimension impaire (voir corollaire 3.9).

Corollaire 1.3 *On considère (B, g_{hyp}) la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension impaire munie de la métrique hyperbolique, $(S, [g_{\mathrm{can}}])$ son infini conforme et (N, h) une variété riemannienne, alors les applications qui sont de classe C^n de $\overline{B}$ dans N et harmonique de (B, g_{hyp}) dans (N, h), vérifient le fait que leurs restrictions à S est C-harmonique de $(S, [g_{\mathrm{can}}])$ dans (N, h).*

En dimension 2, la fonctionnelle $\mathcal{E}_g^2$ est évidemment l'énergie des applications de (M^2, g) dans (N, h) et les applications C-harmoniques sont exactement les applications harmoniques. En dimension 4, le théorème 5.1 nous donne une expression explicite de la fonctionnelle $\mathcal{E}_g^4$ en terme de courbures de g et de l'équation de ses points critiques en termes de courbures de g et de h.

Théorème 1.4 *Quand M est de dimension 4,*

$$\mathcal{E}_g^4(\varphi) = \int_M \Big(|\delta T\varphi|_h^2 + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal}\,|T\varphi|_{g,h}^2 - 2\,\mathrm{Ric}(T\varphi, T\varphi)\Big)\,\mathrm{dvol},$$

où Scal *et* Ric *désignent respectivement la courbure scalaire et le tenseur de Ricci de g et* dvol *la forme volume de g. Notons* S *l'endomorphisme de φ^*TN défini de la manière suivante :*

$$\mathrm{S}(X) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{R}^h_{X, T\varphi(e_i)}\, T\varphi(e_i),$$

où $(e_1, \dots, e_4)$ est une base orthonormée de TM par rapport à g et R^h est le tenseur de courbure de (N, h), alors l'équation de ses points critiques s'écrit :

$$\delta d\delta T\varphi + \delta\Big(\Big(\frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - 2\,\mathrm{Ric}\Big) T\varphi\Big) - \mathrm{S}(\delta T\varphi) = 0.$$

Quand M est de dimension 6, la condition de C-harmonicité et la fonctionnelle $\mathcal{E}_g^6$ sont explicitées dans le théorème 5.5 sous certaines conditions de courbures de nos deux variétés. Sans ces hypothèses, les calculs deviennent rapidement compliqués et on est amené alors à faire des hypothèses sur l'application, comme par exemple regarder simplement l'identité (voir théorème 5.6).

Si la variété de départ est une variété d'Einstein de dimension paire quelconque, l'expression de sa métrique de Poincaré est simple, la proposition 3.7 montre alors que les applications harmoniques sont C-harmoniques et la proposition 4.6 calcule explicitement leurs images par notre fonctionnelle. Cependant, la condition de C-harmonicité reste encore compliquée à obtenir. Quand M est dimension 4, il existe certaines conditions de courbures sur nos deux variétés, pour lesquelles les applications C-harmoniques sont alors exactement les applications harmoniques (voir la proposition 5.3), qui sont alors exactement les applications totalement géodésiques, d'après une proposition due à Eells et Sampson dans [9]. L'identité est toujours une application harmonique de (M, g) dans (M, g), ainsi elle est C-harmonique quand M est de dimension 2. Cela n'est plus le cas en dimension supérieure, en dimension 4, l'identité est C-harmonique si et seulement si g est à courbure constante (voir corollaire 5.4). Ce résultat nous sert de point de départ à la construction d'une application C-harmonique de $(M, [g])$ dans (N, h), qui ne soit pas trivialement harmonique, c'est-à-dire qui ne soit pas harmonique de $(M, \overline{g})$ dans (N, h), pour n'importe quelle métrique $\overline{g}$ dans la classe conforme de g. On se donne une variété M^4 munie d'une métrique h à courbure scalaire constante négative proche d'une métrique d'Einstein et on regarde les applications de M dans M. On va montrer que fixer la métrique h dans la variété d'arrivée et déformer judicieusement la métrique de la variété de départ, permet de construire une application proche de l'identité qui conserve la C-harmonicité, mais qui n'est plus harmonique, pour n'importe quel changement conforme de métrique par rapport à la variété de départ. On obtient le théorème suivant (on pourra consulter le théorème 6.1 pour avoir un énoncé plus précis).

Théorème 1.5 *Soit (M, g_e) une variété d'Einstein de dimension 4 à courbure scalaire négative, alors pour toute métrique h suffisamment proche de g_e il existe une application φ de M dans M et deux métriques g et h proches de g_e telles que :*

(i) *φ est C-harmonique de $(M, [g])$ dans (M, h),*
(ii) *φ est non-harmonique de $(M, \overline{g})$ dans (M, h), $\forall \overline{g} \in [g]$.*

Quand n est impair, on a toujours une notion de métrique de Poincaré de $(M, [g])$ et les premiers termes du développement formel de la solution de notre problème de Cauchy sont encore entièrement déterminés pas nos conditions initiales, mais on a plus d'obstruction sous la forme d'un terme logarithmique et donc à priori plus de terme covariant conforme pour construire notre fonctionnelle. De plus, le terme constant dans le développement asymptotique de l'énergie d'une solution de notre problème à bord dépend alors de la connaissance de toute la solution et plus seulement de sa valeur au bord comme dans le cas pair, ce qui nous oblige à travailler avec des applications définies sur des variétés asymptotiquement hyperbolique de bord à l'infini $(M, [g])$. On obtient alors comme résultat que le terme constant dans le développement asymptotique de l'énergie d'une application asymptotiquement harmonique d'une variété asymptotiquement hyperbolique d'Einstein (X, g_+) dans une variété riemannienne est indépendant du choix de la métrique dans l'infini conforme de (X, g_+). En outre, la variation infinitésimale de cette énergie renormalisée ne dépend que du premier terme du développement asymptotique de la solution qui dépend aussi de l'intérieur de la variété X (voir le théorème 4.4 pour plus de détails).

Afin de compléter ces résultats d'existence, citons le théorème obtenu récemment par Biquard et Madani dans [6]. Il s'agit d'un analogue conforme en dimension 4, d'un célèbre théorème d'Eells et Sampson (voir [9]). Sous certaines hypothèses de courbures de (M^4, g) et (N, h), ils prouvent l'existence d'une application C-harmonique dans chaque classe d'homotopie de $C^\infty(M, N)$.

Cet article apporte les preuves et complète les résultats annoncés dans la note parue aux Comptes Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences [4].

2 La métrique de Poincaré

Soit (X^{n+1}, g_+) une variété non-compacte, on note M le bord de son adhérence et on appelle fonction géodésique définissant le bord de X, toute fonction r de $\overline{X}$ vérifiant $r = 0$ sur M, $r > 0$ sur X et $dr \neq 0$ sur M. Notre métrique g_+ est dite asymptotiquement hyperbolique (AH), s'il existe une fonction géodésique r telle que la métrique $r^2 g_+$ se prolonge en une métrique non-dégénérée sur $\overline{X}$ et si ses courbures sectionnelles tendent vers -1 à l'infini. Il est facile de voir que cette dernière hypothèse est équivalente à $|dr|_{r^2 g_+} = 1$ sur M, qui est une condition qui dépend seulement de g et pas du choix de la fonction géodésique r. La donnée d'une telle métrique détermine une classe conforme de métrique sur le bord appelé infini conforme. Avec nos notations, l'infini conforme de (X, g_+) est la classe conforme de la métrique $r^2 g_+$ restreinte à TM. Un théorème de Graham [13] permet d'associer à chaque métrique g dans l'infini conforme d'une variété AH (X, g_+), une unique (dans un voisinage de M) fonction géodésique r vérifiant :

$$g_+ = \frac{dr^2 + g_r}{r^2}, \tag{2.1}$$

où g_r est une famille à 1-paramètre de métriques sur $\partial\overline{X}$ vérifiant $g_0 = g$. Ce résultat est le premier pas vers une généralisation du modèle du disque de Poincaré, en vue de déterminer une corrélation entre la géométrie de l'intérieur d'une variété et la géométrie conforme de son bord. Cependant, les équations sont trop souples et on rigidifie la situation en prenant une métrique AH qui soit d'Einstein (AHE). Fefferman et Graham ont obtenu le théorème suivant.

Théorème 2.1 (Fefferman–Graham [11]) *On se donne (X, g_+) une variété AHE de dimension $n+1$ de bord à l'infini M, g un représentant de son infini conforme et on écrit g_+ sous la forme* (2.1). *Alors g_r admet le développement asymptotique en $r = 0$ suivant si n est pair :*

$$g_r = g + g_{(2)} r^2 + \cdots + g_{(n-2)} r^{n-2} + h r^n \log r + g_{(n)} r^n + O(r^{n+1}),$$

et le développement suivant si n est impair :

$$g_r = g + g_{(2)} r^2 + \cdots + g^{(n-1)} r^{n-1} + g_{(n)} r^n + O(r^{n+1}).$$

Ces développements sont composés de termes en puissance paires de r jusqu'à l'ordre n et un terme logarithmique h dans le cas pair qui sont uniquement déterminés par des termes de courbures de g, ainsi que la trace de $g_{(n)}$ par rapport à g (elle est même nulle si n est impair). De plus h ne dépend que de la classe conforme de g.

Remarque 2.2 Le terme h dans le développement asymptotique de g_r est, à un coefficient multiplicatif près, le tenseur d'obstruction de Graham et Hirachi [16].

L'exemple de base est bien entendu le modèle du disque de Poincaré, la sphère $\mathbb{S}^n$ est vue comme l'infini conforme de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^{n+1}$, avec $g_r =$

$\frac{1}{4}(1-r^2)^2 g_{\mathbb{S}}$, où $r = \frac{1-|x|}{1+|x|}$ et $g_{\mathbb{S}}$ est la métrique canonique de $\mathbb{S}^n$. Pour les variétés AHE qui possède une métrique g dans son infini conforme qui vérifie la condition d'Einstein $\mathrm{Ric}^g = 4\lambda(n-1)g$, alors on obtient :

$$g_r = (1-\lambda r^2)^2 g. \tag{2.2}$$

On appelle (X, g_+) une variété de Poincaré–Einstein de $(M, [g])$, une variété AH d'infini conforme $(M, [g])$, qui vérifie que g_+ s'écrive sous la forme (2.1) où g_r admet le même développement formel que dans le théorème 2.1. Ainsi une métrique de Poincaré–Einstein vérifie une condition d'Einstein asymptotique :

$$\mathrm{Ric}^{g_+} + ng_+ = O(r^{n-1}\log r), \quad \text{si } n \text{ est pair,}$$
$$\mathrm{Ric}^{g_+} + ng_+ = O(r^n), \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Remarque 2.3 Le fait de déterminer la métrique de Poincaré–Einstein de $(M, [g])$ est équivalent à un autre problème à bord ; celui de déterminer la métrique ambiante de $(M, [g])$. On pourra consulter a ce sujet [17] et [11].

Donnons quelques exemples de métrique de Poincaré en basse dimension, pour cela définissons quelques tenseurs classiques de géométrie riemannienne. Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n, on appelle tenseur de Schouten de g, le tenseur P_n suivant :

$$P := \frac{1}{n-2}\,\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{2(n-1)(n-2)}g,$$

où Ric et Scal se rapportent à g. On note W le tenseur de Weyl de g et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de TM par rapport à g, on définit B le tenseur de Bach de g de la manière suivante :

$$B(X, Y) := \sum_{k=1}^{n} (\nabla_{e_k}\nabla_{e_k} P)(X, Y) - (\nabla_{e_k}\nabla_Y P)(X, e_k) - P(\mathrm{W}_{e_k, X} Y, e_k),$$

où X et Y sont deux champs de vecteurs de TM. Quand $n = 2$, la métrique g_r admet le développement asymptotique suivant :

$$g_r = g + g_{(2)} r^2 + O(r^3) \quad \text{avec } \operatorname{tr} g_{(2)} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}^g,$$

où tr désigne la trace par rapport à g. Pour $n = 4$, on obtient :

$$g_r = g - P\,r^2 - \frac{1}{3}\,B\,r^4 \log r + g_{(4)} r^4 + O(r^5) \quad \text{avec } \operatorname{tr} g_{(4)} = \frac{1}{4}(\operatorname{tr} P \circ P), \tag{2.3}$$

on retrouve le fait que le tenseur de Bach est covariant conforme en dimension 4. Si $n = 6$, alors la métrique g_r s'écrit dans un voisinage du bord :

$$g_r = g - P\,r^2 + \Big(\frac{1}{4}\,P \circ P - \frac{1}{8}\,B\Big) r^4 + hr^6 \log r + g_{(6)} r^6 + O(r^7).$$

Pour plus de détails sur la métrique de Poincaré et les applications qui en découlent, on pourra consulter l'excellent livre [8].

