Compositio Math. 142 (2006) 169–206
doi:10.1112/S0010437X05001880

# Fonctions $L$ associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes

Daniel Caro

Abstract

We prove that holonomic arithmetical $\mathcal{D}$-modules over curves have finite fibers. We also define L-functions associated with arithmetical $\mathcal{D}$-modules and, when the scheme is a curve, we show a cohomological formula. Furthermore, we prove that $F$-isocrystals over curves are holonomic.

## Introduction

Soient $q = p^s$ une puissance d'un nombre premier et $K$ un corps de valuation discrète complet de caractéristique zéro, d'anneau de valuation $\mathcal{V}$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, d'uniformisante $\pi$ et de corps résiduel $k = \mathbb{F}_q$. On notera $\mathcal{S} = \operatorname{Spf}\mathcal{V}$ et pour tout entier $i$, $S_i := \operatorname{Spec}\mathcal{V}/\mathfrak{m}^{i+1}$.

On se donne $Y$ un $k$-schéma séparé, lisse de dimension pure $d_Y$, $F$ la puissance $s$-ième de l'endomorphisme de Frobenius absolu de $Y$. Si $E$ est un $F$-isocristal surconvergent sur $Y$, on notera $E^\vee$ son dual, $H^r_{\mathrm{rig}}(Y, E^\vee)$ son $r$-ième espace de cohomologie rigide et $F^{-1}_{|H^r_{\mathrm{rig}}(Y,E^\vee)}$ l'inverse de son automorphisme de Frobenius. Avec ces notations, après avoir défini les fonctions $L$ associées aux $F$-isocristaux surconvergents sur $Y/K$ (voir [ÉL93]), Étesse et Le Stum ont établi la formule cohomologique suivante.

Théorème Étesse–Le Stum. *Soit $E$ un $F$-isocristal surconvergent sur $Y$. On a alors l'égalité*

$$L(Y, E, t) = \prod_{r=0}^{2d_Y} \det{}_K(1 - tq^{d_Y} F^{-1}_{|H^r_{\mathrm{rig}}(Y,E^\vee)})^{(-1)^{r+1}}.$$

Or, de manière analogue au fait qu'un $\mathbb{Q}_p$-faisceau lisse sur $Y$ se prolonge en un $\mathbb{Q}_p$-faisceau constructible sur une compactification $X$ de $Y$, lorsque $X$ se relève en un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, un $F$-isocristal surconvergent sur $Y$ se prolonge en un $F$-$\mathcal{D}$-module arithmétique sur $X$ (qui est holonome si la conjecture de Berthelot [Ber02, 5.3.6.D] est vérifiée).

Le présent article tend à généraliser le théorème d'Étesse et Le Stum ci-dessus, en remplaçant la notion de $F$-isocristaux surconvergents par celle de $F$-$\mathcal{D}$-modules arithmétiques holonomes. Précisons à présent son contenu.

On désigne par $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse de réduction $X$ sur $k$, $d_X$ la dimension de $X$, $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{V}$ son morphisme structural, $T$ un diviseur de $X$ de complémentaire $Y$, $\mathfrak{Y}$ le $\mathcal{V}$-schéma formel ouvert de $\mathfrak{X}$ d'espace sous-jacent $Y$. De plus, si $y$ est un point fermé de $Y$, on désignera par $k(y)$ le corps résiduel de $y$, $\deg y$ son degré, $i_y : \operatorname{Spf}\mathcal{V}(y) \hookrightarrow \mathfrak{X}$ un relèvement $\mathcal{V}$-linéaire de la $k$-immersion fermée canonique $\operatorname{Spec} k(y) \hookrightarrow X$.

Received 30 January 2003, accepted in final form 11 July 2005.
*2000 Mathematics Subject Classification* 14F10, 14F30, 14F40, 13D07, 13D25, 13N10, 32C38.
*Keywords:* L-function, arithmetical $\mathcal{D}$-modules, isocrystal, Frobenius, holonomicity.
L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE HPRN-CT-2000-00120) ainsi que de celui de l'Université de Sydney.

On construit une sous-catégorie pleine, $F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$, de la catégorie des complexes de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)$-modules à gauche munis d'une structure de Frobenius et à cohomologie cohérente (définition 2.2.1). On demande surtout aux complexes $(\mathcal{E},\ \Phi)$ de cette catégorie d'être à fibres finies, i.e., pour tout point fermé $y$ de $Y$, les espaces de cohomologie des fibres en $y$, $i^{+}_{y,T}(\mathcal{E})$, sont des $K$-espaces vectoriels de dimension finie. De tels complexes seront appelés complexes *pseudo-holonomes*.

Le choix de cette catégorie remplaçant celle des complexes holonomes résulte du fait que l'on ne sait pas encore que cette dernière est stable par image inverse extraordinaire (voir la conjecture de Berthelot [Ber02, 5.3.6.B]). En outre, il est essentiel de comprendre que celle-ci est l'analogue en caractéristique $p$ de la catégorie des complexes de $\mathcal{D}_Y$-modules à gauche à cohomologie bornée et holonome, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_Y)$, $X$ jouant le rôle d'une compactification de $Y$.

Une des conjectures standards de Berthelot sur la préservation de l'holonomie par les opérations cohomologiques (énoncée dans [Ber02, 5.3.6.B]) implique que la catégorie des complexes pseudo-holonomes est la même que celle des complexes holonomes (cela est prouvé dans [Car04b]). Nous démontrerons cette identification lorsque $\mathfrak{X}$ est une courbe (corollaire 2.3.4). En d'autres termes, si $\mathfrak{X}$ est une courbe, les foncteurs cohomologiques locaux à support strict dans un sous-schéma fermé de $X$ préservent l'holonomie.

Ensuite, on définit la fonction $L$ associée à $(\mathcal{E},\ \Phi) \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ en posant :

$$L(\mathfrak{Y},\mathcal{E},t) = \prod_{y\in Y^0}\prod_{r\in\mathbb{Z}} \det_K(1 - t^{\deg y} F^{\deg y}{}_{|H^r(i^{+}_{y,T}(\mathcal{E}))})^{(-1)^{r+1+d_X}/\deg y}.$$

De plus, nous construisons l'image directe extraordinaire de $\mathcal{E}$ par $f$, que l'on note $f_{T,!}(\mathcal{E})$, en munissant ses espaces de cohomologie d'une action de Frobenius, notée $F_{|H^r(f_{T,!}\mathcal{E})}$. La fonction cohomologique associée à $\mathcal{E}$ se définit alors en posant :

$$P(\mathfrak{Y},\mathcal{E},t) := \prod_{r\in\mathbb{Z}} \det_K(1 - tF_{|H^r(f_{T,!}\mathcal{E})})^{(-1)^{r+1+d_X}}.$$

Nous conjecturons ensuite l'égalité entre ces deux fonctions : $L(\mathfrak{Y},\mathcal{E},t) = P(\mathfrak{Y},\mathcal{E},t)$.

Le résultat central de cet article est la preuve de cette conjecture lorsque $\mathfrak{X}$ est une courbe. Voici une esquisse de celle-ci. On se ramène par dévissage au cas où $\mathcal{E}$ est associé à un $F$-isocristal surconvergent (via l'équivalence de catégorie théorème 2.2.12). Puis, on établit que les fonctions $L$ et cohomologiques définies dans [ÉL93] des $F$-isocristaux surconvergents sont compatibles avec celles des $\mathcal{D}$-modules qui leur sont associés. Le théorème d'Étesse et Le Stum ci-dessus nous permet alors de conclure.

Toujours lorsque $\mathfrak{X}$ est une courbe, on termine ce travail par la démonstration d'une conjecture énoncée par Berthelot [Ber02, 5.3.6.D]. En particulier, nous prouvons que les $F$-isocristaux surconvergents sur les courbes sont holonomes.

### Convention

- Nous conserverons les notations et hypothèses du premier paragraphe de l'introduction.
- Sauf mention explicite du contraire, tous les modules seront des modules à gauche.
- Si $X$ est un $k$-schéma, $F_X$, ou tout simplement $F$, désignera la puissance $s$-ième de l'endomorphisme de Frobenius absolu de $X$.
- Si $X$ est un schéma ou schéma formel, on écrira $d_X$ pour la dimension de Krull de $X$. De plus, si $f : X' \to X$ est un morphisme de schémas ou de schémas formels, on définit $d_{X'/X} := d_{X'} - d_X$.
- Si $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, on notera $f_i : X'_i \to X_i$, la réduction de $f$ modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$. De plus, si aucune confusion n'est à craindre, on écrira $X := X_0$.

De même, si $f : X' \to X$ est un morphisme de $S_i$-schémas et $i' \leqslant i$, $f_{i'} : X'_{i'} \to X_{i'}$ sera la réduction modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$ de $f$.

- Si $\mathcal{E}$ est un faisceau abélien sur un espace topologique, $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ signifiera le faisceau $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\widehat{\mathcal{E}}$ le complété pour la topologie $p$-adique.
- Si $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel et $\mathcal{E}$ est un complexe de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules sur $\mathfrak{X}$, le dual $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire de $\mathcal{E}$ sera noté $\mathcal{E}^{\vee}$.
- Soient $X$ un schéma ou $\mathcal{V}$-schéma formel, et $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur $X$. Si $*$ est l'un des symboles $\emptyset$, $+$, $-$, ou b, $D^*(\mathcal{A})$ désigne la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-modules (à gauche) vérifiant les conditions correspondantes d'annulation des faisceaux de cohomologie. Lorsque l'on souhaitera préciser entre droite et gauche, on notera alors $D^*({}^g\mathcal{A})$ ou $D^*(\mathcal{A}^d)$. Conformément aux notations et définitions de [SGA6, 4.8,5.2], on désignera par $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{A})$ (respectivement $D_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{A})$, $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes à cohomologie cohérente et bornée (respectivement les complexes de Tor-dimensions finies, les complexes parfaits). Enfin, nous désignerons par $D^*_{\mathrm{qc}}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $D^*(\mathcal{A})$ formée des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont $\mathcal{A}$-quasi-cohérents (voir [Ber02, 3.2.1] pour la définition sur les schémas formels).
- Les diviseurs seront toujours des diviseurs de Cartier de $k$-schémas lisses.

## 1. Cohomologie d'un complexe de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

### 1.1 Sur les opérations cohomologiques

1.1.1. Désignons par $X$ un $S_i$-schéma lisse ou un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse. Rappelons que Berthelot construit pour tout entier positif $m$ le « faisceau des opérateurs différentiels de niveau $m$ sur $X$ » qu'il note $\mathcal{D}^{(m)}_X$ (voir [Ber96a, 2]). Si $T$ est un diviseur de $X_0$, il construit aussi des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-algèbres commutatives $\mathcal{B}^{(m)}_X(T)$, munis d'une structure compatible de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche [Ber96a, 4.2.3]. Si $U$ est un ouvert de $X$ tel qu'il existe une section $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ relevant une équation locale de $T$ dans $X_0$ alors $\mathcal{B}^{(m)}_X(T)|U$ est isomorphe à $\mathcal{O}_U[T]/(f^{p^{m+1}}T - p)$. On notera $\mathcal{D}^{(m)}_X(T) := \mathcal{B}^{(m)}_X(T) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X$.