3 Les applications conforme-harmoniques

On munit notre variété compacte M^n d'une structure conforme $[g]$ et on note $g_+ = r^{-2}(dr^2 + g_r)$ sa métrique de Poincaré définie sur $X = M \times]0, \epsilon[$. Il convient de remarquer que g_+ explose pour $r = 0$, cependant on peut quand même définir le laplacien pour les applications de $(\overline{X}, g_+)$ sur (N, h). On se donne φ une application C^∞ de M dans N, notre problème à bord est de déterminer $\tilde{\varphi}$ une application C^∞ de $\overline{X}$ dans N qui soit solution du système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{|r=0} = \varphi, \\ \delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Notons p_M la projection de $M \times [0, 1]$ sur M, grâce à l'exponentielle, on va identifier localement notre variété d'arrivée N, avec le fibré $(\varphi \circ p_M)^* TN$, de manière à faire un développement asymptotique sur ce fibré. Quand la dimension de M est paire, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Supposons que n soit un entier pair, on se donne (M^n, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes et on note (X, g_+) la métrique de Poincaré de (M, g). On écrit g_+ sous la forme (2.1) et on se donne φ une application C^∞ de (M, g) dans (N, h), alors il existe une unique section U de $(\varphi \circ p_M)^* TN$ modulo $O(r^n)$ définie dans un voisinage de M dans X, telle que l'application $\tilde{\varphi} := (\exp_{\varphi \circ p_M}) \circ U$ soit solution du système suivant :*

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{|r=0} = \varphi, \\ \delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = O(r^{n+1} \log r). \end{cases}$$

Plus précisément, U admet le développement asymptotique en $r = 0$ suivant :

$$U = U_2 r^2 + \cdots + U_{n-2} r^{n-2} + H^g r^n \log r + U_n r^n + \ldots,$$

où les premiers points désignent des termes en puissances de r paires qui sont entièrement déterminés par φ et des termes de courbures de g et de h. Le terme H^g ne dépend que de φ et de $[g]$ et l'équation $H^g(\varphi) = 0$ est une équation aux dérivées partielles elliptique non-linéaire d'ordre n sur des applications de (M^n, g) dans (N, h), qui est covariante conforme par rapport à g.

En outre, notre terme $H^g(\varphi)$ est de la forme suivante :

$$H^g(\varphi) = a_n (\delta^g d)^{n/2-1} \delta^g T\varphi + \text{des dérivées de } \varphi \text{ d'ordre inférieurs},$$

où

$$a_n := \frac{(-1)^{n/2-1}}{2^{n-1}(n/2)!(n/2-1)!}$$

et vérifie $H^{\overline{g}}(\varphi) = e^{-n\omega} H^g(\varphi)$ pour $\overline{g} = e^{2\omega} g$.

Nous avons le théorème suivant quand la dimension de M est impaire.

https://doi.org/10.4153/CJM-2012-034-8 Published online by Cambridge University Press

Théorème 3.2 *Supposons que n soit impair, on se donne (M^n, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes et on note (X, g_+) la métrique de Poincaré de (M, g). On écrit g_+ sous la forme* (2.1) *et on se donne φ une application C^∞ de (M, g) dans (N, h), alors il existe une unique section U de $(\varphi \circ p_M)^* TN$ modulo $O(r^n)$ définie dans un voisinage de M dans X, telle que l'application $\tilde{\varphi} := (\exp_{\varphi \circ p_M}) \circ U$ soit solution du système suivant :*

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{|r=0} = \varphi, \\ \delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = O(r^{n+1}). \end{cases}$$

Plus précisément, U admet le développement asymptotique en $r = 0$ suivant :

$$U = U_2 r^2 + \cdots + U_n r^n + U_{n+1} r^{n+1} + \cdots ,$$

où les premiers points désignent des termes en puissances de r paires qui sont entièrement déterminés par φ et des termes de courbures de g et de h. Le terme U_n est indéterminé.

Nous pouvons à présent définir les applications conforme-harmoniques en dimension paire.

Définition 3.3 Nous appelons applications conforme-harmoniques de $(M^n, [g])$ dans (N, h), les solutions de l'équation aux dérivées partielles covariante conforme du théorème 3.1. On parlera alors d'applications C-harmoniques, afin d'alléger le texte.

Remarque 3.4 Nous aurions pu nous contenter de déterminer la valeur sur le bord des $(n - 1)$ premières dérivées par rapport à r de notre solution $\tilde{\varphi}$ et de notre terme H quand n est pair. Il est facile de voir que c'est équivalent à la donnée du développement asymptotique de U, mais il nous semble plus naturel de procéder comme nous avons fait, en particulier pour faire le lien avec le théorème de Graham–Zworski sur les fonctions (voir ci-dessous).

Un exemple simple d'applications C-harmoniques est de regarder quand notre variété d'arrivée N est égale à $\mathbb{R}^m$, cela revient à travailler avec les fonctions C^∞ de (X, g_+). On retrouve quand n est pair, la construction de Graham et Zworski [18] des opérateurs GJMS de Graham, Jenne, Mason et Sparling [15] en calculant directement le développement asymptotique de $\tilde{\varphi}$. C'est pourquoi dans le cas général, comme on ne peut pas faire de développement asymptotique sur $\tilde{\varphi}$, on identifie notre variété N d'arrivée avec le fibré $\varphi^* TN$, pour pouvoir calculer le développement asymptotique de U. Sur les fonctions, notre théorème 3.1 devient le suivant.

Théorème 3.5 (Graham–Zworski) *Soit f une fonction C^∞ de M, alors il existe une unique fonction $\tilde{f} \bmod O(r^n)$ de $\overline{X}$ vérifiant le système suivant :*

$$\begin{cases} \tilde{f}_{|r=0} = f, \\ \Delta_{g_+} \tilde{f} = O(r^{n+1} \log r). \end{cases}$$

De plus, le développement asymptotique de f est pair jusqu'au terme $n - 1$ et il contient un terme en $r^n \log r$ qui ne dépend que de f et de $[g]$. Ce terme logarithmique définit un *opérateur différentiel covariant conforme sur les fonctions de (M, g) qui a pour terme principal $\Delta_g^{n/2}$. Il s'agit de l'opérateur GJMS de rang maximal.*

Du théorème précédent et d'une formule due à Graham dans [14] qui a été retrouvé par Gover (voir [12, théorème 1.2]), on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.6 *Soient (M^n, g) une variété d'Einstein de dimension paire et f une fonction de M, alors f est C-harmonique sur $(M, [g])$ si et seulement si :*

$$\Big(\prod_{j=1}^{n/2} \Big(\Delta^g - \frac{(n+2j-2)(n-2j)}{4n(n-1)} \,\mathrm{Scal} \Big) \Big) f = 0.$$

3.1 Démonstration du théorème 3.1

3.1.1 Quand M est de dimension paire

Soit $\tilde{\varphi}$ une application de $(\overline{X}, g_+)$ dans (N, h), on note φ sa restriction sur M, on va montrer que si $\delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = O(r^{n+1} \log r)$, alors l'application $U := (\exp_{\varphi \circ p_M})^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ admet le développement asymptotique annoncé.

Par changement conforme de métrique, on obtient pour le laplacien de $\tilde{\varphi}$:

$$\delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = r^2 \Big(\delta^{g_r} T\tilde{\varphi} - \frac{\mathrm{tr}^{g_r} g_r'}{2} \partial_r \tilde{\varphi} - \nabla^h_{\partial_r \tilde{\varphi}} \partial_r \tilde{\varphi} \Big) + r(n-1) \partial_r \tilde{\varphi}, \tag{3.1}$$

et on obtient directement que $\delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = O(r)$ par rapport à la métrique g. Pour simplifier les notations, on pose $\varphi^{(k)}$ comme étant égale à la valeur au bord de la k-ième dérivée de $\tilde{\varphi}$ par rapport à r, c'est-à-dire

$$\varphi^{(k)} := [(\nabla^h_{\partial_r \tilde{\varphi}})^{k-1} \partial_r \tilde{\varphi}]_{r=0}.$$

On a facilement les équivalences suivantes

$$\delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = O(r^2) \Longleftrightarrow [\nabla^h_{\partial_r \tilde{\varphi}} \delta^{g_+} T\tilde{\varphi}]_{r=0} = 0 \Longleftrightarrow \varphi^{(1)} = 0.$$

Comme la dérivation $\nabla^h_{\partial_r \tilde{\varphi}}$ sur $\tilde{\varphi}^* TN$ restreinte au bord ne dépend que de la métrique h, de l'application φ et de $\varphi^{(1)}$ qui est nul, on peut déterminer $\varphi^{(k)}$ en fonction des conditions initiales, c'est-à-dire notre application φ et des termes de courbures de (M, g) et de (N, h). On procède par récurrence sur k tant que k est strictement plus petit que n. Supposons que $\varphi^{(k-1)}$ soit déterminé par les conditions initiales, on détermine $\varphi^{(k)}$ en résolvant l'équation $\delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = O(r^{k+1})$ qui est équivalente à $[(\nabla^h_{\partial_r \tilde{\varphi}})^k \delta^{g_+} T\tilde{\varphi}]_{r=0} = 0$, c'est-à-dire :

$$(k-n)\varphi^{(k)} = (k-1) \Big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde{\varphi}})^{k-2} (\delta^{g_r} T\tilde{\varphi} - \frac{\mathrm{tr}^{g_r} g_r'}{2} \partial_r \tilde{\varphi}) \Big]_{r=0}. \tag{3.2}$$

Comme on connaît les dérivées d'ordre inférieur de $\tilde{\varphi}$ par hypothèse de récurrence et le développement asymptotique de g_r pour $r = 0$ jusqu'au terme en $r^n \log r$, alors

https://doi.org/10.4153/CJM-2012-034-8 Published online by Cambridge University Press

le terme de droite de (3.2) est entièrement explicité par les conditions initiales, tant que k est strictement inférieur à n.

Par exemple, si $k = 2$ et $n \neq 2$, on obtient :

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2-n}\delta^g T\varphi, \tag{3.3}$$

car la dérivée de g_r par rapport à r s'annule pour $r = 0$ (voir théorème 2.1). Si k est impair, on montre facilement par récurrence, en utilisant le fait que g_r admet un développement asymptotique pair en $r = 0$ jusqu'au terme $n-1$, que le terme de droite de (3.2) est nul, ainsi pour tout entier impair s compris entre 1 et $n-1$, on a :

$$\varphi^{(s)} = 0. \tag{3.4}$$

On verra que pour n strictement plus grand que 2, il apparaît des termes de courbures de (M, g) et de (N, h) dès le terme $\varphi^{(4)}$ (on pourra consulter les exemples explicites de la cinquième partie).

Nous allons faire maintenant notre identification entre notre section U et notre application $\tilde{\varphi}$. Pour cela, on prend p un point de M, l'application exponentielle en $\varphi(p)$ détermine un isomorphisme entre une petite boule $B_{\varphi(p)}$ de N centrée en $\varphi(p)$ et un ouvert de $T_{\varphi(p)}N$. On pose $\varepsilon_p := \sup\{\alpha \mid \forall\beta < \alpha, \tilde{\varphi}(p,\beta) \in B_{\varphi(p)}\}$ et $U(p,r) := (\exp_{\varphi(p)})^{-1}\big(\tilde{\varphi}(p,r)\big)$, pour $r < \varepsilon_p$. On a facilement que $U(p,0) = (\exp_{\varphi(p)})^{-1}\big(\varphi(p)\big) = 0$. Comme la dérivée de $\tilde{\varphi}$ par rapport à r est nulle sur le bord, il en est de même pour la dérivée de U par rapport à r. On montre ainsi par récurrence, que les dérivées impaires d'ordre inférieur à n de U s'annulent sur le bord. Ainsi les termes impairs du développement asymptotique de U sont nuls jusqu'à l'ordre n et les termes pairs sont donnés jusqu'à l'ordre $n-2$ par les dérivées de $\tilde{\varphi}$ par rapport à r en $r = 0$, qui sont eux-mêmes entièrement déterminés par les conditions initiales et des dérivés de $(\exp_{\varphi(p)})^{-1}$ en 0 qui sont elles-mêmes des expressions universelles de R^h et de ses dérivées. En résumé, le développement asymptotique de U en $r = 0$ est déjà de la forme suivante :

$$U = U_2 r^2 + \cdots + U_{n-2} r^{n-2} + \cdots .$$

Supposons que le terme suivant du développement asymptotique soit le terme $U_n r^n$, alors $\varphi^{(n)}$ existe et (3.2) implique que

$$\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}})^{n-2}\Big(\delta^{g_r} T\tilde{\varphi} - \frac{\mathrm{tr}^{g_r} g_r'}{2}\partial_r\tilde{\varphi}\Big)\Big]_{r=0} = 0.$$

Cette équation n'a aucune chance d'être vraie en général, c'est pourquoi on introduit notre terme en $r^n \log r$. Le développement asymptotique en $r = 0$ de la dérivée de $\tilde{\varphi}$ est ainsi la forme :

$$\partial_r\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^{(2)} r + \frac{1}{3!}\tilde{\varphi}^{(4)} r^3 + \cdots + n\tilde{H}^g(\varphi) r^{n-1}\log r + \tilde{Q} r^{n-1} + \cdots ,$$

où $\tilde{\varphi}^{(2)}, \tilde{\varphi}^{(4)}, \dots, \tilde{H}^g(\varphi)$ et $\tilde{Q}$ désignent le transport parallèle le long de $r \to \tilde{\varphi}(r,\cdot)$ de $\varphi^{(2)}, \varphi^{(4)}, \dots, H^g(\varphi)$ et Q. On obtient dans ce cas là

$$r^2(\nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}}\partial_r\tilde{\varphi}) - r(n-1)\partial_r\tilde{\varphi} = nH^g(\varphi)r^n + O(r^{n+1}\log r),$$

ce qui montre qu'avec (3.1), l'équation $\delta^{g_+}T\tilde{\varphi} = O(r^{n+1}\log r)$ est équivalente à l'égalité suivante :

$$H^g(\varphi) = \frac{n-1}{n!}\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}})^{n-2}\Big(\delta^{g_r}T\tilde{\varphi} - \frac{\operatorname{tr}^{g_r} g_r'}{2}\partial_r\tilde{\varphi}\Big)\Big]_{r=0}, \tag{3.5}$$

ce qui détermine $H^g(\varphi)$ par les conditions initiales. Notre équation de récurrence ne nous permet pas d'expliciter le terme U_n : il est formellement indéterminé et l'unicité de notre solution est donc bien vérifiée modulo $O(r^n)$. L'existence se montre en remarquant que l'application $(p,r) \to \exp_{\varphi(p)}(U_2r^2 + \cdots + U_{n-2}r^n + H^g r^n \log r)$ vérifie par construction le système du théorème 3.1.

Par un raisonnement classique sur les développements asymptotiques de ce type, on montre que H^g est un terme covariant conforme (voir [13]). Pour le calcul de la partie principale de H^g, voir la preuve de théorème 4.1.

3.1.2 Quand M est de dimension impaire

Supposons maintenant que n est impair, on a encore :

$$\delta^{g_+}T\tilde{\varphi} = r^2\Big(\delta^{g_r}T\tilde{\varphi} - \frac{\operatorname{tr}^{g_r} g_r'}{2}\partial_r\tilde{\varphi} - \nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}}\partial_r\tilde{\varphi}\Big) + r(n-1)\partial_r\tilde{\varphi}.$$

Comme avant, on montre que les dérivées impaires de $\tilde{\varphi}$ par rapport à r d'ordre inférieur à $n-1$ s'annulent sur le bord. Par contre, pour des raisons de parité, le terme de droite de l'égalité ci-dessus ne contient pas de terme en r^n et il n'y a donc pas de terme en $r^n \log r$ dans le développement asymptotique de U contrairement au cas précédent. Le terme en r^n est indéterminé comme précédemment.

On vient de montrer que si $\tilde{\varphi}$ est une application C^{n-1} de $\overline{X}$ dans N et qui est asymptotiquement harmonique de (X, g_+) dans (N, h), alors ce qu'on pourrait appeler son développement asymptotique (en fait celui de U) est déterminé jusqu'au terme r^{n-1} par les métriques g et h, et la valeur de $\tilde{\varphi}$ sur le bord.

3.2 Exemples

Proposition 3.7 *Soient (M^n, g) une variété d'Einstein de dimension paire et (N,h) une variété riemannienne, alors les applications harmoniques de (M,g) dans (N,h) sont C-harmoniques.*

Démonstration Supposons que g vérifie $\mathrm{Ric} = 4\lambda(n-1)g$, alors d'après la formule (2.2), la métrique de Poincaré de g s'écrit $g_+ = r^{-2}\big(dr^2 + (1-\lambda r^2)^2 g\big)$. Soit φ une application harmonique de (M,g) dans (N,h), on obtient alors avec l'égalité (3.2) pour $k=1$:

$$\varphi^{(2)} = \frac{-1}{n-2}\Big[\frac{\delta T\tilde{\varphi}}{(1-\lambda r^2)^2} + \frac{2\lambda n r}{1-\lambda r^2}\Big]_{r=0} = 0.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2012-034-8 Published online by Cambridge University Press

Par récurrence, on montre ainsi que les dérivées paires de $\tilde{\varphi}$ sont nulles en $r = 0$ et donc que $H^g(\varphi) = 0$. ■

Remarque 3.8 Comme l'identité d'une variété riemannienne est harmonique, on vient donc de montrer que si la variété est Einstein, alors elle est C-harmonique. On montrera qu'il existe des hypothèses plus faibles qu'être Einstein pour que l'identité soit harmonique (voir le corollaire 5.4 pour la dimension 4 et le théorème 5.6 pour la dimension 6).

3.3 Obstruction au remplissage harmonique

Pour les variétés AH, on obtient le suivant comme corollaire du théorème 3.1.

Corollaire 3.9 *Soient (X^{n+1}, g_+) une variété AH de dimension impaire, d'infini conforme $(M, [g])$ et (N, h) une variété riemannienne, alors les applications qui sont de classe C^n de $\overline{X}$ dans N et harmonique de (X, g_+) dans (N, h), vérifient le fait que leurs restrictions à M est C-harmonique de $(M, [g])$ dans (N, h).*

Démonstration Soit $\tilde{\varphi}$ une application C^n de $\overline{X}$ dans N et harmonique de (X, g_+) dans (N, h), alors l'application $U := (\exp_{\tilde{\varphi}\circ p_M})^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ admet, d'après le théorème 3.1, le développement asymptotique en $r = 0$ suivant :

$$U = U_2 r^2 + \cdots + U_{n-2} r^{n-2} + H^g r^n \log r + O(r^n),$$

or $\tilde{\varphi}$ est C^n sur $\overline{X}$, donc $H^g = 0$ et $\tilde{\varphi}_{|M}$ est bien C-harmonique. ■

4 L'énergie renormalisée

4.1 Quand M est de dimension paire

Soient φ une application de (M, g) dans (N, h) et $\tilde{\varphi}$ la solution donnée par le théorème 3.1 (les termes indéterminés de $\tilde{\varphi}$ n'auront aucune incidence dans la suite), on note

$$E_{g_+}(\tilde{\varphi}, \rho) := \frac{1}{2} \int_{M\times[\rho;\varepsilon]} |T\tilde{\varphi}|^2_{g_+,h} \,\mathrm{dvol}_{g_+}$$

l'énergie de $\tilde{\varphi}$ dans le ruban $M \times [\rho; \varepsilon]$ par rapport à g_+ et h, qui dépend donc de l'identification au bord via la métrique g. En renormalisant cette énergie, on obtient le théorème suivant.

Théorème 4.1 *Le développement asymptotique de $E(\tilde{\varphi}, \rho)$ en $\rho = 0$ est de la forme suivante :*

$$E_{g_+}(\tilde{\varphi}, \rho) = E_{2-n}\rho^{2-n} + \cdots + E_{-2}\rho^{-2} + F \log\frac{1}{\rho} + O(1),$$

où les points désignent des termes en puissances paires de ρ de $2 - n$ à -2 qui sont entièrement déterminés par φ et des termes de courbures de g et de h.

Le terme F ne dépend que de φ et de $[g]$ et de h, on peut ainsi définir une fonctionnelle invariante conforme $\mathcal{E}_g(\varphi) := (na_n)^{-1}F(\varphi, g)$. Plus précisément, elle vérifie $\mathcal{E}_{\overline{g}}(\varphi) = \mathcal{E}_g(\varphi)$ pour tout $\overline{g}$ dans $[g]$ et elle s'écrit

$$\mathcal{E}_g(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M \langle(\delta^g d)^{n/2-2}\delta^g T\varphi, \delta^g T\varphi\rangle_g \,\mathrm{dvol}_g + \cdots ,$$

où les points de suspension désignent des intégrales sur M de termes en dérivées de φ d'ordre inférieur.

De plus, le gradient de notre fonctionnelle $\mathcal{E}_g$ associé à g est égale à $\frac{1}{a_n}H^g$, c'est-à-dire que quelque soit $\dot{\varphi} \in \Gamma(\varphi^* TN)$, on a

$$d_\varphi \mathcal{E}_g(\dot{\varphi}) = -\frac{1}{a_n}\int_M \langle\dot{\varphi}, H^g\rangle_h \,\mathrm{dvol}_g .$$

Le développement asymptotique de l'énergie possède la même structure que celui du volume d'une variété AH calculé par Graham dans [13], ce qui donne ainsi des résultats de même nature. Notre terme logarithmique F (qui est notre fonctionnelle $\mathcal{E}$) et le terme logarithmique L dans l'étude du volume sont ainsi des invariants conformes. De plus, Graham et Hirachi montrent dans [16], que la variation infinitésimale de L ne dépend que du terme logarithmique h du développement de la métrique g_r, jouant ainsi le même rôle que H par rapport à notre fonctionnelle.

Remarque 4.2 Graham et Hirachi ont énoncé ce théorème en terme de Q-courbure et de tenseur d'obstruction. En effet, à un facteur multiplicatif, l'intégrale de la Q-courbure est égale à L (voir Graham et Zworski dans [18]) et le tenseur d'obstruction est égale à h. On pourra également consulter les travaux de Pierre Albin [1] sur le sujet.

Démonstration On commence par montrer que l'énergie admet un développement asymptotique de ce type, remarquons déjà que :

$$E_{g_+}(\tilde{\varphi}, \rho) = \frac{1}{2}\int_{M\times[\rho;\varepsilon]} \frac{|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}}{r^{n-1}} dr \,\mathrm{dvol}_{g_r} .$$

D'après les théorèmes 2.1 et 3.1, les dérivées impaires d'ordre inférieur à n de g_r et de $\tilde{\varphi}$ s'annule pour $r = 0$, ainsi on a le développement asymptotique suivant :

$$|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r} \,\mathrm{dvol}_{g_r} = \big(e_0 + e_2 r^2 + \cdots + e_{n-2}r^{n-2} + O(r^n \log r)\big) \,\mathrm{dvol}_g,$$

ce qui donne le résultat annoncé et la formule suivante :

$$\mathcal{E}_g(\varphi) = \frac{n-1}{2n!\,a_n}\int_M \partial_r^{n-2}[|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r} \,\mathrm{dvol}_{g_r}]_{r=0}. \tag{4.1}$$

En effet, on a pour le terme de gauche :

$$\mathcal{E}_g(\varphi) = \frac{1}{na_n}F = \frac{1}{2na_n}\int_M e_{n-2} \,\mathrm{dvol}_g,$$

et pour le terme sous l'intégrale à droite :

$$\partial_r^{n-2}[|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}\,\mathrm{dvol}_{g_r}]_{r=0} = (n-2)!\,e_{n-2}\,\mathrm{dvol}_g\,.$$

La fonctionnelle $\mathcal{E}_g\colon \varphi \to F$ est bien définie, car F dépend seulement des $(n-2)$ premiers termes des développements asymptotiques de g_r et de $\tilde{\varphi}$, qui sont déterminés par les conditions initiales. L'invariance conforme de notre fonctionnelle est un résultat classique de l'étude de ce type de développement asymptotiques (voir [13]) et d'après la formule (3.2) on a $\varphi^{(k)} = -\frac{k-1}{n-k}\delta^g d\varphi^{(k-2)} + \cdots$, où les $\cdots$ représentent des termes en dérivées de φ d'ordre inférieurs. D'après la formule (4.1), on a facilement par récurrence :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_g(\varphi) &= \frac{n-1}{n!\,a_n}\int_M \langle d\varphi^{(n-2)}, T\varphi\rangle_g\,\mathrm{dvol}_g + \cdots\\ &= -\frac{(n-1)(n-3)}{2n!\,a_n}\int_M \langle d\delta^g d\varphi^{(n-4)}, T\varphi\rangle_g\,\mathrm{dvol}_g + \cdots\\ &= \frac{1}{2}\int_M \langle(\delta^g d)^{n/2-2}\delta^g T\varphi, \delta^g T\varphi\rangle_g\,\mathrm{dvol}_g + \cdots\,.\end{aligned}$$

On va montrer que le gradient de notre fonctionnelle $\mathcal{E}_g$ est un terme de bord dans une intégration par parties. Soit $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ une famille à 1-paramètre d'applications C^∞ de M dans N vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases}\varphi_0 = \varphi,\\ [\partial_t\varphi_t]_{t=0} = \dot{\varphi},\end{cases}$$

alors d'après le théorème 3.1, pour tout t dans $[0,1]$, il existe une application $\tilde{\varphi}_t$ de $M\times[0,\varepsilon]$ dans N qui vérifie :

$$\begin{cases}\tilde{\varphi}_{t|r=0} = \varphi_t,\\ \delta^{g_+}T\tilde{\varphi}_t = O(r^{n+1}\log r).\end{cases}$$