1.1.2. Dans la suite de cette section, on se donne un morphisme $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, un diviseur $T$ de $X$ (respectivement $T'$ un diviseur de $X'$) tel que l'immersion fermée $f^{-1}(T) \hookrightarrow X'$ se factorise par $T' \hookrightarrow X'$. On note alors $\mathfrak{Y}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentaire de $T$ (respectivement $\mathfrak{Y}'$ l'ouvert de $\mathfrak{X}'$ complémentaire de $T'$).

Comme $f^{-1}(T) \subset T'$, $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'_i}$, où $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ sont respectivement définis par $T \hookrightarrow X_i$ et $T' \hookrightarrow X'_i$. D'où le morphisme canonique $f^{-1}\mathcal{B}^{(m)}_{X_i}(T) \to \mathcal{B}^{(m)}_{X'_i}(T')$. Le faisceau $\mathcal{B}^{(m)}_{X'_i}(T') \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} f_i^*\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$ est donc muni d'une structure de $(\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T'), f_i^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T))$-bimodule. Ce bimodule sera noté $\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}(T', T)$. Il en dérive par complétion le $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}(T'), f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T))$-bimodule : $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}(T', T) := \varprojlim_i \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}(T', T)$.

On rappelle que

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}}$$

est le « faisceau des fonctions sur $\mathfrak{X}$ à singularités surconvergentes le long de $T$ » (voir [Ber96a, 4.2.4]).

De plus,

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}}$$

désigne le « faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini, à singularités surconvergentes le long de $T$ » (voir [Ber96a, 4.2.5]).

De façon analogue, on notera

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}({}^\dagger T', T)_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}(T', T)_{\mathbb{Q}}.$$

Le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}({}^\dagger T', T)_{\mathbb{Q}}$ est par construction muni d'une structure canonique de $(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger T')_{\mathbb{Q}}, f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$-bimodule.

1.1.3. On note $\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T) := (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T))_{m\in\mathbb{N}}$. En localisant deux fois $D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$ (ces localisations remplacent respectivement les foncteurs $-\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ et « limite inductive sur le niveau $m$ »), on obtient $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$ (voir [Ber02, 4.2.1 et 4.2.2] et [Car02, 2.3]). Sa sous-catégorie pleine des complexes quasi-cohérents se note $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$ (voir [Ber02, 4.2.3] et [Car02, 2.3]). De manière analogue à [Ber02, 4.2.2], on dispose du foncteur $\varinjlim : \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T)) \to D(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Celui-ci induit une équivalence de catégorie entre $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ et une sous-catégorie pleine de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$, noté $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$ (voir [Ber02, 4.2.4]).

*Remarques* 1.1.4. D'après [Ber96a, 4.2.3 et 4.2.4], pour tout entier $N \geqslant 0$, on a l'égalité : $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(p^N T) = \widehat{\mathcal{B}}^{(m+N)}_{\mathfrak{X}}(T)$. On obtient $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(p^N T)\widehat{\otimes}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} = \widehat{\mathcal{B}}^{(m+N)}_{\mathfrak{X}}(T)\widehat{\otimes}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$. En tensorisant par $\mathbb{Q}$ puis en passant à la limite sur le niveau $m$, il en dérive que le morphisme canonique $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger p^N T)_{\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme. Or, en notant $T_{\mathrm{red}}$, le sous-schéma réduit induit par $T$, il existe un entier $N$ tel que $T_{\mathrm{red}} \hookrightarrow T \hookrightarrow p^N T_{\mathrm{red}} \hookrightarrow p^N T$. On en déduit que le morphisme canonique $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_{\mathrm{red}})_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme.

En ce qui concerne la construction du $(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger T')_{\mathbb{Q}}, f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$-bimodule $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}({}^\dagger T', T)_{\mathbb{Q}}$, on peut alors affaiblir l'hypothèse « l'immersion fermée $f^{-1}(T) \hookrightarrow X'$ se factorise par $T' \hookrightarrow X'$ » en la remplaçant par la suivante : « $f(\mathcal{Y}') \subset \mathcal{Y}$, i.e., le morphisme $f$ induit un morphisme $\mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$ ». En effet, cette dernière hypothèse implique $(f^{-1}(T))_{\mathrm{red}} \hookrightarrow T'$. Comme il existe un entier $N$ tel que $f^{-1}(T) \hookrightarrow p^N(f^{-1}(T))_{\mathrm{red}}$, il en résulte que $f^{-1}(T) \hookrightarrow p^N T'$. On peut donc construire le $(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger p^N T')_{\mathbb{Q}}, f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$-bimodule $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}({}^\dagger p^N T', T)_{\mathbb{Q}}$. Mais, comme $T'_{\mathrm{red}} = (p^N T')_{\mathrm{red}}$, ce bimodule est aussi un $(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger T')_{\mathbb{Q}}, f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$-bimodule et il sera alors noté $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}({}^\dagger T', T)_{\mathbb{Q}}$ .

1.1.5. Noot-Huyghe [NH04] a prouvé que le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est de dimension cohomologique finie. Comme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est aussi cohérent [Ber96a, 5.4], on obtient $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) = D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$.

1.1.6. Rappelons à présent quelques opérations cohomologiques dont on se servira ainsi que quelques propriétés fondamentales. Comme introduction, on pourra consulter [Ber02] (on suppose alors que $T'$ et $T$ sont vides).

- Pour $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, Berthelot définit son « image inverse extraordinaire » en posant (voir [Ber02, 4.3.2]) :

$$f^!_{T',T}(\mathcal{E}) := \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}({}^\dagger T', T)_{\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} f^{-1}\mathcal{E}[d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}]. \tag{1.1.6.1}$$

  En outre, si $f$ est lisse alors $f^!_{T',T}(\mathcal{E}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger T')_{\mathbb{Q}})$.

- Le $(f^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T),\ \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T'))$-bimodule $\mathcal{B}^{(m)}_{X'_i}(T') \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} (\omega_{X'_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} f^*_g(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \omega^{-1}_{X_i}))$, où l'indice $g$ signifie que l'on choisit la structure gauche de $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$-module à gauche, sera noté $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i}(T,T')$. On obtient le $(f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}},\, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger T')_{\mathbb{Q}})$-bimodule

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}\leftarrow\mathfrak{X}'}({}^\dagger T,T')_{\mathbb{Q}} := \varinjlim_m \Big( \varprojlim_i \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}(T',T)\Big)_{\mathbb{Q}}.$$

- Pour $\mathcal{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger T')_{\mathbb{Q}})$, Berthelot construit alors son « image directe » en posant (voir [Ber02, 4.3.7]) :

$$f_{T,T',+}(\mathcal{E}') := \mathbb{R}f_*(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}\leftarrow\mathfrak{X}'}({}^\dagger T,T')_{\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger T')_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'). \tag{1.1.6.2}$$

  Si $f$ est propre et $T' = f^{-1}(T)$ alors $f_{T,T',+}(\mathcal{E}') \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$.

- $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$, Virrion définit son « foncteur dual » (voir [Vir00]) en posant :

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}) := \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}[d_{\mathfrak{X}}]). \tag{1.1.6.3}$$

  Comme $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) = D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ (§ 1.1.5), $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$.

- Si $T_1 \subset T_2$ sont deux diviseurs de $X$ et $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}})$, on notera

$$({}^\dagger T_2, T_1)(\mathcal{E}) := \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_2)_{\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}. \tag{1.1.6.4}$$

Lorsque cela aura un sens, on notera alors respectivement $f^+_{T',T} := \mathbb{D}_{\mathfrak{X}',T'} \circ f^!_{T',T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}$ et $f_{T,T',!} := \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ f_{T,T',+} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}',T'}$ « l'image inverse » et « l'image directe extraordinaire ».

Pour toutes les opérations cohomologiques définies ci-dessus, lorsque $T = \emptyset$ (respectivement $T_1 = \emptyset$), on omettra d'indiquer $T$ (respectivement $T_1$). De même, si $T' = f^{-1}T$, on oubliera l'indice $T'$.

Si $Z$ est un sous-schéma fermé de $X$, nous noterons $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z$ « le foncteur cohomologique local à support strict dans $Z$ » (voir [Ber02, 4.4.4]). Comme cela est expliqué de façon implicite dans [Ber02, 5.3.6], lorsque $Z$ est un diviseur, pour tout $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, on dispose du triangle distingué de localisation :

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E}) \to \mathcal{E} \to ({}^\dagger Z)(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E})[1]. \tag{1.1.6.5}$$

1.1.7. Comme dans [Ber02, 4.3], les opérations cohomologiques définies ci-dessus, sauf pour le foncteur dual, peuvent être étendues à $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$. Précisons ceci. Pour tous $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T))$ et $\mathcal{M} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}\ (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)^d)$, on pose

$$\mathcal{M}_i := \mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T), \quad \mathcal{E}_i := \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)} \mathcal{E},$$
$$\mathcal{M}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)} \mathcal{E} := \mathbb{R}\varprojlim_i(\mathcal{E}_i \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}^{(m)}_{X_i}(T)} \mathcal{M}_i), \quad \mathcal{M}\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)} \mathcal{E} := \mathbb{R}\varprojlim_i(\mathcal{E}_i \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T)} \mathcal{M}_i).$$

Pour tous diviseurs $T_1 \subset T_2$ de $X$ et tout $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T_1))$, on définit

$$({}^\dagger T_2,\, T_1)(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T_2)\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T_1)} \mathcal{E}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} =: \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_2)_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)}.$$

Il découle de la remarque [Ber96a, 2.3.5.(iii)], l'isomorphisme :

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_2)_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)} := (\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T_2)\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T_1)} \mathcal{E}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_2)_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(\bullet)}. \tag{1.1.7.1}$$

Pour tous $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$ et $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}(T'))$, on écrit

$$f^!_{T',T}(\mathcal{E}^{(\bullet)}) := (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}(T',T)\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)} f^{-1}\mathcal{E}^{(m)}[d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}])_{m\in\mathbb{N}} =: \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}(T',T) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}(T)} f^{-1}\mathcal{E}^{(\bullet)}[d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}],$$
$$f_{T,T',+}(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) := (\mathbb{R}f_*(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\leftarrow\mathfrak{X}'}(T,T')\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}(T')} \mathcal{E}'^{(m)}))_{m\in\mathbb{N}} =: \mathbb{R}f_*(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}\leftarrow\mathfrak{X}'}(T,T') \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'}(T')} \mathcal{E}'^{(\bullet)}).$$



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

Le composé

$$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_1)_{\mathbb{Q}}) \xleftarrow[\cong]{\lim} \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}_1}(T_1)) \xrightarrow{({}^{\dagger}T_2,\,T_1)} \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T_2)) \xrightarrow{\lim} D(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_2)_{\mathbb{Q}})$$

est le foncteur $({}^{\dagger}T_2,\,T_1)$ de (1.1.6.4). On dispose de la propriété similaire pour l'image directe et l'image inverse extraordinaire. Le triangle de localisation (1.1.6.5) reste valable dans $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}})$. Enfin, on désignera par $oub_T$, le foncteur oubli : $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T)) \to \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}})$, de même pour les complexes cohérents.

1.1.8. Soient $T_1 \subset T_2$ deux diviseurs de $X$. On dispose de l'isomorphisme $({}^{\dagger}T_2,\,T_1) \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}T_2) \circ oub_{T_1}$ de foncteurs $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T_1)) \to \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T_2))$.