On munit $M\times[0,\varepsilon]\times[0,1]$ de la métrique $\gamma = g_+ + dt^2$ et on pose $\Phi(p,r,t) := \tilde{\varphi}_t(p,r)$ qui est une application de $M\times[0,\varepsilon]\times[0,1]$ dans N. Son application tangente $T\Phi$ est donc une section du fibré $\Omega(M\times[0,\varepsilon])\otimes\Phi^*TN$, sur lequel on définit la connexion $\nabla^{\gamma,h}$. Comme $|T\tilde{\varphi}_t|^2_{g_+,h} = |T\Phi|^2_{\gamma,h} - |\partial_t\Phi|^2_h$ et $\nabla^{\gamma,h}T\Phi$ est symétrique, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t E_{g_+}(\tilde{\varphi}_t,\rho) &= \frac{1}{2}\partial_t\Big(\int_{M\times[\rho,\varepsilon]}|T\tilde{\varphi}_t|^2_{g_+,h}\,\mathrm{dvol}_{g_+}\Big)\\ &= \int_{M\times[\rho,\varepsilon]}\big(\langle\nabla^{\gamma,h}_{\partial_t}T\Phi, T\Phi\rangle_{\gamma,h} - \langle\nabla^h_{\partial_t\Phi}(\partial_t\Phi),\partial_t\Phi\rangle_h\big)\,\mathrm{dvol}_{g_+}\\ &= \int_{M\times[\rho,\varepsilon]}\big(\langle\nabla^h_{T\Phi}(\partial_t\Phi), T\Phi\rangle_{\gamma,h} - \langle\nabla^h_{T\Phi}(\partial_t\Phi), T\Phi\rangle_{dt^2,h}\big)\,\mathrm{dvol}_{g_+}\\ &= \int_{M\times[\rho,\varepsilon]}\langle\nabla^h_{T\Phi}(\partial_t\Phi), T\Phi\rangle_{g_+,h}\,\mathrm{dvol}_{g_+},\end{aligned}$$

ce qui donne pour $t = 0$:

$$[\partial_t E_{g_+}(\tilde{\varphi}_t, \rho)]_{t=0} = \int_{M\times[\rho,\varepsilon]} \langle \nabla^h_{T\tilde{\varphi}} [\partial_t \tilde{\varphi}_t]_{t=0}, T\tilde{\varphi}\rangle_{g_+,h} \,\mathrm{dvol}_{g_+} .$$

Après une intégration par parties, on obtient que la différentielle de $\mathcal{E}$ est égale au terme en $\log \rho$ de l'expression suivante multiplié par $(na_n)^{-1}$:

$$\int_{M\times[\rho,\varepsilon]} \langle [\partial_t \tilde{\varphi}_t]_{t=0}, \delta^{g_+} T\tilde{\varphi}\rangle_h \,\mathrm{dvol}_{g_+} - \int_M \rho^{-n+1} \langle [\partial_t \tilde{\varphi}_t]_{t=0}, \partial_\rho \tilde{\varphi}\rangle_h \,\mathrm{dvol}_{g_\rho} .$$

Comme $\delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = O(r^{n+1} \log r)$, $[\partial_t \tilde{\varphi}_t]_{t=0} = O(1)$ et $\mathrm{dvol}_{g_+} = O(r^{-n-1})$, il n'y a pas de $\log \rho$ dans la première intégrale, le terme recherché est donc celui en $\rho^{n-1} \log \rho$ de $\partial_\rho \tilde{\varphi}$, qui est exactement nH^g. Ainsi, on a bien

$$d_\varphi \mathcal{E}_g(\dot{\varphi}) = -\frac{1}{a_n} \int_M \langle \dot{\varphi}, H^g \rangle_h \,\mathrm{dvol}_g . \qquad \blacksquare$$

Remarque 4.3 On peut trouver dans la littérature (voir [7], [20], et les références citées) une autre généralisation des applications harmoniques qui est non-conforme. Ce sont les applications biharmoniques, qui sont définies comme étant les points critiques de la biénergie :

$$E^2_g(\varphi) := \frac{1}{2} \int_M |\delta^g T\varphi|^2_h \,\mathrm{dvol}_g .$$

Quand (M, g) est conformément plate, les applications C-harmoniques sont biharmoniques pour le bon changement conforme de métrique.

4.2 Quand M est de dimension impaire

Soit (X^{n+1}, g_+) une variété AHE, on reprend les notations du théorème 2.1. Notons $\tilde{\mathcal{H}}$ l'espace des applications C^∞ de $\overline{X}$ dans N qui vérifient la condition d'harmonicité asymptotique du théorème 3.2, on va renormaliser l'énergie par rapport à g_+ et h, de ces applications sur la variété compacte à bord $X_\rho := \{r \geq \rho\}$, quand ρ est un réel dans $]0, \varepsilon[$ qui tend vers 0. On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 4.4 *Soit $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}$, alors le développement asymptotique de $E(\tilde{\varphi}, \rho)$ en $\rho = 0$ est de la forme suivante :*

$$E_{g_+}(\tilde{\varphi}, \rho) = E_{2-n}\rho^{2-n} + \cdots + E_{-1}\rho^{-1} + C + o(1),$$

où les points désignent des termes en puissances impaires de ρ de $2 - n$ à -1 qui sont entièrement déterminés par $\tilde{\varphi}$ et des termes de courbures de g et de h.

Le terme constant C est un invariant conforme, c'est-à-dire que $C(\overline{g}, \tilde{\varphi}) = C(g, \tilde{\varphi})$ pour tout $\overline{g}$ dans $[g]$. De plus, sa variation infinitésimale dans $\tilde{\mathcal{H}}$ ne dépend que du terme *indéterminé U_n du développement asymptotique de U dans le théorème* 3.2*, et elle est donnée par la formule suivante :*

$$d_{\tilde{\varphi}}C(Z) = -n\int_M \langle Z_0, U_n\rangle_h \,\mathrm{dvol}_g,$$

où $Z \in \Gamma(\tilde{\varphi}^* TN)$ est une déformation infinitésimale de $\tilde{\varphi}$ dans $\tilde{\mathcal{H}}$ et Z_0 est la restriction de Z au bord.

Remarque 4.5 Pour définir notre invariant conforme quand n était pair, on avait seulement besoin d'une partie du développement limité de g_r et de $\tilde{\varphi}$, qui dépendaient exclusivement de termes de courbure de g et de la valeur de $\tilde{\varphi}$ sur M, ainsi on avait une fonctionnelle parfaitement définie sur les applications de M dans N. Maintenant si n est impair, on a besoin de toute la métrique g_r et de toute l'application $\tilde{\varphi}$ pour avoir notre invariant conforme, ce qui fait apparaître des termes qui sont indépendants du bord rendant impossible la construction d'une fonctionnelle analogue à celle du théorème 4.1.

L'analogie entre l'étude du développement asymptotique de l'énergie et celui du volume, décrite dans le paragraphe précédent se poursuit dans le cas impair. Notre terme C joue maintenant le rôle du volume renormalisé V (le terme constant dans le développement asymptotique du volume), ces termes sont indépendants du choix du représentant dans l'infini conforme de g_+. De plus, Anderson, pour $n = 3$ (voir [2]) et Albin dans le cas général (voir [1]), ont montré que la variation infinitésimale de V ne dépend que du terme indéterminé $g^{(n)}$ du développement de la métrique g_r, jouant ainsi le même rôle que U_n par rapport à C, complétant notre parallèle.

Démonstration Remarquons déjà que :

$$E_{g_+}(\tilde{\varphi}, \rho) = E_{g_+}(\tilde{\varphi}, \epsilon) + \frac{1}{2}\int_{M\times[\rho;\varepsilon]} |T\tilde{\varphi}|^2_{g_+,h}\,\mathrm{dvol}_{g_+}$$

et qu'avec les théorèmes 2.1 et 3.2, on obtient :

$$\begin{aligned}|T\tilde{\varphi}|^2_{g_+,h}\,\mathrm{dvol}_{g_+} &= r^{1-n}|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,h}\,\mathrm{dvol}_{g_r}\,dr\\ &= (e_{(0)}r^{1-n} + e_{(2)}r^{3-n} + \cdots + e_{(n-1)} + e_{(n)}r + \cdots)\,\mathrm{dvol}_g\,dr,\end{aligned}$$

ainsi E_{g_+} admet bien le développement asymptotique annoncé. La preuve de l'invariance conforme du terme constant est un résultat classique (voir [13]).

Soient $(\tilde{\varphi}_t)_{t\in[0,1]}$ une famille à 1-paramètre de $\tilde{\mathcal{H}}$ et $Z := [\partial_t\tilde{\varphi}_t]_{t=0}$, on obtient, en procédant comme avant, que la différentielle de F en $\tilde{\varphi}$ dans la direction Z est égale au terme constant de l'expression suivante :

$$\int_{X_\rho}\langle Z, \delta^{g_+}T\tilde{\varphi}\rangle_h\,\mathrm{dvol}_{g_+} - \int_M \rho^{-n+1}\langle Z, \partial_\rho\tilde{\varphi}\rangle_h\,\mathrm{dvol}_{g_\rho}.$$

Comme $Z = O(1)$, $\delta^{g_+}T\tilde{\varphi} = O(r^{n+1})$ et $\mathrm{dvol}_{g_+} = O(r^{-n-1})$, il n'y a pas de terme constant dans la première intégrale. D'après les théorèmes 3.2 et 2.1, la déformation Z

admet un développement pair jusqu'au rang n, le terme $\partial_\rho\tilde{\varphi}$ admet un développement impair jusqu'au rang $n-2$ et dvol_{g_ρ} admet un développement pair jusqu'au rang n. Ainsi le terme recherché provient donc du terme en ρ^{n-1} de $\partial_\rho\tilde{\varphi}$, qui est exactement nU_n ce qui donne bien :

$$d_{\tilde{\varphi}}C(Z) = -n\int_M \langle Z_0, U_n\rangle_h \,\mathrm{dvol}_g, \qquad \blacksquare$$

4.3 Exemple

La proposition suivante nous donne la valeur de notre fonctionnelle $\mathcal{E}$ pour des applications harmoniques d'une variété (M, g) d'Einstein de dimension paire dans une variété riemannienne (N, h) quelconque.

Proposition 4.6 *Soient (M^n, g) une variété d'Einstein de dimension paire avec $\mathrm{Ric}^g = 4\lambda(n-1)g$, (N, h) une variété riemannienne et φ une application harmonique de (M, g) dans (N, h), alors notre fonctionnelle en φ est égale à :*

$$\mathcal{E}_g(\varphi) = 2^{n-3}\lambda^{n/2-1}(n-2)!\int_M |T\varphi|^2_{g,h}\,\mathrm{dvol}_g\,.$$

Dans le cas particulier de l'identité de (M, g), on obtient ainsi :

$$\mathcal{E}_g(id_M) = 2^{n-3}\lambda^{n/2-1}(n-2)!\,n\,\mathrm{vol}_g(M),$$

où $\mathrm{vol}_g(M)$ désigne le volume de M par rapport à g.

Démonstration D'après les égalités (4.1) et (2.2), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_g(\varphi) &= \frac{n-1}{2n!\,a_n}\int_M [\partial_r^{n-2}(|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}\,\mathrm{dvol}_{g_r})]_{r=0}\\ &= \frac{n-1}{2n!\,a_n}\int_M \big[\partial_r^{n-2}\big((1-\lambda r^2)^n|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}\big)\big]_{r=0}\,\mathrm{dvol}_g,\end{aligned}$$

comme φ est harmonique, on sait avec (3.7), que les dérivées de $\tilde{\varphi}$ par rapport à r s'annulent quand $r = 0$, ainsi

$$\big[\partial_r^{n-2}\big((1-\lambda r^2)^n|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}\big)\big]_{r=0} = (-\lambda)^{n/2-1}\frac{\big((n-2)!\big)^2}{\big((n/2-1)!\big)^2}|T\varphi|^2_{g,h},$$

ce qui donne bien pour la fonctionnelle en φ :

$$\mathcal{E}_g(\varphi) = 2^{n-3}\lambda^{n/2-1}(n-2)!\int_M |T\varphi|^2_{g,h}\,\mathrm{dvol}_g\,. \qquad \blacksquare$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2012-034-8 Published online by Cambridge University Press

5 Etude en basses dimensions

5.1 La dimension 4

5.1.1 Ecriture explicite

En dimension 4, on peut expliciter facilement la fonctionnelle du théorème 4.1 et l'équation de ses points critiques, c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 5.1 *Soient (M^4, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, la fonctionnelle invariante conforme du théorème* 4.1 *s'écrit alors :*

$$\mathcal{E}_g^4(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M \Big(|\delta T\varphi|_h^2 + \frac{2}{3}\operatorname{Scal}|T\varphi|_{g,h}^2 - 2(\operatorname{Ric}\otimes h)(T\varphi, T\varphi)\Big)\,\mathrm{dvol},$$

où δ désigne la divergence sur le fibré $\Omega(M) \times \varphi^* TN$. L'équation de ses points critiques est :

$$\delta d\delta T\varphi + \delta\Big(\frac{2}{3}\operatorname{Scal} - 2\operatorname{Ric}\Big) T\varphi - \mathrm{S}(\delta T\varphi) = 0,$$

où Ric, Scal *et* dvol *se rapportent à g et* S *est l'endomorphisme de $\varphi^* TN$ défini de la manière suivante :*

$$\mathrm{S}(X) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{R}^h_{X, T\varphi(e_i)}\, T\varphi(e_i),$$

où $(e_1, \dots, e_4)$ est une base orthonormée de TM par rapport à g et R^h est le tenseur de courbure de (N, h).

Remarque 5.2 Quand on travaille avec des fonctions, l'équation des points critiques de $\mathcal{E}_g^4$ est tout simplement l'équation du noyau de l'opérateur de Paneitz P_4 :

$$\mathrm{P}_4 = \Delta^2 + \delta\Big(\frac{2}{3}\operatorname{Scal} - 2\operatorname{Ric}\Big) d,$$

où Δ désigne le laplacien de g.

5.1.2 Rigidité

Proposition 5.3 *Soient (M^4, g) une variété d'Einstein de courbure scalaire positive ou nulle et (N, h) une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ou nulle, on se donne une application φ qui est C-harmonique de $(M, [g])$ dans (N, h), alors*

(i) *l'application φ est totalement géodésique,*
(ii) *si la courbure scalaire de (M, g) est strictement positive, alors l'application φ est constante,*
(iii) *si la courbure sectionnelle de (N, h) est strictement négative, alors l'application φ est constante ou a une géodésique comme image.*

Démonstration On va d'abord montrer que sous les hypothèses de la proposition, la notion de C-harmonicité se confond avec celle d'harmonicité. On sait déjà que

https://doi.org/10.4153/CJM-2012-034-8 Published online by Cambridge University Press

l'harmonicité implique la C-harmonicité d'après le corollaire 3.7. Soit φ une application C-harmonique de $(M,[g])$ dans (N,h), la métrique g étant d'Einstein, on a :

$$\delta d\delta T\varphi + \frac{1}{6}\operatorname{Scal}\delta T\varphi - \mathrm{S}(\delta T\varphi) = 0.$$

En prenant le produit scalaire de l'égalité précédente contre $\delta T\varphi$ par rapport à g et h, on obtient avec une intégration par parties et en se souvenant que $\langle \mathrm{S}(\delta T\varphi), \delta T\varphi\rangle_h \leq 0$:

$$\int_M \Big(|d\delta T\varphi|^2_{g,h} + \frac{1}{6}\operatorname{Scal}|\delta T\varphi|^2_h \Big)\,\mathrm{dvol} \leq 0.$$

Si la courbure scalaire de g est strictement positive, alors φ est harmonique de (M,g) dans (N,h). Maintenant si la courbure scalaire de g est nulle, alors $d\delta T\varphi = 0$ et dans ces conditions, le produit scalaire de $d\delta T\varphi$ contre $T\varphi$ par rapport à (g,h) donne avec une intégration par parties :

$$0 = \int_M \langle d\delta T\varphi, T\varphi\rangle_{g,h}\,\mathrm{dvol} = \int_M |\delta T\varphi|^2_h\,\mathrm{dvol}.$$

Ainsi φ est encore harmonique de (M,g) dans (N,h). Il suffit alors d'appliquer un résultat de rigidité sur les applications harmoniques due à Eells et Sampson dans [9] pour conclure. ∎

D'après le théorème 3.7, on sait que l'identité sur une variété d'Einstein de dimension paire est C-harmonique, l'objet du corollaire ci-dessous est de donner une condition plus faible sur les variétés de dimension 4 pour que l'identité reste C-harmonique.

Corollaire 5.4 *Soit (M^4,g) une variété riemannienne, l'application identité de M est C-harmonique de $(M,[g])$ dans (M,g) si et seulement si la courbure scalaire de g est constante.*

Démonstration D'après le théorème 5.1, l'identité est C-harmonique si et seulement si $\frac{2}{3}\delta\operatorname{Scal} - 2\delta\operatorname{Ric} = 0$, ce qui est équivalent à ce que la courbure scalaire soit constante. ∎

5.1.3 Démonstration du théorème 5.1

Soient (M^4,g) une variété conforme et $g_+ = r^{-2}(dr^2 + g_r)$ sa métrique de Poincaré, d'après (2.3), g_r s'écrit dans un voisinage du bord :

$$g_r = g + \Big(\frac{1}{12}\operatorname{Scal} g - \frac{1}{2}\operatorname{Ric}\Big) r^2 + O(r^4 \log r). \tag{5.1}$$

On se donne φ une application C^∞ de M dans N et $\tilde\varphi$ l'application du théorème 3.1, d'après (3.2), (3.4) et (3.5), on a $\varphi^{(1)} = 0$, $\varphi^{(2)} = -\frac{1}{2}\delta T\varphi$, $\varphi^{(3)} = 0$ et en notant

$g'' = [\partial_r^2 g_r]_{r=0}$, on obtient pour le terme $H^g(\varphi)$:

$$H^g(\varphi) = \frac{1}{8}\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2\Big(\delta^{g_r} T\tilde\varphi - \frac{\operatorname{tr}^{g_r} g_r'}{2}\partial_r\tilde\varphi\Big)\Big]_{r=0}$$
$$= \frac{1}{8}\big([(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\delta T\tilde\varphi)]_{r=0} + [(\nabla_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\delta^{g_r} T\varphi)]_{r=0} - (\operatorname{tr} g'')\varphi^{(2)}\big).$$

Le premier terme se calcule avec (7.2),

$$[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\delta T\tilde\varphi)]_{r=0} = (\delta d - \mathrm{S})\varphi^{(2)} = -\frac{1}{2}\delta d\delta T\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}(\delta T\varphi),$$

et les deuxième et troisième termes s'obtiennent avec (7.4) et (5.1) :

$$[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\delta^{g_r} T\varphi)]_{r=0} - (\operatorname{tr} g'')\varphi^{(2)} = -\frac{1}{3}\delta(\operatorname{Scal} T\varphi) + \delta(\operatorname{Ric} T\varphi)$$

où δ et la trace sont pris par rapport à g. On obtient ainsi :

$$H^g(\varphi) = -\frac{1}{16}\Big(\delta d\delta T\varphi - \mathrm{S}(\delta T\varphi) + \delta\Big(\frac{2}{3}\operatorname{Scal} - 2\operatorname{Ric}\Big)T\varphi\Big).$$

D'après (4.1), notre fonctionnelle $\mathcal{E}^4_g$ est égale à :

$$\mathcal{E}^4_g(\varphi) = \frac{1}{16a_4}\int_M \partial_r^2[|T\tilde\varphi|^2_{dr^2+g_r,h}\,\mathrm{dvol}_{g_r}]_{r=0}$$
$$= -\int_M\Big(\partial_r^2[|T\tilde\varphi|^2_{dr^2+g_r,h}]_{r=0} - \frac{\operatorname{Scal}}{6}|T\varphi|^2_{g,h}\Big)\,\mathrm{dvol},$$

et on conclut en regardant le premier terme sous l'intégrale avec (5.1) :

$$\partial_r^2[|T\tilde\varphi|^2_{dr^2+g_r,h}]_{r=0} = 2\langle[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2 T\tilde\varphi]_{r=0}, T\varphi\rangle_{g,h} - |T\varphi|^2_{g'',h} + 2|\varphi^{(2)}|^2_h$$
$$= -\langle d\delta T\varphi, T\varphi\rangle_{g,h} + \frac{1}{2}|\delta T\varphi|^2_h - \frac{1}{6}\operatorname{Scal}|T\varphi|^2_{g,h} + \operatorname{Ric}(T\varphi, T\varphi).$$

5.2 La dimension 6

5.2.1 Écriture explicite

Obtenir des écritures explicites de la condition de C-harmonicité devient rapidement très compliqué quand la dimension de M augmente, mis à part le cas des fonctions d'une variété d'Einstein traité dans le corollaire 3.6, les calculs deviennent rapidement pharaoniques. Toutefois en supposant que la variété de départ M soit de dimension 6 et que la variété d'arrivée N soit symétrique, on a le résultat suivant.

Théorème 5.5 *Soient (M,g) une variété d'Einstein de dimension 6 avec $\mathrm{Ric}^g = 20\lambda g$ et (N,h) une variété riemannienne symétrique, on se donne une application φ qui est C^∞ de M dans N. Alors φ est C-harmonique de $(M,[g])$ dans (N,h) si et seulement si*

$$(\delta d - \mathrm{S} + 16\lambda)(\delta d - \mathrm{S} + 24\lambda)\delta T\varphi - 2\sum_{i=1}^{6} \mathrm{R}^h_{\delta T\varphi, T\varphi(e_i)}(\nabla^h_{T\varphi(e_i)}\delta T\varphi) = 0,$$

où ∇^h est la connexion de h sur $\varphi^* TN$, δ et d se rapportent à g, et S est défini de manière analogue à la dimension 4 :

$$\mathrm{S}(X) = \sum_{i=1}^{6} \mathrm{R}^h_{X,T\varphi(e_i)}\, T\varphi(e_i),$$

où $(e_1,\dots,e_6)$ est une base orthonormée de (M,g) et R^h est le tenseur de courbure de (N,h).

De plus, notre fonctionnelle invariante conforme s'écrit :

$$\mathcal{E}^6_g(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M \big(|d\delta T\varphi|^2_{g,h} - \langle \mathrm{S}(\delta T\varphi), \delta T\varphi\rangle_h + 40\lambda|\delta T\varphi|^2_h + 384\lambda^2|T\varphi|^2_{g,h}\big)\,\mathrm{dvol}\,.$$

Toutefois, quand la variété (M,g) est seulement riemannienne, on peut encore calculer la condition de C-harmonicité et la valeur de notre fonctionnelle pour l'identité de $(M,[g])$ dans (M,g), c'est l'objet du théorème suivant .

Théorème 5.6 *Soit (M,g) une variété de dimension 6, alors l'identité est une application C-harmonique de $(M,[g])$ dans (M,g) si et seulement si :*

$$\Big(\Delta + \frac{5}{20}\,\mathrm{Scal}\, g - \frac{7}{4}\,\mathrm{Ric}\Big)\, d\,\mathrm{Scal} - \frac{5}{2}\,\mathrm{tr}(\nabla_{\mathrm{Ric}}\mathrm{Ric}) + 20\delta\, B + \frac{5}{4} d(|\,\mathrm{Ric}\,|^2) = 0,$$

où Scal, Ric et B désignent respectivement la courbure scalaire, le tenseur de Ricci, et le tenseur de Bach de g.

De plus, notre fonctionnelle en l'identité est égale à :

$$\mathcal{E}^6_g(\mathrm{id}) = \frac{2}{25}\int_M \mathrm{Scal}^2\,\mathrm{dvol}_g\,.$$

5.2.2 Démonstration du théorème 5.5

Avec les égalités (3.3), (3.2) et (7.2), on obtient

$$\varphi^{(2)} = -\frac{1}{4}\delta T\varphi \quad \text{et} \quad \varphi^{(4)} = \frac{3}{8}(\delta d - \mathrm{S} + 8\lambda)\delta T\varphi,$$

ce qui donne avec (3.5) :

$$144 H^g(\varphi) = [(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi]_{r=0} + 12\lambda(\delta d - \mathrm{S} + 12\lambda)\delta T\varphi. \tag{5.2}$$

Soit $(e_1, \dots, e_6)$ une base orthonormée de (M, g), on obtient les deux égalités suivantes en intervertissant les dérivées par rapport à i et r :

$$[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2 T\varphi(e_i)]_{r=0} = \nabla^h_{T\varphi(e_i)}\varphi^{(2)}$$

$$\big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\big(T\tilde\varphi(e_i)\big)\big]_{r=0} = \nabla^h_{T\varphi(e_i)}\varphi^{(4)} + 3\,\mathrm{R}^h_{\varphi^{(2)},T\tilde\varphi(e_i)}\,\varphi^{(2)}.$$

Intéressons-nous au premier terme de (5.2) :

$$\begin{aligned}(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi = &-\nabla^h_{T\tilde\varphi(e_i)}(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\big(T\tilde\varphi(e_i)\big) - (\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^3\big(\mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,T\tilde\varphi(e_i)}\,T\tilde\varphi(e_i)\big)\\ &- (\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2\Big(\mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,T\tilde\varphi(e_i)}\big(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi}T\tilde\varphi(e_i)\big)\Big)\\ &- \nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi}\Big(\mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,T\tilde\varphi(e_i)}\big((\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2T\tilde\varphi(e_i)\big)\Big)\\ &- \mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,T\tilde\varphi(e_i)}\big((\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^3T\tilde\varphi(e_i)\big),\end{aligned}$$

comme (N, h) est symétrique et que les dérivées première et troisième de $\tilde\varphi$ par rapport à r s'annulent sur le bord, on a avec l'identité de Bianchi :

$$[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi]_{r=0} = (\delta d - \mathrm{S})\varphi^{(4)} - 12\,\mathrm{R}^h_{\varphi^{(2)},T\varphi(e_i)}(\nabla^h_{T\varphi(e_i)}\varphi^{(2)}).$$

D'après l'expression de $\varphi^{(2)}$ et $\varphi^{(4)}$, on obtient bien :

$$384H^g(\varphi) = (\delta d - \mathrm{S}+16\lambda)(\delta d - \mathrm{S}+24\lambda)\delta T\varphi - 2\,\mathrm{R}^h_{\delta T\varphi,T\varphi(e_i)}(\nabla^h_{T\varphi(e_i)}\delta T\varphi),$$

qui est la condition de C-harmonicité énoncée.