En effet, comme $({}^{\dagger}T_2,\,T_1) \circ ({}^{\dagger}T_1) \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}T_2)$, on remarque qu'il suffit de le vérifier pour $T_2 = T_1$, i.e., de prouver $Id \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}T_1) \circ oub_{T_1}$. Cela résulte aussitôt des isomorphismes canoniques :

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_1)_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\,\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_1)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_1)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\,\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_1)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_1)_{\mathbb{Q}},$$

le dernier isomorphisme résultant de [Ber96b] et de [Ber96a, 4.3.12.(ii)].

Ainsi, le foncteur oubli $oub_{T_1}$ est pleinement fidèle puisque le foncteur $({}^{\dagger}T_1)$ fournit un foncteur quasi-inverse de l'image essentielle de $oub_{T_1}$ dans $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T_1))$. Mais, lorsque $T_1$ n'est pas vide, $oub_{T_1}$ n'est absolument pas essentiellement surjectif ($\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\,\mathbb{Q}}$ n'est pas dans son image essentielle car le morphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\,\mathbb{Q}} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_1)_{\mathbb{Q}}$ n'est pas un isomorphisme).

PROPOSITION 1.1.9. *Soient $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}})$ et $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}(T'))$. On a les isomorphismes canoniques $oub_T \circ f_{T,T',+}(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f_+ \circ oub_{T'}(\mathcal{E}'^{(\bullet)})$ et $({}^{\dagger}T') \circ f^!(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f^!_{T',T} \circ ({}^{\dagger}T)(\mathcal{E}^{(\bullet)})$.*

*Démonstration.* Par construction, il suffit de les vérifier au niveau des schémas. Traitons en premier l'image inverse extraordinaire. Comme $\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}$ est $\mathcal{O}_{X'_i}$-plat, via [Ber96a, 2.3.5.(iii)], $\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}(T',T)$. D'où :

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}} (\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}} f^{-1}\mathcal{E}^{(m)}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}(T',T) \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T)} f^{-1}(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}} \mathcal{E}^{(m)}_i).$$

Passons à présent à l'image directe. Par [Car05, 1.2.5], on a l'isomorphisme de $(f^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$, $\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T'))$-bimodules :

$$\omega_{X'_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} (\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T') \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}} f^*_g(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \omega^{-1}_{X_i})) \xrightarrow{\sim} (\omega_{X'_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} f^*_g(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \omega^{-1}_{X_i})) \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T').$$

Comme $\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T') \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}} (\omega_{X'_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} -) \xrightarrow{\sim} \omega_{X'_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} (\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T') \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}} -)$, il en résulte l'isomorphisme de gauche

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i}(T,T') \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T) \xleftarrow{\sim} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T), \tag{1.1.9.1}$$

celui de droite découlant de la $\mathcal{O}_{X'_i}$-platitude de $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i}$.

En appliquant $\mathbb{R}f_*(- \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T')} \mathcal{E}'^{(m)}_i)$ à (1.1.9.1), on obtient

$$\mathbb{R}f_*(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i}(T,T') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}(T')} \mathcal{E}'^{(m)}_i) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_*(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i \leftarrow X'_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}} \mathcal{E}'^{(m)}_i). \qquad \square$$

Proposition 1.1.10. *Soient* $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$ *et* $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'})$. *On suppose* $T' = f^{-1}(T)$. *On dispose alors d'isomorphismes canoniques :* $oub_{T'} \circ f^!_T(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f^! \circ oub_T(\mathcal{E}^{(\bullet)})$ *et* $({}^\dagger T) \circ f_+(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f_{T+} \circ ({}^\dagger T')(\mathcal{E}'^{(\bullet)})$.

*Démonstration.* Traitons d'abord l'image inverse extraordinaire. D'après la proposition 1.1.9, $f^!_T \circ ({}^\dagger T) \xrightarrow{\sim} ({}^\dagger T') \circ f^!$ De plus, par [Car04a, 2.2.18.1], on dispose de l'isomorphisme $({}^\dagger T') \circ f^! \xrightarrow{\sim} f^! \circ ({}^\dagger T)$. Enfin, comme le morphisme canonique $\mathcal{E}'^{(\bullet)} \to ({}^\dagger T) \circ oub_T(\mathcal{E}'^{(\bullet)})$ est un isomorphisme (voir § 1.1.8), il en découle l'isomorphisme $oub_{T'} \circ f^!_T(\mathcal{E}'^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f^! \circ oub_T(\mathcal{E}'^{(\bullet)})$.

De même, la proposition concernant l'image directe découle de [Car04a, 2.2.18.2] et de § 1.1.8. □

*Remarques* 1.1.11. On remarque que, comme $T$ et $T'$ sont des diviseurs de $X$ et $X'$, l'isomorphisme $({}^\dagger T') \circ f^! \xrightarrow{\sim} f^! \circ ({}^\dagger T)$ se prouve directement (sans passer par l'étude du foncteur cohomologique local de [Car04a]). En effet, on a les isomorphismes

$$\begin{aligned} f^!({}^\dagger T)(\mathcal{E}) &\xrightarrow{\sim} f^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} f^!\mathcal{E}[-d_{X'/X}] \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger T')_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} f^!\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} ({}^\dagger T') f^!(\mathcal{E}), \end{aligned}$$

où le premier et le dernier s'obtiennent grâce à (1.1.7.1), les deux autres se vérifiant au niveau des schémas.

## 1.2 Actions de Frobenius sur la cohomologie

Sauf mention explicite du contraire, on gardera les notations et hypothèses suivantes. On désigne par $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, $T$ un diviseur de $X$ tel que $T' := f^{-1}(T)$ soit un diviseur de $X'$.

1.2.1. Comme le morphisme de Frobenius relatif (par rapport à $S$) de $X$ se relève localement, via la remarque $(i)$ du théorème [Ber00, 4.2.4] de Berthelot, on obtient par recollement un foncteur, noté $F^*$ (car localement isomorphisme à l'image inverse par un relèvement de $F : X \to X$), de la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)$-modules à gauche dans elle-même. Ce foncteur est en outre une autoéquivalence de catégorie.

1.2.2. Le foncteur image inverse extraordinaire commute à Frobenius, i.e., on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$\theta_{f,T} \;:\; F^* \circ f^!_T \xrightarrow{\sim} f^!_T \circ F^*, \tag{1.2.2.1}$$

de foncteurs $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T)) \to \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}(T'))$.

Soient $g : \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ et $h : \mathfrak{X}''' \to \mathfrak{X}''$ deux morphismes propres de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, tels que $T'' := g^{-1}(T')$ (respectivement $T''' := h^{-1}(T'')$) soit un diviseur de $X''$ (respectivement $X'''$). On dispose d'un isomorphisme canonique $g^!_{T'} \circ f^!_T \xrightarrow{\sim} (f \circ g)^!_T$ vérifiant la condition d'associativité : les deux isomorphismes $h^!_{T''} g^!_{T'} f^!_T \xrightarrow{\sim} h^!_{T''}(f \circ g)^!_T \xrightarrow{\sim} (f \circ g \circ h)^!_T$ et $h^!_{T''} g^!_{T'} f^!_T \xrightarrow{\sim} (g \circ h)^!_{T'} f^!_{T''} \xrightarrow{\sim} (f \circ g \circ h)^!_T$ sont identiques. En effet, l'isomorphisme $g^!_{T'} \circ f^!_T \xrightarrow{\sim} (f \circ g)^!_T$ se construit de manière analogue à (1.2.2.1). De plus, pour l'associativité, il suffit de le voir au niveau des schémas $X_i$. Or, en oubliant la structure différentielle, les deux isomorphismes (de la condition d'associativité) sont identiques comme morphismes $\mathcal{B}^{(m)}_{X'''_i}(T''')$-linéaires. Or, le foncteur oubli de la catégorie des $\mathcal{D}^{(m)}_{X'''_i}(T''')$-modules quasi-cohérents dans celle des $\mathcal{B}^{(m)}_{X'''_i}(T''')$-modules quasi-cohérents est fidèle (mais non pleinement fidèle). Il s'en suit que ceux-ci sont bien identiques.

On vérifie de la même manière que les isomorphismes de la forme $\theta_{f,T}$ sont compatibles à la composition. Plus précisément, via l'isomorphisme $g^!_{T'} \circ f^!_T \xrightarrow{\sim} (f \circ g)^!_T$, l'isomorphisme $(g^!_{T'}\theta_{f,T}) \circ (\theta_{g,T'} f^!_T)$ s'identifie à $\theta_{f\circ g,T}$. Enfin, en omettant les foncteurs oublis, les isomorphismes $({}^\dagger T') \circ f^! \xrightarrow{\sim} f^!_T \circ ({}^\dagger T)$ (proposition 1.1.9), $({}^\dagger T') \circ f^! \xrightarrow{\sim} f^! \circ ({}^\dagger T)$ (voir [Car04a, 2.2.18.1]) et $f^!_T \xrightarrow{\sim} f^!$ (proposition 1.1.10) sont compatibles à Frobenius.

1.2.3. Virrion construit dans [Vir04] un morphisme d'adjonction entre l'image directe et l'image inverse extraordinaire pour une catégorie de complexes $\widetilde{D}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. Le problème est que l'on ne sait pas (sauf lorsque $T$ est vide) si celle-ci est égale à $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. Comme nous ne travaillons qu'avec cette dernière catégorie, nous allons éviter d'avoir recours à la catégorie $\widetilde{D}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. Pour cela, il suffit de reprendre la méthode de Virrion [Vir04] afin de l'énoncer dans le cadre qui nous sera utile.

*Notations* 1.2.4. Pour tout entier $m$, on note $\widetilde{\omega}^{(m)}_{\mathfrak{X}} := \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} := \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}} := \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}(T') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}$ et $\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}} := \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} := \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}(T') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. Si un diviseur est vide, on omettra de l'indiquer.

Proposition 1.2.5. *Avec les Notations 1.2.4, il existe dans* $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T)^d)$ *un morphisme naturel de trace :*

$$f_{T,+}(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'})[d_{X'}] := \mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}})[d_{X'}] \to \widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}[d_X].$$

*Démonstration.* En faisant varier $m$, il dérive de [Vir04, III.7.1] le morphisme trace

$$f_+(\omega^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'})[d_{X'}] := \mathbb{R}f_*(\omega^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{D}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}})[d_{X'}] \to \omega^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}[d_X]. \tag{1.2.5.1}$$

Si $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}})$, le passage de gauche à droite se traduit par l'isomorphisme

$$\omega^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} f_+(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} f_+(\omega^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{E}^{(\bullet)}), \tag{1.2.5.2}$$

qui est toujours valable en rajoutant des diviseurs. D'après [Car04a, 2.2.18.2], le foncteur restriction $({}^\dagger T) = -\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T)$ commute à l'image directe pour les complexes quasi-cohérents de $\mathcal{D}$-modules à gauche. Grâce à (1.2.5.2), le foncteur $({}^\dagger T)$ (toujours égal à $-\widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T)$) commute à l'image directe pour les complexes quasi-cohérents de $\mathcal{D}$-modules à droite. En appliquant $({}^\dagger T)$ à (1.2.5.1), il en résulte un morphisme

$$f_+(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'})[d_{X'}] = \mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{D}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}})[d_{X'}] \to \widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}[d_X].$$

L'isomorphisme canonique $f_{T,+}(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}) \xrightarrow{\sim} f_+(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'})$ (proposition 1.1.9 et passage de gauche à droite) nous permet de conclure. □

*Remarques* 1.2.6. En appliquant $\varinjlim$ à la proposition 1.2.5, on obtient dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)^d)$, via [Ber02, 4.3.7], le morphisme trace $f_{T,+}(\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}'})[d_{X'}] \to \widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}}[d_X]$. Par passage de droite à gauche, il en dérive un morphisme trace $f_{T,+}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger T')[d_{X'}]) \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)[d_X]$.