Nous allons calculer maintenant la fonctionnelle invariante conforme. La variété (M, g) satisfait la condition d'Einstein, alors on a $g_r = (1 - \lambda r^2)^2 g$ et avec la formule (4.1) et les notations du théorème 3.1, on obtient

$$\mathcal{E}^6_g(\varphi) = \frac{4}{3}\int_M \big[\partial^4_r\big((1-\lambda r^2)^6|T\tilde\varphi|^2_{dr^2+g_r,h}\big)\big]_{r=0}\,\mathrm{dvol}_g\,.$$

D'après les expressions de $\varphi^{(2)}$ et $\varphi^{(4)}$, on a :

$$\begin{aligned}[\partial^2_r(|T\tilde\varphi|^2_{g,h})]_{r=0} &= -\frac12\langle d\delta T\varphi, T\varphi\rangle_{g,h},\\ [\partial^4_r(|T\tilde\varphi|^2_{g,h})]_{r=0} &= \frac34\langle d(\delta d - \mathrm{S}+8\lambda)\delta T\varphi, T\varphi\rangle_{g,h}\\ &\quad - \frac38\langle \mathrm{S}(\delta T\varphi), \delta T\varphi\rangle_h + \frac38|d\delta T\varphi|^2_{g,h},\end{aligned}$$

ce qui donne pour le terme sous l'intégrale :

$$\begin{aligned}\partial^4_r[(1-\lambda r^2)^6|T\tilde\varphi|^2_{dr^2+g_r,h}]_{r=0} = &\frac34\langle d(\delta d - \mathrm{S}+8\lambda)\delta T\varphi, T\varphi\rangle_{g,h} - \frac38\langle \mathrm{S}(\delta T\varphi), \delta T\varphi\rangle_h\\ &+ \frac38|d\delta T\varphi|^2_{g,h} + 24\lambda\langle d\delta T\varphi, T\varphi\rangle_{g,h} + 144\lambda^2|T\varphi|^2_{g,h}\\ &- \frac34\langle(\delta d - \mathrm{S}+8\lambda)\delta T\varphi, \delta T\varphi\rangle_h - 9\lambda|\delta T\varphi|^2_h.\end{aligned}$$

On conclut en intégrant par partie.

5.2.3 Démonstration du théorème 5.6

Posons $\varphi := \mathrm{Id}_M$, alors $\varphi^{(2)} = 0$ d'après (3.3), $\varphi^{(4)} = \frac{3}{20} d\,\mathrm{Scal}$ d'après (3.2) et (7.4), et avec (3.5), on obtient :

$$144H = [(\nabla_{\partial_r\tilde{\varphi}})^4 \delta T\tilde{\varphi}]_{r=0} + [(\nabla_{\partial_r\tilde{\varphi}})^4 \delta^{g_r} T\varphi]_{r=0} - 2(\mathrm{tr}\, g'')\varphi^{(4)}.$$

Le premier terme s'exprime facilement en termes de courbures de (M, g) :

$$[(\nabla_{\partial_r\tilde{\varphi}})^4 \delta^g T\tilde{\varphi}]_{r=0} = \frac{3}{20}(\Delta - \mathrm{Ric}) d\,\mathrm{Scal}\,. \tag{5.3}$$

Comme $g'''' = \frac{3}{2} g'' \circ g'' - 3\,B$, le deuxième terme s'écrit avec (7.4) :

$$[(\nabla_{\partial_r\tilde{\varphi}})^4 \delta^{g_r} T\varphi]_{r=0} = \frac{3}{2}\delta(g'' \circ g'') + 3\delta\, B + \frac{3}{4} d(\mathrm{tr}\, g'' \circ g''),$$

or $g'' = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ric} + \frac{1}{20}\,\mathrm{Scal}\, g$ et $\delta(\mathrm{Ric} \circ \mathrm{Ric}) = -\frac{1}{2} d\,\mathrm{Scal} \circ \mathrm{Ric} - \mathrm{tr}(\nabla_{\mathrm{Ric}}\, \mathrm{Ric})$, ainsi

$$\begin{aligned} [(\nabla_{\partial_r\tilde{\varphi}})^4 \delta^{g_r} T\varphi]_{r=0} = -\Big(\frac{9}{400}\,\mathrm{Scal}\, g + \frac{9}{80}\,\mathrm{Ric}\Big)(d\,\mathrm{Scal}) - \frac{3}{8}\,\mathrm{tr}(\nabla_{\mathrm{Ric}}\, \mathrm{Ric}) \\ + 3\delta\, B + \frac{3}{16} d|\,\mathrm{Ric}\,|^2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Finalement, avec (5.3) et (5.4), on obtient :

$$144H = \frac{3}{20}\Big(\Delta + \frac{5}{20}\,\mathrm{Scal}\, g - \frac{7}{4}\,\mathrm{Ric}\Big) d\,\mathrm{Scal} - \frac{3}{8}\,\mathrm{tr}(\nabla_{\mathrm{Ric}}\, \mathrm{Ric}) + 3\delta\, B + \frac{3}{16} d(|\,\mathrm{Ric}\,|^2),$$

ce qui donne l'équation de C-harmonicité annoncée.

D'après l'égalité (4.1), on obtient en dimension 6 :

$$\mathcal{E}^6_g(\mathrm{id}) = \frac{4}{3}\int_M [\partial_r^4(|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,g}\,\mathrm{dvol}_{g_r})]_{r=0}.$$

Comme les dérivées premières et troisièmes de g_r et $\tilde{\varphi}$ par rapport à r s'annulent pour $r = 0$, on obtient pour le terme sous l'intégrale :

$$[\partial_r^4(|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,g})]_{r=0}\,\mathrm{dvol}_g + 6[\partial_r^2(|T\tilde{\varphi}|^2_{g_r,g})\partial_r^2(\mathrm{dvol}_{g_r})]_{r=0} + 6[\partial_r^4(\mathrm{dvol}_{g_r})]_{r=0}.$$

Le dernier terme est égale à $(3\,\mathrm{tr}\, g'''' - 9\,\mathrm{tr}\, g'' \circ g'' + \frac{9}{2}(\mathrm{tr}\, g'')^2)\,\mathrm{dvol}_g$ et comme $\mathrm{tr}\, g'''' = \frac{3}{2}\,\mathrm{tr}\, g'' \circ g''$, on a bien $\mathcal{E}^6_g(\mathrm{id}) = \frac{2}{25}\int_M \mathrm{Scal}^2\,\mathrm{dvol}_g$.

6 Un exemple d'application C-harmonique non-trivial

6.1 Situation

Nous avons défini une nouvelle famille d'applications entre deux variétés riemanniennes. La question qui se pose ici est de comparer cette nouvelle notion d'harmonicité avec celle, déjà préexistante en dimension supérieure.

Nous avons déjà vu, avec la proposition 3.7, que si la variété de départ est une variété d'Einstein de dimension paire, alors les applications harmoniques sont C-harmoniques. D'autre part, il existe aussi des applications harmoniques qui ne sont pas C-harmoniques, il suffit de prendre l'identité d'une variété riemannienne de dimension 4 munie d'une métrique à courbure scalaire non-constante (voir le corollaire 5.4). Comme l'harmonicité n'est pas une notion qui est covariante conforme en dimension plus grande que 2, contrairement à la C-harmonicité, il existe beaucoup d'applications C-harmoniques, qui ne soient pas harmoniques.

La question naturelle qui se pose, est donc l'existence d'une application C-harmonique, qui ne soit pas simplement non-harmonique pour une métrique particulière, mais qui ne soit pas harmonique pour toute la classe conforme considérée pour la C-harmonicité.

6.2 Énoncé

Notre stratégie est de partir d'une variété (M, h) de dimension 4 à courbure scalaire constante strictement négative. On a vu que dans ce cas là, l'identité est une application harmonique et C-harmonique (corollaire 5.4). On suppose que h est proche d'une métrique d'Einstein, et on va montrer que fixer la métrique h dans la variété d'arrivée et déformer judicieusement la métrique de la variété de départ, permet de construire une application proche de l'identité qui conserve la C-harmonicité, mais qui n'est plus harmonique, pour n'importe quel changement conforme petit ou grand de métrique, par rapport à la variété de départ.

On note $\mathcal{M}^{k,\alpha}$ l'espace des métriques riemanniennes $C^{k,\alpha}$ de M, $\mathcal{A}^{k,\alpha}$ l'espace des applications $C^{k,\alpha}$ de M dans M et $\Gamma^{k,\alpha}$ l'espace des sections $C^{k,\alpha}$ de $\varphi^* TM$, ce sont des espaces de Banach.

On peut maintenant énoncer notre résultat d'existence d'une application C-harmonique non-triviale :

Théorème 6.1 *Soit (M, g_e) une variété d'Einstein de dimension 4 à courbure scalaire strictement négative, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour toute métrique lisse h vérifiant $\|h - g_e\|_{k+4,\alpha} < \epsilon$, il existe φ une application C^∞ de M dans M et g une métrique C^∞, telles que :*

(i) $\|g - g_e\|_{k+4,\alpha} < \epsilon$,
(ii) *φ est C-harmonique de $(M, [g])$ dans (M, h),*
(iii) *quelque soit ω dans $C^{k+4,\alpha}$, φ n'est pas harmonique de $(M, e^{2\omega} g)$ dans (M, h).*

La démonstration du théorème se fait en quatre étapes.

1. On prouve grâce au théorème des fonctions implicites, que pour n'importe quelle métrique g suffisamment proche de h, il existe une unique application $\varphi(g)$

https://doi.org/10.4153/CJM-2012-034-8 Published online by Cambridge University Press

qui soit à la fois proche de l'identité et C-harmonique de $(M,[g])$ dans (M,h) (lemme 6.2).

2. Grâce encore au théorème des fonctions implicites, on montre que pour n'importe quelle métrique g suffisamment proche de h, il existe un unique changement conforme $\omega(g)$ qui soit à la fois petit et qui soit solution d'une équation plus faible que l'harmonicité de $\varphi(g)$ de $(M,e^{2\omega}g)$ dans (M,h) (lemme 6.3).
3. On construit une telle métrique g de façon à ce que l'application $\varphi(g)$ ne soit pas harmonique de $(M,e^{2\omega}g)$ dans (M,h), pour de petits changements conforme ω.
4. On montre finalement avec le lemme 6.4, que cette application $\varphi(g)$ n'est pas non plus harmonique de $(M,e^{2\omega}g)$ dans (M,h), pour de grands changements conforme ω.

6.3 Démonstration du théorème 6.1

6.3.1 Déformation de l'équation de conforme-harmonicité

Nous allons montrer comment obtenir des applications C-harmoniques qui sont proches de l'identité, quand on se place suffisamment près d'une métrique d'Einstein à courbure scalaire négative.

Soient g et h deux métriques dans $\mathcal{M}^{k+3,\alpha}$ et φ dans $\mathcal{A}^{k+4,\alpha}$, on note :

$$\mathrm{P}^4(\varphi,g,h) := \delta d\delta T\varphi + \delta\Big(\frac{2}{3}\operatorname{Scal}^g - 2\operatorname{Ric}^g\Big)T\varphi - \mathrm{S}^h(\delta T\varphi),$$

ainsi $\mathrm{P}^4(\varphi,g,h)=0$ est la condition de C-harmonicité de φ entre $(M,[g])$ et (M,h) et P^4 s'interprète comme une généralisation de l'opérateur de Paneitz aux applications de (M,g) dans (N,h).

On veut construire des applications C-harmoniques proches de l'identité en faisant varier la métrique g. Le lemme suivant nous donne l'existence d'un opérateur qui permet d'associer à chaque métrique g proche d'une métrique h particulière, l'unique application qui va être à la fois proche de l'identité et C-harmonique. Pour alléger les notations, on notera φ cet opérateur.

Lemme 6.2 *On se donne g_e une métrique d'Einstein à courbure scalaire strictement négative, alors le problème implicite*

$$\mathrm{P}^4\big(\varphi(g),g,h\big) = 0$$

admet une unique solution locale.

Il existe un voisinage V_e de g_e dans $\mathcal{M}^{k+3,\alpha}$, un voisinage V_{id} de id_M dans $\mathcal{A}^{k+4,\alpha}$, un opérateur φ continue de V_e dans V_{id} qui dépend continument de h, et tel que pour tout $(\psi,g,h)\in V_{\mathrm{id}}\times V_e^2$, on a $\mathrm{P}^4\big(\varphi(g),g,h\big)=0$ si et seulement si $\psi=\varphi(g)$.

Démonstration L'opérateur P^4 est continu de $\mathcal{A}^{k+4,\alpha}(M)\times\big(\mathcal{M}^{k+3,\alpha}(M)\big)^2$ dans $\Gamma^{k,\alpha}(M)$ et s'annule en (id,g_e,g_e). On obtient avec (7.5) pour sa différentielle par rapport aux applications au point (id,g_e,g_e) dans la direction $\dot\varphi$:

$$\frac{\partial\,\mathrm{P}^4}{\partial\varphi}(\dot\varphi) = \Big(\delta d - \frac{\operatorname{Scal}^e}{12}\Big)\Big(\delta d - \frac{\operatorname{Scal}^e}{4}\Big)\dot\varphi,$$

où Scal^e est la courbure scalaire de g_e. Comme celle-ci elle strictement négative, alors $\frac{\partial \mathrm{P}^4}{\partial \varphi}$ est inversible et on applique le théorème des fonctions implicites. ■

6.3.2 Contrôle local du changement conforme

Nous allons montrer qu'on contrôle le seul changement conforme local, qui puisse rendre harmonique notre application C-harmonique précédemment construite.

Soient φ une application $\mathcal{A}^{k+4,\alpha}$ et ω une fonction $C^{k+3,\alpha}$, on désigne par $\mathrm{P}^2(\omega, \varphi, g, h)$ le laplacien de φ de $(M, e^{2\omega} g)$ dans (M, h), on obtient facilement avec l'égalité de Bianchi :

$$\mathrm{P}^4(\varphi, g, h) = \Big(\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal}^g - \mathrm{S}^h\Big)\,\mathrm{P}^2(0, \varphi, g, h) + \frac{1}{3}\langle d\,\mathrm{Scal}^g, T\varphi\rangle + 2\langle \mathrm{Ric}^g, \nabla T\varphi\rangle.$$

Pour contrôler localement le changement conforme, on utilise encore une fois le théorème des fonctions implicites, mais si on l'applique directement à P^4, la courbure de M va être incompatible avec les hypothèses du lemme 6.2. On ajoute alors un terme correctif Q à P^4 qui va nous permettre d'utiliser le théorème des fonctions implicites avec les bonnes conditions de courbures. Soit $\overline{g} = e^{2\omega} g$, on pose :

$$\begin{aligned} Q(\omega, \varphi, g, h) &:= \mathrm{P}^4(\varphi, \overline{g}, h) - (\delta^{\overline{g}} d - \mathrm{S}^h)\,\mathrm{P}^2(\omega, \varphi, g, h) \\ &= \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal}^{\overline{g}}\,\mathrm{P}^2(\omega, \varphi, g, h) + \frac{1}{3}\langle d\,\mathrm{Scal}^{\overline{g}}, T\varphi\rangle_{\overline{g}} + 2\langle \mathrm{Ric}^{\overline{g}}, \nabla^{\overline{g}} T\varphi\rangle_{\overline{g}}, \end{aligned}$$

ainsi Q est un opérateur de degré 3 en ω, d'ordre 2 en φ, d'ordre 3 en g et d'ordre 1 en h. Le fait qu'une application φ soit harmonique de $(M, \overline{g})$ dans (M, h) et C-harmonique de $(M, [g])$ dans (M, h) est donc équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} Q(\omega, \varphi, g, h) = 0, \\ \mathrm{P}^2(\omega, \varphi, g, h) = 0. \end{cases}$$

Soit g et h deux métriques dans V_e, on va s'intéresser aux changements conformes ω qui vérifient la sous-condition d'harmonicité suivante :

$$\delta\,\mathrm{P}^2\big(\omega, \varphi(g), g, h\big) = 0, \tag{6.1}$$

où δ désigne la divergence par rapport à g. Le lemme suivant nous donne l'existence d'un opérateur qui permet d'associer pour chaque métrique g proche de h, l'unique changement conforme à une constante près, qui va être à la fois proche de 0 et solution de (6.1). On peut remarquer que l'on aurait pu travailler avec la condition $\delta Q\big(\omega, \varphi(g), g, h\big) = 0$, qui est aussi naturelle et qui donne les mêmes résultats. On note ω cet opérateur, qui contrôle donc localement le changement conforme, dans le sens où si l'application $\varphi(g)$ est harmonique pour un petit changement conforme de g, alors nécessairement ce changement conforme sera égale à $\omega(g)$.

Lemme 6.3 *On se donne g_e une métrique d'Einstein à courbure scalaire strictement négative, alors le problème implicite*

$$\delta\,\mathrm{P}^2\big(\omega(g),\varphi(g),g,h\big) = 0$$

admet une unique solution locale.

Il existe un voisinage $V'_e \subset V_e$ de g_e dans $\mathcal{M}^{k+4,\alpha}$, un voisinage V_0 de la fonction nulle dans $C^{k+4,\alpha}$, un opérateur ω continue de V'_e dans V_0 qui dépend continument de h, et tel que pour tout $(\Omega,g,h) \in V_0 \times (V'_e)^2$ avec $\int_M \Omega = 0$, on a $\delta\,\mathrm{P}^2\big(\Omega,\varphi(g),g,h\big) = 0$ si et seulement si $\Omega = \omega(g)$.

Démonstration Comme $\delta\,\mathrm{P}^2(\omega + cste,\varphi,g,h) = 0$ est équivalent à $\delta P^2(\omega,\varphi,g,h) = 0$, le contrôle de ω se fait à une constante près, qu'on fixe en imposant que l'intégrale du changement conforme soit nulle sur M par rapport à g. Au point $(0,\mathrm{id},g_e,g_e)$, l'opérateur $\delta\,\mathrm{P}^2$ s'annule et sa différentielle par rapport aux changements conformes qui sont d'intégrale nulle sur M par rapport à g_e est inversible. En effet, on obtient dans la direction $\dot\omega$ et au point $(0,\mathrm{id},g_e,g_e)$:

$$\frac{\partial\delta\,\mathrm{P}^2}{\partial\omega}(\dot\omega) = -2\Delta_e\dot\omega.$$

On conclut en appliquant le théorème des fonctions implicites. ■

Le seul changement conforme local qui puisse rendre notre application $\varphi(g)$ harmonique est maintenant contrôlé par notre application ω.

6.3.3 Construction de notre contre-exemple

Nous savons maintenant contrôler le seul changement conforme local qui pourrait rendre harmonique notre application C-harmonique précédemment construite en déformant la métrique de départ. On va montrer ici que les équations sont trop rigides, c'est-à-dire qu'il existe au moins une déformation pour laquelle l'application et le changement conforme qui lui sont associés ne vérifient pas la condition d'harmonicité.

Soit $\tilde Q$ l'opérateur défini de $\mathcal{M}^{k+4}$ dans $\Gamma^{k+1,\alpha}$ de la façon suivante,

$$\tilde Q(g) := Q\big(\omega(g),\varphi(g),g,h\big),$$

où g est une métrique de V'_e, on se donne $\dot g$ dans S^2TM et $(g_t)_{t\in[0,1]}$ une famille de métriques de W vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} g_0 = h, \\ [\partial_t g_t]_{t=0} = \dot g. \end{cases}$$

Nous allons montrer que si l'on choisit bien $\dot g$, il existe s dans $[0,1]$ tel que la métrique g_s n'annule pas $\tilde Q$. Pour cela, on va calculer la différentielle extérieure de la variation infinitésimale de $\tilde Q$ dans la direction $\dot g$ au point $(0,\mathrm{id},h,h)$ et montrer que celle-ci est non-nulle. Commençons par calculer la variation infinitésimale de Q au point $(0, \mathrm{id}, h, h)$, on obtient dans la direction $\dot\omega$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega}(\dot\omega) = 2d\Delta\dot\omega - 4\operatorname{Ric} d\dot\omega,$$

dans la direction $\dot\varphi$ avec les formules (7.2) et (7.1) :

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi}(\dot\varphi) = \frac{2}{3}\operatorname{Scal}(\delta d - \operatorname{Ric})\dot\varphi + 2\langle \operatorname{Ric}, \nabla d\dot\varphi + \mathrm{R}_{\dot\varphi,\cdot}\,\cdot\rangle,$$

et dans la direction $\dot g$ avec les formules (7.4), (7.3) et [5, 1.174.e)] :

$$\frac{\partial Q}{\partial g}(\dot g) = -\frac{1}{3}\operatorname{Scal}(2\delta\dot g + d\operatorname{tr}\dot g) + \frac{1}{3}\big(d\Delta(\operatorname{tr}\dot g) + d\delta\delta\dot g - d\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle\big) - \langle \operatorname{Ric}, 2\delta^*\dot g - \nabla\dot g\rangle,$$

où les termes Scal, Ric, δ, Δ ainsi que les traces et les produits scalaires sont donnés par rapport à h, et δ^* désigne l'adjoint de la divergence δ. Ce qui donne pour la variation infinitésimale de $\tilde Q$ au point h dans la direction $\dot g$:

$$\begin{aligned} T_h\tilde Q(\dot g) = 2d\Delta T\omega(\dot g) - 4\operatorname{Ric} dT\omega(\dot g) + \frac{2}{3}\operatorname{Scal}(\delta d - \mathrm{S})T\varphi(\dot g) \\ + 2\langle \operatorname{Ric}, \nabla dT\varphi(\dot g) + \mathrm{R}_{\varphi(\dot g),\cdot}\,\cdot\rangle - \frac{1}{3}\operatorname{Scal}(2\delta\dot g + d\operatorname{tr}\dot g) \\ + \frac{1}{3}\big(d\Delta(\operatorname{tr}\dot g) + d\delta\delta\dot g - d\langle \operatorname{Ric}, \dot g\rangle\big) - \langle \operatorname{Ric}, 2\delta^*\dot g - \nabla\dot g\rangle, \end{aligned}$$

comme $T\omega$ et $T\varphi$ sont respectivement d'ordre 0 et -1 en $\dot g$, alors $T\tilde Q$ est donc d'ordre 3 en $\dot g$. On calcule sa différentielle extérieure, qu'on note $dT\tilde Q(\dot g)$, pour supprimer les termes d'ordre 2 et 3, il ne restera que les termes d'ordre 1 (qui seront des termes d'ordre 2 dans la différentielle extérieure) :

$$dT\tilde Q(\dot g) = A(\dot g) + B(\dot g) + C(\dot g) + \text{des termes d'ordre inférieurs},$$

avec

$$\begin{aligned} A(\dot g) &= -4d\big(\operatorname{Ric} dT\omega(\dot g)\big), \\ B(\dot g) &= d\langle \operatorname{Ric}, 2\nabla dT\varphi(\dot g) - 2\delta^*\dot g + \nabla\dot g\rangle, \\ C(\dot g) &= \frac{2}{3}\operatorname{Scal} d\big(\delta dT\varphi(\dot g) - \delta\dot g\big). \end{aligned}$$

On va prouver que $dT\tilde Q$ n'est pas trivialement nul en montrant que son symbole n'est pas nul dans une certaine direction. Pour cela, on calcule le symbole de $T\varphi$ et de $T\omega$, on obtient au point (id, h, h) avec les formules (7.5) et (7.6) :

$$\sigma_{T\varphi}(X) = \frac{1}{|X|^2}\dot g(X) - \frac{\operatorname{tr}\dot g}{6|X|^2}X - \frac{\dot g(X,X)}{3|X|^4}X,$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2012-034-8 Published online by Cambridge University Press

et ensuite au point $(0, \mathrm{id}, h, h)$:

$$\sigma_{T\omega}(X) = -\frac{1}{6}\Big(\operatorname{tr}\dot g - \frac{\dot g(X,X)}{|X|^2}\Big).$$

On remarque que les symboles de A et B sont d'ordre 2 si la métrique h n'est pas Einstein et que celui de C est d'ordre inférieur, plus précisément on a :

$$\sigma_A(X) = \frac{2}{3}\Big(\operatorname{tr}\dot g - \frac{\dot g(X,X)}{|X|^2}\Big) X \wedge \operatorname{Ric}(X),$$

$$\sigma_B(X) = \frac{2\operatorname{Ric}(X,X)}{|X|^2} X \wedge \dot g(X) - 2X \wedge \dot g\big(\operatorname{Ric}(X)\big).$$

Comme la métrique h ne satisfait pas la condition d'Einstein, il existe Y, Z dans TM et α un nombre réel tels que $|Y|_h^2 = 1$, $\operatorname{Ric}(Y) = \alpha Y + Z$ et $h(Y,Z) = 0$. Soit $\dot g$ une déformation qui vérifie $\operatorname{tr}\dot g = 0$, $\dot g(Y) = Y$ et $\dot g(Z) = Z$, alors le symbole de $dT\tilde Q$ est non nul, puisque

$$\sigma_{dT\tilde Q}(Y) = \sigma_A(Y) + \sigma_B(Y) = -\frac{8}{3} Y \wedge Z.$$

Cela implique que $T\tilde Q$ n'est pas nul dans la direction $\dot g$, or $\tilde Q(g_0) = \tilde Q(h) = 0$, donc il existe g_s telle que $\tilde Q(g_s)$ ne soit pas nul, ce qui prouve que $\varphi(g_s)$ n'est pas harmonique pour aucun petit changement conforme à g_s.