Théorème 1.2.7. *Soit* $\mathcal{E}' \in D_{\mathrm{parf}}({}^*\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger T'))$, *avec* $* = g$ *ou* $d$. *Il existe alors dans* $D_{\mathrm{parf}}({}^*\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ *un isomorphisme canonique :*

$$f_{T,+} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}',T'}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ f_{T,+}(\mathcal{E}'), \tag{1.2.7.1}$$

*dit « isomorphisme de dualité relative ».*



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

*Démonstration.* Par passage de droite à gauche, contentons-nous de traiter le cas où $* = d$. Notons $\widetilde{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} := \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}} := \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ (de même en rajoutant des primes). De manière analogue à la preuve de [Vir04, IV.1.3] :

$$\begin{aligned} f_{T,+} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}',T'}(\mathcal{E}') &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_* \left(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}', \widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}\right)[d_{X'}] \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}', \widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}})[d_{X'}] \\ &\to \mathbb{R}f_* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{f^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}, (\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}})[d_{X'}] \\ &\to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}}(\mathbb{R}f_*(\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}), \mathbb{R}f_*((\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}))[d_{X'}]. \end{aligned} \tag{1.2.7.2}$$

Or, on bénéficie des flèches

$$\begin{aligned} \mathbb{R}f_*((\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) &\to \varinjlim \mathbb{R}f_*((\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \\ &\xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}). \end{aligned} \tag{1.2.7.3}$$

Il découle par complétion de l'isomorphisme de transposition [Ber00, 1.3.1], le suivant

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}$$

(par platitude et via la version faisceautique [BO78, 7.20] de Mittag–Leffler, l'indice $\mathbb{L}$ s'enlève). Il en dérive par fonctorialité :

$$\varinjlim \mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}_{\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}})). \tag{1.2.7.4}$$

Par complétion des isomorphismes $\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}(T) \otimes_{\mathcal{B}_{X'_i}(T)} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}(T) \xrightarrow{\sim} f_i^*(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T) \otimes^{gg}_{\mathcal{B}_{X_i}(T)} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T)) \overset{\gamma}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i \to X_i}(T) \otimes_{f_i^{-1}\mathcal{B}_{X_i}(T)} f_i^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T)$, où les indices « $g$ » signifient que l'on prend les structures gauche pour calculer le produit tensoriel et $\gamma$ est l'isomorphisme de transposition de $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(T)$ (voir [Ber00, 1.3.2.d]), on obtient

$$\varinjlim \mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}})) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}})). \tag{1.2.7.5}$$

On déduit par complétion des isomorphismes de projection sur les réductions modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$, le suivant

$$\varinjlim \mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}})) \xleftarrow{\sim} \varinjlim \mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}. \tag{1.2.7.6}$$

Il résulte du morphisme trace $\mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \to \widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}[-d_{X'/X}]$ de la proposition 1.2.5 :

$$\varinjlim \mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}) \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}} \to \varinjlim \widetilde{\omega}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{B}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}[-d_{X'/X}] \xrightarrow{\sim} \widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}[-d_{X'/X}]. \tag{1.2.7.7}$$

En composant (1.2.7.3), (1.2.7.4), (1.2.7.5) (1.2.7.6), (1.2.7.7), on obtient

$$\mathbb{R}f_*(\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}})[d_{X'}] \to \widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}[d_X]. \tag{1.2.7.8}$$

En appliquant $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}}(\mathbb{R}f_*(\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}), -)$ à (1.2.7.8) et en le composant avec (1.2.7.2), on obtient :

$$f_{T,+} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}',T'}(\mathcal{E}') \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}}(\mathbb{R}f_*(\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}}), \widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}})[d_X] \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ f_{T,+}(\mathcal{E}'). \tag{1.2.7.9}$$

Pour vérifier que (1.2.7.9) est un isomorphisme, d'après [Ber96a, 4.3.12.(ii)], il suffit de le voir au dessus de $\mathfrak{X}\setminus T$. Cela résulte alors du théorème analogue de Virrion [Vir04, IV.3.1] qui s'applique dans ce cas là (i.e. sans diviseur). $\square$

Lemme 1.2.8. *Soient $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}({}^{g}f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ et $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)^{d})$. Il existe alors un isomorphisme de projection*

$$\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)} \mathbb{R}f_{*}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_{*}(f^{-1}\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)} \mathcal{F}). \tag{1.2.8.1}$$

*Démonstration.* On procède comme pour [Har66, II.5.6]. $\square$

Théorème 1.2.9. *Soient $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'))$ et $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. Il existe alors un isomorphisme canonique d'adjonction fonctoriel en $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ :*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T,+}(\mathcal{F}),\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_{*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(\mathcal{F}, f^{!}_{T}(\mathcal{E})). \tag{1.2.9.1}$$

*Démonstration.* On procède comme pour [Vir04, IV.4.1] en utilisant le théorème 1.2.7 et l'isomorphisme de projection du lemme 1.2.8. $\square$

Corollaire 1.2.10. *Soient $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'))$ et $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. On dispose alors des isomorphismes canoniques d'adjonction fonctoriels en $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T,+}(\mathcal{F}),\mathcal{E}) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(\mathcal{F}, f^{!}_{T}(\mathcal{E})) \\ \mathrm{adj}_{f,T} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T,+}(\mathcal{F}),\mathcal{E}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(\mathcal{F}, f^{!}_{T}(\mathcal{E})), \end{aligned} \tag{1.2.10.1}$$

*où* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(-,-) := H^{0} \circ \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(-,-) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})}(-,-)$. *Si aucune confusion n'est à craindre, on notera plus simplement* $\mathrm{adj}_{f}$ *ou* adj.

*Démonstration.* Pour le premier isomorphisme, on applique $\mathbb{R}\Gamma(\mathfrak{X},-)$ à (1.2.9.1). On en déduit le second via $H^{0}$. $\square$

1.2.11. Berthelot construit, en toute généralité, un isomorphisme de commutation de l'image directe à Frobenius [Ber00, 3]. Mais, dans la pratique, nous n'aurons affaire qu'à des morphismes propres et lisses de $\mathcal{V}$-schémas formels propres et lisses (voir [Car04a, 3.2.9]). Pour les morphismes propres, nous allons redéfinir cet isomorphisme dans § 1.2.12. Le but de ce changement est d'obtenir automatiquement la compatibilité à Frobenius de l'isomorphisme d'adjonction entre l'image directe et l'image inverse extraordinaire (théorème 1.2.21). On obtient en outre la compatibilité à la composition de l'isomorphisme de commutation à Frobenius de l'image directe (proposition 1.2.17). On ne comparera pas ici les deux constructions et l'on utilisera exclusivement la nôtre (i.e. § 1.2.12). On peut néanmoins penser que celles-ci se rejoignent.

1.2.12. On définit de manière unique un isomorphisme fonctoriel en $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'))$ :

$$\rho_{f,T} \;:\; f_{T,+} \circ F^{*}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} F^{*} \circ f_{T,+}(\mathcal{F}) \tag{1.2.12.1}$$

comme étant le seul rendant commutatif, pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(\mathcal{F}, f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[r, "F^{*}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(F^{*}\mathcal{F}, F^{*} \circ f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(id,\theta_{f,T})", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(F^{*}\mathcal{F}, f^{!}_{T} \circ F^{*}\mathcal{E}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T,+}\mathcal{F}, \mathcal{E}) \arrow[u, "\mathrm{adj}", "\sim"'] \arrow[r, "F^{*}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(F^{*} \circ f_{T,+}\mathcal{F}, F^{*}\mathcal{E}) \arrow[u, "F^{*}\mathrm{adj}", "\sim"'] \arrow[r, dotted, "\mathrm{Hom}(\rho_{f,T},id)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T,+} \circ F^{*}\mathcal{F}, F^{*}\mathcal{E}) \arrow[u, "\mathrm{adj}", "\sim"'] \end{tikzcd} \tag{1.2.12.2}$$

où toutes les flèches sont des bijections (pour $F^{*}$, cela résulte de [Ber00, 4.2.4]).



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

En effet, avec $\mathcal{F}$ fixé, notons $\mathrm{Isom}_{\mathcal{E}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(F^* \circ f_{T,+}\mathcal{F}, F^*\mathcal{E}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T,+} \circ F^*\mathcal{F}, F^*\mathcal{E})$, l'unique bijection rendant commutatif le diagramme (1.2.12.2). On pose $\rho_{f,T} := \mathrm{Isom}_{f_{T,+}\mathcal{F}} \circ F^*(Id_{f_{T,+}\mathcal{F}}) : f_{T,+}F^*\mathcal{F} \rightarrow F^*f_{T,+}\mathcal{F}$. Il reste à vérifier que $\rho_{f,T}$ est un isomorphisme. Or, par fonctorialité en $\mathcal{E}$, pour tout morphisme $\phi : f_{T,+}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$, $\mathrm{Isom}_{\mathcal{E}} \circ F^*(\phi)$ est le morphisme composé : $f_{T,+}F^*\mathcal{F} \xrightarrow{\rho_{f,T}} F^* \circ f_{T,+}\mathcal{F} \xrightarrow{F^*(\phi)} F^*\mathcal{E}$. En outre, comme le foncteur $F^*$ induit une équivalence de catégorie, il existe un objet $\mathcal{E}_0$ de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ et un isomorphisme $\epsilon : f_{T,+}F^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{E}_0$. Il existe ainsi un unique morphisme $\phi_0 : f_{T,+}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}_0$ tel que $F^*(\phi_0) \circ \rho_{f,T} = \epsilon$. Or, en notant $\tau_{f,T} := \epsilon^{-1} \circ F^*(\phi_0) : F^*f_{T,+}\mathcal{F} \rightarrow f_{T,+}F^*\mathcal{F}$, il en découle : $\tau_{f,T} \circ \rho_{f,T} = Id_{f_{T,+}F^*\mathcal{F}}$. On en déduit : $\rho_{f,T}\circ\tau_{f,T}\circ\rho_{f,T} = \rho_{f,T}$ et donc $\rho_{f,T}\circ\tau_{f,T} = Id_{F^*f_{T,+}\mathcal{F}}$ (par injectivité de $\mathrm{Isom}_{f_{T,+}\mathcal{F}}\circ F^*$).