6.3.4 Le changement conforme est local

Supposons que $\varphi(g)$ est harmonique de $(M, e^{2f}g)$ dans (M,h), alors on va montrer que si g est suffisamment proche de h, alors on peut supposer que f est petit.

Lemme 6.4 *Quelque soit $\lambda > 0$, il existe un réel μ strictement positif qui vérifie la propriété suivante ; quelque soit la métrique g vérifiant $\|g-h\|_{k+4,\alpha} < \mu$, alors s'il existe une fonction f de classe $C^{k+4,\alpha}$ qui satisfait*

$$\mathrm{P}^2(\varphi(g), e^{2f}g, h) = 0,$$

alors il existe une fonction ω de classe $C^{k+4,\alpha}$ qui satisfait

$$\mathrm{P}^2\big(\varphi(g), e^{2\omega}g, h\big) = 0 \quad et \quad \|\omega\|_{k+4,\alpha} < \lambda.$$

Démonstration Soit $\lambda > 0$ et f une fonction $C^{k+4,\alpha}$, par continuité il existe $\mu > 0$ tel que pour toute métrique g vérifiant $\|g-h\|_{k+4,\alpha} < \mu$, alors

$$\|df\|_{k+3,\alpha} - \|\langle df, T\varphi(g)\rangle_g\|_{k+3,\alpha} \le \frac{\lambda}{2\big(\operatorname{diam}(M)+1\big)},$$

$$\big\|\,\mathrm{P}^2\big(\varphi(g), g, h\big)\,\big\|_{k+3,\alpha} \le \frac{\lambda}{\operatorname{diam}(M)+1},$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2012-034-8 Published online by Cambridge University Press

Si f vérifie la condition du lemme alors $\mathrm{P}^2\big(\varphi(g), g, h\big) = 2\langle df, T\varphi(g)\rangle_g$, et on obtient avec ce qui précède :

$$\|df\|_{k+3,\alpha} \le \frac{\lambda}{\operatorname{diam}(M)+1}.$$

Fixons x_0 un point de M et posons $\omega := f - f(x_0)$, d'après les inégalités des accroissements finis, on a :

$$\|\omega\|_\infty \le \operatorname{diam}(M)\|d\omega\|_{k+3,\alpha}.$$

D'autre part, $\|\omega\|_{k+4,\alpha} = \|\omega\|_\infty + \|d\omega\|_{k+3,\alpha}$, ainsi on obtient

$$\|\omega\|_{k+4,\alpha} \le \big(1+\operatorname{diam}(M)\big)\,\|d\omega\|_{k+3,\alpha},$$

ce qui clôt la preuve, vu que $df = d\omega$ et que $\mathrm{P}^2\big(\varphi(g), e^{2\omega}g, h\big) = 0$. ■

6.3.5 Conclusion

On reprend les notations du lemme 6.3. On a un voisinage V_e' de g_e dans $\mathcal{M}^{k+4,\alpha}$ et un voisinage V_0 de la fonction nulle dans $C^{k+4,\alpha}$. Il existe alors deux nombres réels λ et R, strictement positifs, et tels que la boule B_λ dans $C^{k+4,\alpha}$ de centre la fonction nulle et de rayon λ et la boule B_R dans $\mathcal{M}^{k+4,\alpha}$ de centre g_e et de rayon R vérifient $\omega(B_R) \subset B_\lambda \subset V_0$. Soit $\varepsilon < R$ un nombre réel strictement positif et h une métrique fixée de V_e', non Einstein, de courbure scalaire constante égale à celle de g_e et vérifiant

$$\|h - g_e\|_{k+4,\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On se donne une métrique g qui vérifie $\|g-h\|_{k+4,\alpha} < \min(\mu, \epsilon/2)$, où μ est défini par le lemme 6.4 et on suppose qu'il existe un changement conforme f tel que l'application $\varphi(g)$ est harmonique de $(M, e^{2f}g)$ dans (N, h). La métrique g vérifie

$$\|g - g_e\|_{k+4,\alpha} < \|g-h\|_{k+4,\alpha} + \|h-g_e\|_{k+4,\alpha} < \varepsilon,$$

et comme $\|g-h\|_{k+4,\alpha} < \mu$, alors le changement conforme ω du lemme 6.4 est dans B_λ. De plus la métrique g est dans B_R, alors $\omega = \omega(g)$ à une constante près d'après le lemme 6.3. On vient donc de montrer que pour de telles métriques g, le problème global se résume au problème local.

7 Formules de variations au premier ordre

Dans la suite on utilisera la convention suivante ; on va indicer par h les termes qui se réfèrent à h et ne rien mettre pour ceux qui se réfèrent à g.

Proposition 7.1 *Avec les notations précédentes, on obtient pour les déformations infinitésimales par rapport aux applications au point* $(0, \varphi, g, h)$ *:*

$$\frac{\partial \nabla T}{\partial \varphi}(\dot\varphi) = \nabla d\dot\varphi + \mathrm{R}^h_{\dot\varphi, T\varphi}\, T\varphi, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial\, \mathrm{P}^2}{\partial \varphi}(\dot\varphi) = (\delta d - \mathrm{S}^h)(\dot\varphi), \tag{7.2}$$

et par rapport à la métrique de départ au point $(0, \varphi, g, h)$ *:*

$$\frac{\partial \nabla T\varphi}{\partial g}(\dot g) = -\langle T\varphi, \delta^* \dot g - \frac{1}{2}\nabla \dot g\rangle, \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial\, \mathrm{P}^2}{\partial g}(\dot g) = -\delta\big(\dot g(T\varphi)\big) \;-\; \frac{1}{2}\langle d\,\mathrm{tr}\,\dot g, T\varphi\rangle, \tag{7.4}$$

où $\delta^*\dot g$ *est défini de la manière suivante :*

$$\delta^*\dot g(X,Y,Z) := \frac{1}{2}\big(\nabla_X \dot g(Y,Z) + \nabla_Y \dot g(X,Z)\big)\,.$$

Démonstration On note $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ une famille à 1-paramètre d'applications de M dans N, vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi, \\ [\partial_t\varphi_t]_{t=0} = \dot\varphi. \end{cases}$$

On munit $M\times[0,1]$ de la métrique $\gamma = g+dt^2$ et on pose Φ l'application de $M\times[0,1]$ dans N définie par $\Phi(p,t) = \varphi_t(p), \forall(p,t)\in M\times[0,1]$. On note $\nabla^{\gamma,h}$ la connexion de Levi–Civita du fibré $\Omega(M)\otimes\Phi^*TN$ et on se donne deux vecteurs X et Y de TM, alors :

$$\begin{aligned}
&\nabla^h_{\partial_t\varphi_t}\big((\nabla^{\gamma,h}_X T\varphi_t)Y\big)\\
&\quad= \nabla^h_{T\varphi_t(X)}\big((\nabla^{\gamma,h}_{\partial_t} T\varphi_t)Y\big) \;+ \mathrm{R}^h_{\partial_t\varphi_t,T\varphi_t(X)}\, T\varphi_t(Y) - \nabla^h_{\partial_t\varphi_t}\big(T\varphi_t(\nabla^g_X Y)\big)\\
&\quad= \nabla^h_{T\varphi_t(X)}\big((\nabla^{\gamma,h}_{Y} T\varphi_t)\partial_t\big) \;+ \mathrm{R}^h_{\partial_t\varphi_t,T\varphi_t(X)}\, T\varphi_t(Y) - \nabla^h_{\partial_t\varphi_t}\big(T\varphi_t(\nabla^g_X Y)\big)\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne bien les deux premières égalités. Les deux dernières se montrent au moyen de la formule [5, 1.174.a]. ■

Proposition 7.2 *Avec les notations précédentes,* $n = 4$ *et en supposant que la courbure scalaire de h est constante, on obtient au point* (id, h, h) *:*

$$\frac{\partial\, \mathrm{P}^4}{\partial \varphi}(\dot\varphi) = \Big(\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric}\Big)\,(\delta d - \mathrm{Ric})\dot\varphi + 2\langle \mathrm{Ric}, \nabla d\dot\varphi + \mathrm{R}_{\dot\varphi,T\varphi}\, T\varphi\rangle, \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, \mathrm{P}^4}{\partial g}(\dot g) = &-\Big(\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric}\Big)\,\Big(\delta\dot g + \frac{1}{2}d\,\mathrm{tr}\,\dot g\Big) \;+\; \frac{1}{3}(d\Delta\,\mathrm{tr}\,\dot g + d\delta\delta\dot g)\\
&-\frac{1}{3}d\langle \mathrm{Ric}, \dot g\rangle - \langle \mathrm{Ric}, 2\delta^*\dot g - \nabla\dot g\rangle.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Démonstration Avec l'identité de Bianchi, on obtient

$$\mathrm{P}^4(\varphi,g,h) = \Big(\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - \mathrm{S}^h\Big)\;\mathrm{P}^2(0,\varphi,g,h) + \frac{1}{3}\langle d\,\mathrm{Scal}, T\varphi\rangle_g + 2\langle \mathrm{Ric}, \nabla T\varphi\rangle_g,$$

on montre alors facilement la première égalité avec (7.2) et (7.1), et la deuxième avec (7.4), [5, 1.174.e] et (7.3). ■

Références

[1] P. Albin, *Renormalizing curvature integrals on Poincaré–Einstein manifolds.* Adv. Math. **221**(2009), 140–169. http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2008.12.002

[2] M. T. Anderson, *L^2 curvature and volume renormalization of AHE metrics on 4-manifolds.* Math. Res. Lett. **8**(2001), 171–188.

[3] P. Baird and D. Kamissoko, *On constructing biharmonic maps and metrics.* Ann. Global Anal. Geom. **23**(2003), 65–75. http://dx.doi.org/10.1023/A:1021213930520

[4] V. Bérard, *Un analogue conforme des applications harmoniques.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346**(2008), 985–988. http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2008.06.008

[5] A. L. Besse, *Einstein manifolds.* Ergeb. Math. Grenzgeb. **10**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[6] O. Biquard and F. Madani, *A construction of C-harmonic maps.* Preprint. arxiv:1112.6130v1[math.DG].

[7] S.-Y. A. Chang, L. Wang, and P. C. Yang, *A regularity theory of biharmonic maps.* Comm. Pure Appl. Math. **52**(1999), 1113–1137. http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0312(199909)52:9⟨1113::AID-CPA4⟩3.0.CO;2-7

[8] Z. Djadli, C. Guillarmou, and M. Herzlich, *Opérateurs géométriques, invariants conformes et variétés asymptotiquement hyperboliques*. Société Mathématique de France, Paris, 2008.

[9] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds.* Amer. J. Math. **86**(1964), 109–160. http://dx.doi.org/10.2307/2373037

[10] J. Eells and J. C. Wood, *Restrictions on harmonic maps of surfaces.* Topology **15**(1976), 263–266. http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(76)90042-2

[11] C. Fefferman and C. R. Graham, *Conformal invariants.* In : The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984), Astérisque **1985**, Numero Hors Serie, 95–116.

[12] A. R. Gover, *Laplacian operators and Q-curvature on conformally Einstein manifolds.* Math. Ann. **336**(2006), 311–334. http://dx.doi.org/10.1007/s00208-006-0004-z

[13] C. R. Graham, *Volume and area renormalizations for conformally compact Einstein metrics.* In : The Proceedings of the 19th Winter School "Geometry and Physics" (Srní, 1999), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **63**(2000), 31–42.

[14] ———, *Conformal powers of the Laplacian via stereographic projection.* SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **3**, 2007, Paper 121.

[15] C. R. Graham, R. Jenne, L. J. Mason and G. A. J. Sparling, *Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence.* J. London Math. Soc. **46**(1992), 557–565. http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s2-46.3.557

[16] C. R. Graham and K. Hirachi, *The ambient obstruction tensor and Q-curvature.* In : AdS/CFT correspondence : Einstein metrics and their conformal boundaries, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. **8**(2005), 59–71.

[17] C. R. Graham and J. M. Lee, *Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball.* Adv. Math. **87**(1991), 186–225. http://dx.doi.org/10.1016/0001-8708(91)90071-E

[18] C. R. Graham and M. Zworski, *Scattering matrix in conformal geometry.* Invent. Math. **152**(2003), 89–118. http://dx.doi.org/10.1007/s00222-002-0268-1

[19] T. Lamm, *Biharmonic map heat flow into manifolds of nonpositive curvature.* Calc. Var. Partial Differential Equations **22**(2005), 421–445. http://dx.doi.org/10.1007/s00526-004-0283-8

[20] S. Montaldo and C. Oniciuc, *A short survey on biharmonic maps between Riemannian manifolds.* Rev. Un. Mat. Argentina **47**(2006), 1–22.

Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier, UMR 5149 CNRS–Université Montpellier II
e-mail: vberard@math.univ-montp2.fr