1.2.13. L'isomorphisme d'adjonction (1.2.10.1) nous fournit un morphisme $\mathrm{adj}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow f^!_T f_{T,+}(\mathcal{F})$ qui correspond, en prenant $\mathcal{E} = f_{T,+}(\mathcal{F})$ dans (1.2.10.1), à l'image par adj de l'identité de $f_{T,+}(\mathcal{F})$. On dispose du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, f^!_T, f_{T+}\mathcal{F}) \arrow[r, "F^*", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{F}, F^*f^!_T f_{T+}\mathcal{F}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{F}, f^!_T F^* f_{T+}\mathcal{F}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{F}, f^!_T f_{T+}F^*\mathcal{F}) \\
\mathrm{Hom}(f_{T+}\mathcal{F}, f_{T+}\mathcal{F}) \arrow[u, "\mathrm{adj}", "\sim"'] \arrow[r, "F^*", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(F^*f_{T+}\mathcal{F}, F^*f_{T+}\mathcal{F}) \arrow[u, "F^*\mathrm{adj}", "\sim"'] \arrow[r, "\sim"'] & \mathrm{Hom}(f_{T+}F^*\mathcal{F}, F^*f_{T+}\mathcal{F}) \arrow[u, "\mathrm{adj}", "\sim"'] \arrow[r, "\sim"'] & \mathrm{Hom}(f_{T+}F^*\mathcal{F}, f_{T+}F^*\mathcal{F}), \arrow[u, "\mathrm{adj}", "\sim"']
\end{tikzcd}$$

où la flèche de droite du haut est $\mathrm{Hom}(id, f^!_T\rho^{-1}_{f,T})$ et celle de droite en bas est $\mathrm{Hom}(id, \rho^{-1}_{f,T})$. En effet, les deux carrés de gauche sont commutatifs par construction de $\rho_{f,T}$ (diagramme (1.2.12.2)), tandis que celui de droite se vérifie par fonctorialité en $\mathcal{E}$ de l'isomorphisme d'adjonction $\mathrm{adj}_{f,T}$ (1.2.10.1). L'application $\mathrm{Hom}(f_{T+}\mathcal{F}, f_{T+}\mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{F}, f^!_T f_{T+}F^*\mathcal{F})$ induite par le chemin du bas, envoie l'identité sur $\mathrm{adj}_{F^*\mathcal{F}}$. La flèche $\mathrm{Hom}(f_{T+}\mathcal{F}, f_{T+}\mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{F}, F^*f^!_T f_{T+}\mathcal{F})$ envoie l'identité sur $F^*\mathrm{adj}_{\mathcal{F}}$. Il en résulte le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F^*\mathcal{F} \arrow[r, "F^*\mathrm{adj}_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, equal] & F^*f^!_T f_{T+}\mathcal{F} \arrow[d, "\sim"', "(f^!_T\rho^{-1}_{f,T})\circ(\theta_{f,T}f_{T,+})"] \\
F^*\mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{adj}_{F^*\mathcal{F}}"] & f^!_T f_{T+}F^*\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

En d'autres termes, le morphisme d'adjonction $\mathrm{adj}_{\mathcal{F}}$ est compatible à Frobenius.

Si $f$ est une immersion fermée, alors, pour tout $\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'))$, le morphisme d'adjonction $\mathrm{adj}_{\mathcal{F}}$ est un isomorphisme. En effet, le foncteur $f_{T,+}$ est alors pleinement fidèle (cela résulte de l'analogue arithmétique du théorème de Kashiwara [Ber02, 5.3.3] toujours valable avec des coefficients surconvergents [Car04a, 3.1.6]). Il en dérive une bijection fonctorielle en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'))$ : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \xrightarrow{f_{T,+}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T,+}\mathcal{F}', f_{T,+}\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathrm{adj}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(\mathcal{F}', f^!_T f_{T,+}\mathcal{F})$. En prenant $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, l'image par celle-ci de l'identité de $\mathcal{F}$, donne le morphisme d'adjonction $\mathrm{adj}_{\mathcal{F}}$. On vérifie alors que celui-ci est un isomorphisme. En effet, avec $\mathcal{F}' = f^!_T f_{T,+}\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'))$ (à nouveau grâce à l'analogue du théorème de Kashiwara), l'image inverse par cette bijection de l'identité de $f^!_T f_{T,+}\mathcal{F}$ fournit un inverse.

1.2.14. De même, si $f^!_T(\mathcal{E})$ est à cohomologie $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')$-cohérente (par exemple si $f$ est lisse ou si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)$-surcohérent [Car04a]), on dispose du morphisme d'adjonction $\mathrm{adj}_{\mathcal{E}} : f_{T,+}f^!_T(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$, qui correspond, en prenant $\mathcal{F} = f^!_T(\mathcal{E})$ dans (1.2.10.1), à l'image inverse par adj de l'identité de $f^!_T(\mathcal{E})$.



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

On vérifie alors, de manière analogue à § 1.2.13, que celui-ci est compatible à Frobenius, i.e., que le diagramme canonique suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} F^* f_{T+} f_T^! \mathcal{E} \arrow[r, "F^*\mathrm{adj}_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "(f_{T,+}\theta_{f,T})\circ(\rho_{f,T}^{-1})f_T^!"', "\sim"] & F^*\mathcal{E} \arrow[d, equal] \\ f_{T+} f_T^! F^* \mathcal{E} \arrow[r, "\mathrm{adj}_{F^*\mathcal{E}}"] & F^*\mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Si le morphisme $f$ est une immersion fermée, pour tout $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ et à support dans $X'$, le morphisme d'adjonction $\mathrm{adj}_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme. En effet, avec l'aide de l'analogue arithmétique du théorème de Kashiwara, pour tous complexes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ et à support dans $X'$, on obtient la suite de bijections :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)}(\mathcal{E},\mathcal{E}') \xrightarrow{f_T^!} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger T')}(f_T^!\mathcal{E}, f_T^!\mathcal{E}') \xrightarrow{\mathrm{adj}^{-1}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)}(f_{T,+}f_T^!\mathcal{E},\mathcal{E}').$$

L'image de l'identité de $\mathcal{E}$ par celle-ci donne le morphisme d'adjonction $\mathrm{adj}_{\mathcal{E}} : f_{T,+}f_T^!\mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Enfin, en prenant l'image inverse de l'identité de $f_{T,+}f_T^!\mathcal{E}$, on obtient un morphisme $\mathcal{E} \to f_{T,+}f_T^!\mathcal{E}$, qui donne un inverse à $\mathrm{adj}_{\mathcal{E}}$.

Toujours lorsque $f$ est une immersion fermée, on dispose d'un isomorphisme $f_{T,+} \circ f_T^! \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X'}$ de foncteurs de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$ dans elle-même. En effet, cela résulte de l'isomorphisme analogue sans $T$ (voir [Ber02, 4.4.5]) et des isomorphismes $f_T^! \xrightarrow{\sim} f^!$ (voir la proposition 1.1.10) et $f_+ \xrightarrow{\sim} f_{T,+}$ (proposition 1.1.9). Soit $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ et à support dans $X'$. Nous allons construire un tel isomorphisme pour $\mathcal{E}$, compatible au morphisme d'adjonction et à Frobenius. Pour cela, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f_{T,+} \circ f_T^! \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X'}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{adj}_{\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X'}(\mathcal{E})}"] \arrow[d] & \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X'}(\mathcal{E}) \arrow[d] \\ f_{T,+} \circ f_T^!(\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{adj}_{\mathcal{E}}"] & \mathcal{E}, \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes d'adjonction et celles verticales proviennent de la construction fonctorielle en $X'$ de la cohomologie locale à support strict dans $X'$.

Comme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X'}(\mathcal{E}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ et est à support dans $X'$, d'après ce que l'on vient de voir, le morphisme du haut est un isomorphisme. De plus, il découle de la fonctorialité en $X'$ de la commutation de la cohomologie locale avec l'image inverse extraordinaire (cela résulte de [Car04a, 2.2.17.1] et de l'isomorphisme $f_T^! \xrightarrow{\sim} f^!$ de la proposition 1.1.10), que le morphisme de gauche est un isomorphisme. Comme tous ces morphismes sont compatibles à Frobenius, on obtient un isomorphisme compatible à Frobenius $f_{T,+} \circ f_T^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X'}(\mathcal{E})$ s'inscrivant dans le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} f_{T,+} \circ f_T^!(\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{adj}"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{E} \arrow[d, equal] \\ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X'}(\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \qquad (1.2.14.1)$$

On sait que l'image directe du composé de deux morphismes est isomorphe au composé de l'image directe de ces deux morphismes. Cependant, la compatibilité à Frobenius de cet isomorphisme ne semble pas aisée. Afin de l'obtenir tautologiquement (voir la proposition 1.2.17), nous allons dans un premier temps reconstruire celui-ci dans le contexte de la proposition qui suit.



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 1.2.15. *Soient $g : \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ et $h : \mathfrak{X}''' \to \mathfrak{X}''$ deux morphismes propres de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses tels que $T'' := g^{-1}(T')$ (respectivement $T''' := h^{-1}(T'')$) soit un diviseur de $X''$ (respectivement $X'''$). On suppose de plus $f$ lisse.*

*Pour tout $\mathcal{G} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T''))$, il existe un unique isomorphisme $(f \circ g)_{T,+}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_{T,+}g_{T',+}(\mathcal{G})$ fonctoriel en $\mathcal{G}$ et induisant, pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$, le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}((f\circ g)_{T'+}\mathcal{G},\mathcal{E}) \arrow[rr, "\mathrm{adj}_{f\circ g}", "\sim"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'')}(\mathcal{G},(f\circ g)^{!}_{T}\mathcal{E}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T+}g_{T'+}\mathcal{G},\mathcal{E}) \arrow[u, dotted] \arrow[r, "\mathrm{adj}_{f}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(g_{T+}\mathcal{G},f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{adj}_{g}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'')}(\mathcal{G},g^{!}_{T'}f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

*En outre, ceux-ci sont « associatifs », i.e., si $f$ et $g$ sont lisses alors, pour tout $\mathcal{H} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}''',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'''))$, les deux morphismes composés $(f \circ g \circ h)_{T,+}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} (f \circ g)_{T,+} \circ h_{T'',+}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} f_{T,+}g_{T',+}h_{T'',+}(\mathcal{H})$ et $(f \circ g \circ h)_{T,+}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} f_{T,+}(g \circ h)_{T',+}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} f_{T,+}g_{T',+}h_{T'',+}(\mathcal{H})$ sont égaux.*

*Démonstration.* En premier lieu, on remarque que le diagramme de la proposition 1.2.15 a un sens car, comme $f$ est lisse, $f^{!}_{T}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')$-cohérent. La première assertion de la proposition est alors immédiate. Ensuite, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}''',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T''')}(\mathcal{H},h^{!}_{T''}(f\circ g)^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}''',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T''')}(\mathcal{H},(f\circ g\circ h)^{!}_{T}\mathcal{E}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}((f\circ g)_{T+}h_{T''+}\mathcal{H},\mathcal{E}) \arrow[ur, "\mathrm{adj}_{h}\circ\mathrm{adj}_{f\circ g}"] \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}((f\circ g\circ h)_{T+}\mathcal{H},\mathcal{E}) \arrow[ur, "\mathrm{adj}_{f\circ g\circ h}"] & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}''',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T''')}(\mathcal{H},h^{!}_{T''}g^{!}_{T'}f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[uu] \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}''',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T''')}(\mathcal{H},(g\circ h)^{!}_{T'}f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[uu] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T+}g_{T'+}h_{T''+}\mathcal{H},\mathcal{E}) \arrow[uu] \arrow[ur, "\mathrm{adj}_{h}\circ\mathrm{adj}_{g}\circ\mathrm{adj}_{f}"] \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T+}(g\circ h)_{T'+}\mathcal{H},\mathcal{E}) \arrow[uu] \arrow[ur, "\mathrm{adj}_{g\circ h}\circ\mathrm{adj}_{f}"] &
\end{tikzcd}$$

La commutativité du carré de gauche découle de celle du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}((f\circ g)_{T'+}h_{T''+}\mathcal{H},\mathcal{E}) \arrow[rr, "\mathrm{adj}_{f\circ g}", "\sim"'] & & \mathrm{Hom}(h_{T''+}\mathcal{H},(f\circ g)^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{adj}_{h}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(\mathcal{H},h^{!}_{T''}(f\circ g)^{!}_{T}\mathcal{E}) \\
\mathrm{Hom}(f_{T+}g_{T'+}h_{T''+}\mathcal{H},\mathcal{E}) \arrow[u, "\sim"'] \arrow[r, "\mathrm{adj}_{f}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(g_{T'+}h_{T''+}\mathcal{H},f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{adj}_{g}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(h_{T''+}\mathcal{H},g^{!}_{T'}f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[u, "\sim"'] \arrow[r, "\mathrm{adj}_{h}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(\mathcal{H},h^{!}_{T''}g^{!}_{T'}f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

où, en substituant $h_{T''+}\mathcal{H}$ à $\mathcal{G}$, le rectangle de gauche est, par construction, celui de la proposition 1.2.15, tandis que la commutativité du carré de droite se vérifie par fonctorialité de l'isomorphisme $g^{!}_{T'}f^{!}_{T}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (f \circ g)^{!}_{T}\mathcal{E}$.

De la même façon, on voit que les carrés de droite, du haut et du bas sont commutatifs. Comme celui du fond l'est aussi et que la flèche en haut à droite est un isomorphisme, il en résulte la commutativité du carré de devant. □

*Remarques* 1.2.16. Avec les notations de la proposition 1.2.15, si $f^{!}_{T}f_{T,+}g_{T',+}(\mathcal{G})$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')$-cohérent alors, pour $\mathcal{E} = f_{T,+}g_{T',+}(\mathcal{G})$, le diagramme de la proposition 1.2.15 a toujours un sens et l'image de l'identité de $f_{T,+}g_{T',+}(\mathcal{G})$ par la bijection de droite du diagramme de la proposition 1.2.15 fournit un morphisme $(f \circ g)_{T,+}(\mathcal{G}) \to f_{T,+}g_{T',+}(\mathcal{G})$. De plus, comme $f^{!}_{T}(f \circ g)_{T,+}(\mathcal{G})$ est



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

aussi $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')$-cohérent, en prenant $\mathcal{E} = (f \circ g)_{T,+}(\mathcal{G})$ dans le diagramme de la proposition 1.2.15, on construit un inverse. Modulo cette condition, la proposition 1.2.15 (et aussi la proposition 1.2.17) reste alors encore valable lorsque $f$ et $g$ sont deux morphismes propres quelconques.

Par exemple, si $\mathcal{G}$ est un complexe $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'')$-surcohérent [Car04a, 3] alors la condition précédente « $f^{!}_{T} f_{T,+} g_{T',+}(\mathcal{G})$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')$-cohérent » est toujours vérifiée.

Proposition 1.2.17. *Soit $g : \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ un morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses tel que $g^{-1}(T')$ soit un diviseur de $X''$. On suppose $f$ lisse. L'isomorphisme $(f \circ g)_{T,+} \xrightarrow{\sim} f_{T,+} g_{T',+}$ construit dans la proposition 1.2.15 est alors compatible à Frobenius, i.e., via cet isomorphisme, on a l'égalité suivante :*

$$(\rho_{f,T}\, g_{T',+}) \circ (f_{T,+}\, \rho_{g,T'}) = \rho_{f \circ g,T}.$$

*Démonstration.* Pour tous $\mathcal{G} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T''))$ et $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$, on vérifie que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Hom}(F^*(f\circ g)_{T+}\mathcal{G}, F^*\mathcal{E}) \arrow[rrrr, "F^*\mathrm{adj}_{f\circ g}"] \arrow[d] & & & & \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{G}, F^*(f\circ g)^!_T\mathcal{E}) \arrow[d] & \\
\mathrm{Hom}(F^* f_{T+} g_{T'+}(\mathcal{G}), F^*\mathcal{E}) \arrow[rr, "F^*\mathrm{adj}_f"] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}(F^* g_+\mathcal{G}, F^* f^!_T\mathcal{E}) \arrow[rr, "F^*\mathrm{adj}_g"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{G}, F^* g^!_{T'} f^!_T\mathcal{E}) \arrow[dr] & \\
 & & & \mathrm{Hom}(g_{T'+}F^*\mathcal{G}, F^* f^!_T\mathcal{E}) \arrow[rr, "\mathrm{adj}_g"] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{G}, g^!_{T'} F^* f^!_T\mathcal{E}) \arrow[dd] \\
\mathrm{Hom}(f_{T+}F^* g_{T'+}(\mathcal{G}), F^*\mathcal{E}) \arrow[rr, "\mathrm{adj}_f"] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}(F^* g_{T'+}\mathcal{G}, f^!_T F^*\mathcal{E}) \arrow[dr] & & & \\
 & \mathrm{Hom}(f_{T+} g_{T'+} F^*\mathcal{G}, F^*\mathcal{E}) \arrow[rr, "\mathrm{adj}_f"] \arrow[d] & & \mathrm{Hom}(g_{T'+}F^*\mathcal{G}, f^!_T F^*\mathcal{E}) \arrow[rr, "\mathrm{adj}_g"] & & \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{G}, g^!_{T'} f^!_T F^*\mathcal{E}) \arrow[d] \\
 & \mathrm{Hom}((f\circ g)_{T+}F^*\mathcal{G}, F^*\mathcal{E}) \arrow[rrrr, "\mathrm{adj}_{f\circ g}"] & & & & \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{G}, (f\circ g)^!_T F^*\mathcal{E})
\end{tikzcd} \tag{1.2.17.1}$$

est commutatif. En effet, les rectangles du haut et du bas sont commutatifs par construction (proposition 1.2.15), le losange du milieu et de gauche ainsi que le carré de droite le sont par fonctorialité tandis que celle du carré de gauche et du losange de droite résulte de (1.2.12.2). Or, l'isomorphisme $(f \circ g)_{T+} F^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} F^*(f \circ g)_{T+}(\mathcal{G})$ est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F^*(f\circ g)_{T+}\mathcal{G}, F^*\mathcal{E}) \arrow[r, "F^*\mathrm{adj}_{f\circ g}", "\sim"'] \arrow[d, dotted] & \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{G}, F^*(f\circ g)^!_T\mathcal{E}) \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathrm{Hom}((f\circ g)_{T+}F^*\mathcal{G}, F^*\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{adj}_{f\circ g}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}(F^*\mathcal{G}, (f\circ g)^!_T F^*\mathcal{E})
\end{tikzcd} \tag{1.2.17.2}$$

Il résulte de la compatibilité à Frobenius de l'isomorphisme canonique $g^!_{T'} \circ f^!_T \xrightarrow{\sim} (f \circ g)^!_T$ (§ 1.2.2) que la flèche de droite de (1.2.17.2) est le morphisme composé de droite de (1.2.17.1). D'où le résultat. □

Rappelons la convention suivante de Berthelot [Ber02, 5.1].

Définition 1.2.18. Un $F$-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-*module* sur $\mathfrak{X}$ est la donnée d'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}$ et d'un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-linéaire $\Phi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{E}$. Les morphismes de $F$-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules sont les morphismes $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-linéaires commutant à l'action de Frobenius. De même, nous appellerons $F$-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-*complexe* la donnée d'un complexe $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ et d'un isomorphisme $\Phi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{E}$ dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$. On notera cette catégorie $F$-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$.

Si $(\mathcal{E},\,\Phi)\,\in\,F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$, alors $f^{!}_{T}(\mathcal{E})$ sera considéré comme un élément de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'))$ via l'isomorphisme $f^{!}_{T}(\mathcal{E})\xrightarrow[\sim]{f^{!}_{T}(\Phi)} f^{!}_{T}(F^{*}\mathcal{E})\xrightarrow[\sim]{\theta^{-1}_{f,T}} F^{*}f^{!}_{T}(\mathcal{E})$.

De même, si $(\mathcal{F},\Psi)\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'))$ alors $f_{T,+}(\mathcal{E})$ est un élément de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ via l'isomorphisme $f_{T,+}(\mathcal{E})\xrightarrow[\sim]{f_{T,+}(\Psi)} f_{T,+}(F^{*}\mathcal{E})\xrightarrow[\sim]{\rho_{f,T}} F^{*}f_{T,+}(\mathcal{E})$.

1.2.19. On désigne par $(F\text{-})\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ des complexes $\mathcal{E}$ qui sont en outre à cohomologie $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérente.

Soient $T_1\subset T_2$ deux diviseurs de $X$. La catégorie $(F\text{-})\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_2)_{\mathbb{Q}})$ est une sous-catégorie pleine de $(F\text{-})\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_1)_{\mathbb{Q}})$. En effet, si $\mathcal{E}$ est un objet de $\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_2)_{\mathbb{Q}})$, le morphisme canonique $\mathcal{E}\to({}^{\dagger}T_2)(\mathcal{E})$ (on a omis d'écrire $oub_{T_2}$ pour simplifier les notations) est un isomorphisme (§ 1.1.8). Il en résulte $({}^{\dagger}T_1)(\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}({}^{\dagger}T_1)({}^{\dagger}T_2)(\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}({}^{\dagger}T_2)({}^{\dagger}T_1)(\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}({}^{\dagger}T_2,T_1)({}^{\dagger}T_1)(\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}({}^{\dagger}T_2)(\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}$ (la commutation $({}^{\dagger}T_2)({}^{\dagger}T_1)(\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}({}^{\dagger}T_1)({}^{\dagger}T_2)(\mathcal{E})$ découle de (1.1.7.1)). On dispose donc de la factorisation $oub_{T_1,T_2}:(F\text{-})\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_2)_{\mathbb{Q}})\to(F\text{-})\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_1)_{\mathbb{Q}})$.

1.2.20. Définissons maintenant l'action de Frobenius sur les complexes de la forme $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(-,-)$.

On se donne $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, $(\mathcal{E},\Phi)$ et $(\mathcal{F},\Psi)$ deux objets de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. Comme le foncteur $F^{*}$ est une autoéquivalence de la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)$-modules à gauche (§ 1.2.1), il induit un isomorphisme canonique

$$F^{*}\ :\ \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{F})\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(F^{*}\mathcal{E},F^{*}\mathcal{F}).\tag{1.2.20.1}$$

Comme l'extension $F^{*}:\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\to\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est $K$-linéaire (on rappelle que $F$ désigne la puissance $s$-ième de Frobenius et $k=\mathbb{F}_{p^s}$), cet isomorphisme est $K$-linéaire. De plus, par fonctorialité, on dispose de l'isomorphisme $K$-linéaire :

$$((\Psi)^{-1}\circ-\circ\Phi)\ :\ \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(F^{*}\mathcal{E},F^{*}\mathcal{F})\to\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{F}).$$

En composant ces deux isomorphismes $K$-linéaires, on obtient alors celui-ci

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{F})\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{F})$$

qui définit l'action de Frobenius. Il en résulte une action de Frobenius sur les espaces de cohomologie $\mathrm{Ext}^{r}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{F})$. On la notera $F_{|\mathrm{Ext}^{r}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$.

Théorème 1.2.21. *Soient* $(\mathcal{E},\Phi)\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T'))$ *et* $(\mathcal{F},\Psi)\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$.

*L'isomorphisme d'adjonction :*

$$\mathrm{adj}_{f,T}\ :\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T,+}(\mathcal{E}),\ \mathcal{F})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(\mathcal{E},\ f^{!}_{T}(\mathcal{F}))$$

*est compatible avec l'action de Frobenius.*

*Démonstration.* Cela résulte des définition 1.2.18, § 1.2.20 et du diagramme (1.2.12.2). □

1.2.22. Soient $f:\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}$ un morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, $T$ (respectivement $T'$) un diviseur de $X$ (respectivement $X'$), $\mathfrak{Y}$ (respectivement $\mathfrak{Y}'$) l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentaire de $T$ (respectivement $T'$). On suppose de plus que $f(\mathfrak{Y}')\subset\mathfrak{Y}$, i.e., que $f$ induit un morphisme $\mathfrak{Y}'\to\mathfrak{Y}$.

Pour tout $\mathcal{E}\in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$, on dispose de l'isomorphisme canonique de commutation de l'image inverse extraordinaire à Frobenius :

$$\theta_{f,T',T}\ :\ F^{*}\circ f^{!}_{T',T}(\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}f^{!}_{T',T}\circ F^{*}(\mathcal{E}).\tag{1.2.22.1}$$



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

En effet, via la remarque 1.1.4, on peut remplacer l'hypothèse « $f(\mathcal{Y}') \subset \mathcal{Y}$ » par « l'immersion fermée $f^{-1}(T) \hookrightarrow X'$ se factorise par $T' \hookrightarrow X'$ ». L'isomorphisme (1.2.22.1) se vérifie de manière analogue à (1.2.2.1). Si $\mathcal{E}$ est un $F$-complexe, l'isomorphisme $\theta_{f,T',T}$ nous permet de munir, de manière analogue à la définition 1.2.18, $f^!_{T',T}(\mathcal{E})$ d'une structure de $F$-complexe.

Passons maintenant à l'image directe. Notons $\epsilon_{f,T,T'}$ ou $\epsilon_f$ l'isomorphisme $oub_T \circ f_{T,T',+} \xrightarrow{\sim} f_+ \circ oub_{T'}$ de la proposition 1.1.9. Via (1.2.12.1), le foncteur $f_+ \circ oub_{T'} : \widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger T')) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ commute à Frobenius. Pour tout $\mathcal{F} \in \widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger T'))$, on définit alors l'isomorphisme de commutation à Frobenius

$$\rho_{f,T,T'} : f_{T,T',+} \circ F^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} F^* \circ f_{T,T',+}(\mathcal{F}) \qquad (1.2.22.2)$$

comme étant l'unique tel isomorphisme rendant compatible à Frobenius $\epsilon_{f,T,T'}$ (on a vu dans § 1.1.8 que le foncteur oubli $oub_T$ est pleinement fidèle). Si $\mathcal{F}$ est en outre un $F$-complexe, via $\rho_{f,T,T'}$, il en est de même de $f_{T,T',+}(\mathcal{F})$.

Soient $g : \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ un deuxième morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, $T''$ un diviseur de $X''$ et $\mathcal{Y}''$ l'ouvert de $\mathfrak{X}''$ complémentaire de $T''$. On suppose $f$ lisse et $g(\mathcal{Y}'') \subset \mathcal{Y}'$. On a, pour tout $\mathcal{G} \in \widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'',\mathbb{Q}}({}^\dagger T''))$, la suite d'isomorphismes compatibles à Frobenius :

$$(f\circ g)_{T,T'',+}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\epsilon_{f\circ g}} (f\circ g)_+(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_+ \circ g_+(\mathcal{G}) \xrightarrow{\epsilon_f^{-1}\circ\epsilon_g^{-1}} f_{T,T',+} \circ g_{T',T'',+}(\mathcal{G}), \qquad (1.2.22.3)$$

celui du milieu ayant été construit dans la proposition 1.2.15 et les foncteurs oublis ayant été omis. On a donc construit un isomorphisme $(f\circ g)_{T,T'',+}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} f_{T,T',+}\circ g_{T',T'',+}(\mathcal{G})$ compatible à Frobenius.

Soient $h : \mathfrak{X}''' \to \mathfrak{X}''$ un troisième morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, $T'''$ un diviseur de $X'''$ et $\mathcal{Y}'''$ l'ouvert de $\mathfrak{X}'''$ complémentaire de $T'''$. On suppose $f$ et $g$ lisses et $h(\mathcal{Y}''') \subset \mathcal{Y}''$. L'isomorphisme de commutation à la composition de l'image directe (1.2.22.3) est « associatif », i.e., pour tout $\mathcal{H} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'',\mathbb{Q}}({}^\dagger T''))$, les deux morphismes composés

$$\begin{gathered}(f\circ g\circ h)_{T,T'''+}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} (f\circ g)_{T,T''+} \circ h_{T'',T'''+}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} f_{T,T'+}g_{T',T''+}h_{T'',T'''+}(\mathcal{H}),\\ (f\circ g\circ h)_{T,T'''+}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} f_{T,T'+}(g\circ h)_{T',T'''+}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} f_{T,T'+}g_{T',T''+}h_{T'',T'''+}(\mathcal{H})\end{gathered}$$

sont égaux. En effet, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & (f\circ g)_+\circ h_+(\mathcal{H}) \arrow[rr] & & f_+g_+h_+(\mathcal{H}) \\
(f\circ g)_{T,T''+}\circ h_{T'',T'''+}(\mathcal{H}) \arrow[ur, "\epsilon_{f\circ g}\circ\epsilon_h"] \arrow[rr] & & f_{T,T'+}g_{T',T''+}h_{T'',T'''+}(\mathcal{H}) \arrow[ur, "\epsilon_f\circ\epsilon_g\circ\epsilon_h"] & \\
 & (f\circ g\circ h)_+(\mathcal{H}) \arrow[uu] \arrow[rr] & & f_+(g\circ h)_+(\mathcal{H}) \arrow[uu] \\
(f\circ g\circ h)_{T,T'''+}(\mathcal{H}) \arrow[uu] \arrow[ur, "\epsilon_{f\circ g\circ h}"] \arrow[rr] & & f_{T,T'+}(g\circ h)_{T',T'''+}(\mathcal{H}) \arrow[uu] \arrow[ur, "\epsilon_f\circ\epsilon_{g\circ h}"] &
\end{tikzcd}$$

Par fonctorialité, les carrés du haut, du bas, de droite et de gauche sont commutatifs. Comme il en est de même de celui du fond (proposition 1.2.15), on en déduit celle du carré de devant. D'où le résultat.

1.2.23. Soient $\mathcal{F} \in \widetilde{D}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^\dagger T'))$ et $\mathcal{E} \in \widetilde{D}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. Puisque les foncteurs oublis $oub_T$ et $oub_{T'}$ sont pleinement fidèles, en notant $\alpha_{f,T} : oub_{T'} \circ f^!_T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} f^!(\mathcal{E}) \circ oub_T$ (proposition 1.1.10),



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

on dispose du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T,+}\mathcal{F},\, \mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{adj}_{f,T}", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\epsilon_{f,T},\mathrm{id})\circ oub_T", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(\mathcal{F},\, f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\alpha_{f,T})\circ oub_{T'}", "\sim"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(f_{+}\circ oub_{T'}\mathcal{F},\, oub_{T}\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{adj}_{f}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}}(oub_{T'}\mathcal{F},\, f^{!}\circ oub_{T}\mathcal{E})
\end{tikzcd} \tag{1.2.23.1}$$

dont les flèches sont des isomorphismes. De plus, celui-ci est commutatif. En effet, soit $\phi : \mathcal{F} \to f^{!}_{T}(E)$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(\mathcal{F},\, f^{!}_{T}\mathcal{E})$. En omettant d'indiquer les foncteurs oublis, il s'agit d'établir que les morphismes $\mathrm{adj}^{-1}_{f,T}(\phi)$ et $(\mathrm{adj}^{-1}_{f}(\alpha_{f,T}\circ\phi))\circ\epsilon_{f,T} : f_{T,+}(\mathcal{F}) \to \mathcal{E}$ sont égaux. Grâce à [Ber96a, 4.3.12], il suffit de valider l'égalité en dehors de $T$. Or, en dehors de $T$, $\mathrm{adj}^{-1}_{f,T}$ (respectivement $\alpha_{f,T}$ et $\epsilon_{f,T}$) est égale à $\mathrm{adj}^{-1}_{f}$ (respectivement sont égaux à l'identité).

Il en résulte que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
f_{T,+}F^{*}\mathcal{F} \arrow[r, "\sim", "\rho_{f,T}"'] \arrow[d, "\epsilon_{f,T,f^{-1}T}"', "\sim"] & F^{*}f_{T,+}\mathcal{F} \arrow[d, "\sim"', "\epsilon_{f,T,f^{-1}T}"] \\
f_{+}F^{*}\mathcal{F} \arrow[r, "\rho_{f}", "\sim"'] & F^{*}f_{+}\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

où $\rho_{f,T}$ et $\rho_{f}$ sont définis en (1.2.12.1), est commutatif (ce qui implique que l'isomorphisme $\rho_{f,T,f^{-1}(T)}$ de (1.2.22.2) concide avec $\rho_{f,T}$).

En effet, cela résulte aussitôt de l'étude du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{T,+}F^{*}\mathcal{F}, F^{*}\mathcal{E}) \arrow[rr, "\mathrm{adj}_{f,T}"] \arrow[dl] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(F^{*}\mathcal{F}, f^{!}_{T}F^{*}\mathcal{E}) \arrow[dl] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(f_{+}F^{*}\mathcal{F}, F^{*}\mathcal{E}) \arrow[rr, "\mathrm{adj}_{f}"] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(F^{*}\mathcal{F}, f^{!}F^{*}\mathcal{E}) & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(F^{*}f_{T,+}\mathcal{F}, F^{*}\mathcal{E}) \arrow[rr, "F^{*}\mathrm{adj}_{f,T}"] \arrow[uu] \arrow[dl] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(F^{*}\mathcal{F}, F^{*}f^{!}_{T}\mathcal{E}) \arrow[uu] \arrow[dl] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(F^{*}f_{+}\mathcal{F}, F^{*}\mathcal{E}) \arrow[rr, "F^{*}\mathrm{adj}_{f}"] \arrow[uu] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T')}(F^{*}\mathcal{F}, F^{*}f^{!}\mathcal{E}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale au fond à droite peut être définie de deux manières différentes suivant le choix de l'isomorphisme $f_{T,+}F^{*}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} F^{*}f_{T,+}\mathcal{F}$. En effet, la commutativité des carrés du haut et du bas se déduit de (1.2.23.1), celle de droite résulte de la compatibilité à Frobenius de l'isomorphisme $f^{!}_{T} \xrightarrow{\sim} f^{!}$, tandis que celles de devant et du fond découlent de (1.2.12.2). Le carré de gauche est donc commutatif. D'où le résultat.

Enfin, comme l'isomorphisme $f_{T,+} \xrightarrow{\sim} f_{+}$ est compatible à Frobenius, comme $f_{+}({}^{\dagger}T') \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}T)f_{+}$ l'est aussi [Car04a, 2.2.18.2], il en est de même de $f_{T+}({}^{\dagger}T') \xrightarrow{\sim} ({}^{\dagger}T)f_{+}$. Ainsi, tous les isomorphismes des propositions 1.1.9 et 1.1.10 sont compatibles à Frobenius.

1.2.24. Définissons à présent l'action de Frobenius sur la cohomologie. Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{S}$ son morphisme structural et $T$ un diviseur de $X$.

Pour tout complexe $(\mathcal{E}, \Phi) \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$, on définit une action de Frobenius sur l'image directe de $\mathcal{E}$ via l'isomorphisme $K$-linéaire :

$$f_{T,+}\mathcal{E} \xrightarrow{f_{T,+}\Phi} f_{T,+}(F^{*}_{X}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\rho_{f,T}} F^{*}_{S}f_{T,+}(\mathcal{E}) = f_{T,+}\mathcal{E},$$



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

où l'isomorphisme $\rho_{f,T}$ a été définie dans (1.2.22.2). En lui appliquant le foncteur dual $K$-linéaire, il en dérive une sur $(f_+(\mathcal{E}))^\vee$. D'où une action de Frobenius sur les $K$-espaces vectoriels de dimension finie $H^r(f_{T,+}\mathcal{E})$ (respectivement $H^r((f_+(\mathcal{E}))^\vee)$), que l'on notera $F_{|H^r(f_{T,+}\mathcal{E})}$ (respectivement $F_{H^r((f_+(\mathcal{E}))^\vee)}$).

On remarque alors que l'isomorphisme $H^r((f_+(\mathcal{E}))^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_{\mathcal{S},\mathbb{Q}}}(f_+(\mathcal{E}),\ \mathcal{O}_{\mathcal{S},\mathbb{Q}})$, où l'action de Frobenius sur $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_{\mathcal{S},\mathbb{Q}}}(f_+(\mathcal{E}),\ \mathcal{O}_{\mathcal{S},\mathbb{Q}})$ a été définie dans § 1.2.20, est compatible à Frobenius.

Théorème 1.2.25. *On garde les notations de § 1.2.24. Soit $(\mathcal{E},\Phi) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. L'isomorphisme*

$$H^r((f_+(\mathcal{E}))^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{r+d_X}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\ \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$$

*est compatible à l'action de Frobenius.*

*Démonstration.* Comme $f^!(\mathcal{O}_{\mathcal{S},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}[d_X]$ (voir [NH95, 1.5]), il résulte du théorème 1.2.21 l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_{\mathcal{S},\mathbb{Q}}}(f_+(\mathcal{E}),\ \mathcal{O}_{\mathcal{S},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{r+d_X}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\ \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. La remarque de § 1.2.24 nous permet de conclure. $\square$

1.2.26. Avec les notations et hypothèses de § 1.2.24, on désigne par $F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}\vee}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ la sous-catégorie pleine de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ des complexes $(\mathcal{E},\Phi)$ tels que $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E})$ soit à cohomologie $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérente. Pour un tel complexe $(\mathcal{E},\Phi) \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}\vee}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$, on définit, par commutation de l'image directe extraordinaire de $\mathcal{E}$ à Frobenius (car composée de foncteurs commutant à Frobenius), une action de Frobenius sur les $K$-espaces vectoriels de dimension finie $H^r(f_{T,!}\mathcal{E})$, que l'on notera $F_{|H^r(f_{T,!}\mathcal{E})}$.

### 1.3 Accouplement de Poincaré

Dans cette section, $\mathfrak{X}$ sera un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, $f$ son morphisme structural et $T$ un diviseur de $X$.

Pour tout entier $r$ et tout $F$-complexe $(\mathcal{E},\Phi) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, on définit le *twist de Tate* $(\mathcal{E}(r),\ \phi(r))$ de la manière suivante : $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}$ et $\Phi(r) = q^{-r}\Phi$ (on rappelle que $q = p^s$ et que $F$ désigne la puissance $s$-ième de Frobenius). Par abus de notation, on notera parfois celui-ci plus simplement $\mathcal{E}(r)$.

Proposition 1.3.1. *Si $\mathfrak{X}$ est géométriquement connexe, alors on dispose d'un isomorphisme compatible à Frobenius*

$$\mathrm{Ext}^{2d_{\mathfrak{X}}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} K(-d_{\mathfrak{X}}).$$

*Démonstration.* Dans la démonstration de [Ber74, VII.2.1.1], Berthelot prouve que le morphisme trace [Ber74, VII.1.4.7.b]

$$\gamma_{+,f}\ :\ H^{2d_X}(\mathfrak{X},\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}}) \to K(-d_{\mathfrak{X}})$$

est un isomorphisme.

Or, si $\mathcal{E} \in D^+(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, au cours de la démonstration [Ber00, 4.3.5], il établit que l'on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \Omega^\bullet_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} F^*\mathcal{E} \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{E}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ F^*\mathcal{E})
\end{tikzcd} \tag{1.3.1.1}$$



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

où les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques [Ber00, 4.3.4], la flèche du haut est le morphisme induit par fonctorialité entre les complexes de de Rham et celle du bas provient de (1.2.20.1). D'où le résultat. $\square$

1.3.2. Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in D(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. On définit l'accouplement canonique

$$
\begin{aligned}
<,>:\ \operatorname{Ext}^{r}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \times \operatorname{Ext}^{s}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{F},\mathcal{G}) &\to \operatorname{Ext}^{r+s}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{G})\\
(f,g) &\mapsto g\circ f,
\end{aligned}
$$

$g\circ f$ prenant son sens via les isomorphismes $\operatorname{Ext}^{r}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\ \mathcal{F}[r])$,

$\operatorname{Ext}^{s}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{F}[r],\ \mathcal{G}[r+s])$ et $\operatorname{Ext}^{r+s}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{G}[r+s])$.

Proposition 1.3.3. *Si $\mathfrak{X}$ est géométriquement connexe alors, pour tout $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, l'accouplement canonique*

$$
<,>:\ \operatorname{Ext}^{2d_{\mathfrak{X}}-r}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\mathcal{E}) \times \operatorname{Ext}^{r}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to \operatorname{Ext}^{2d_{\mathfrak{X}}}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})
$$

*est non-dégénéré.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}[-2d_{\mathfrak{X}}+r]$, on peut supposer que $r = 2d_{\mathfrak{X}}$. Grâce à théorème 1.2.25, on a

$$
H^{d_{\mathfrak{X}}}((f_{+}(\mathcal{E}))^{\vee}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^{2d_{X}}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\ \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}).
$$

Or, il découle de [Ber02, 4.3.6.3] et de [Ber90, 3.2.3], $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{E})[d_{\mathfrak{X}}] \xrightarrow{\sim} f_{+}(\mathcal{E})$. Il en dérive l'isomorphisme $H^{d_{\mathfrak{X}}}((f_{+}(\mathcal{E}))^{\vee}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Ext}^{0}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{E}))^{\vee}$. On obtient ainsi un isomorphisme fonctoriel en $\mathcal{E}$ : $\operatorname{Ext}^{2d_{\mathfrak{X}}}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Ext}^{0}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{E}))^{\vee}$. Il s'en suit le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{E}) \arrow[d, equal] & \times & \operatorname{Ext}^{2d_{\mathfrak{X}}}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \operatorname{Ext}^{2d_{\mathfrak{X}}}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \arrow[d, "\sim"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{E}) & \times & (\operatorname{Ext}^{0}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{E}))^{\vee} \arrow[r] & (\operatorname{Ext}^{0}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}))^{\vee}
\end{tikzcd}
$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes. L'accouplement du bas est non-dégénéré. En effet, soient $e_1,\dots,e_N$ une base de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{E})$ (comme $K$-espace vectoriel) et $e_1^{\vee},\dots,e_N^{\vee}$ la base duale correspondante de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{E})^{\vee} = (\operatorname{Ext}^{0}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{E}))^{\vee}$. Par fonctorialité, l'accouplement du bas envoie, pour tout $l = 1,\dots,N$, $(e_l, e_l^{\vee})$ sur $u \mapsto e_l^{\vee}(u\circ e_l)$, avec $u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\ \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. En prenant $u = id$, on vérifie ainsi que cet accouplement est non-dégénéré. D'où la proposition. $\square$

Proposition 1.3.4. *Soient $(\mathcal{E},\Phi)$, $(\mathcal{E}',\Phi')$, $(\mathcal{E}'',\Phi'') \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. L'accouplement canonique*

$$
<,>:\ \operatorname{Ext}^{r}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{E}') \times \operatorname{Ext}^{s}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E}',\mathcal{E}'') \to \operatorname{Ext}^{r+s}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)}(\mathcal{E},\mathcal{E}''),
$$

*est compatible à l'action de Frobenius.*

*Démonstration.* Immédiate. $\square$

On en arrive alors au théorème de dualité de Poincaré.



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

Théorème 1.3.5. *Supposons que $\mathfrak{X}$ soit géométriquement connexe. Alors, pour tout complexe $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, l'accouplement canonique :*

$$\mathrm{Ext}^{2d_{\mathfrak{X}}-r}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Ext}^{r}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to K(-d_{\mathfrak{X}})$$

*est non-dégénérée et compatible à Frobenius.*

*Démonstration.* Cela résulte aussitôt des propositions 1.3.1, 1.3.3 et 1.3.4. □

## 2. Stabilité sur les courbes de l'holonomie par foncteur cohomologique local

Sauf mention explicite du contraire, $\mathfrak{X}$ désignera un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, $T$ un diviseur de $X$ et $\mathfrak{Y}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentaire de $T$. De plus, pour tout point fermé $x$ de $X$, on notera par $i_x$ : $\mathrm{Spf}\,\mathcal{V}(x) \hookrightarrow \mathfrak{X}$, un relèvement de l'immersion fermée canonique induite par $x$. On remarque que $\mathcal{V}(x)$ est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$. Son corps des fractions sera désigné par $K(x)$.

### 2.1 Rappels sur l'holonomie

Si $(\mathcal{E}, \Phi)$ est un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, Berthelot définit dans [Ber02, 5.2.7] la variété caractéristique de $\mathcal{E}$, que l'on notera $\mathrm{Car}(\mathcal{E})$. En outre, d'après [Ber02, 5.3.4], l'inégalité de Bernstein est vérifiée : si $(\mathcal{E}, \Phi)$ est un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent non nul alors, pour tout point $x$ du support de $\mathcal{E}$, on a

$$\dim_x \mathrm{Car}(\mathcal{E}) \geqslant \dim_x X. \tag{2.1.0.1}$$

Soit $(\mathcal{E}, \Phi)$ un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Nous appellerons *dimension* de $\mathcal{E}$ en un point $x$ du support de $\mathcal{E}$ la dimension en $x$ de $\mathrm{Car}(\mathcal{E})$, et nous poserons $\dim \mathcal{E} = \sup_x(\dim_x \mathrm{Car}(\mathcal{E}))$. L'inégalité de Bernstein assure que, si $\mathcal{E} \neq 0$, alors $\dim \mathcal{E} \geqslant d_X$. Nous dirons que $(\mathcal{E}, \Phi)$ est holonome si $\mathcal{E} = 0$ ou si $\dim \mathcal{E} = d_X$.

Virrion (confère [Vir00, III.4]) nous donne une caractérisation homologique de l'holonomie :

Théorème 2.1.1. *Soit $\mathcal{E}$ un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Alors, $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si, pour tout $i \neq d_{\mathfrak{X}}$, on a*

$$\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0.$$

2.1.2. Si $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ nous dirons que $\mathcal{E}$ est *holonome* si ses faisceaux de cohomologie le sont. Nous noterons $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-complexes holonomes.

Si $(\mathcal{E}, \ \Phi) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est un complexe tel que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}(\mathcal{E}) = 0$, le triangle de localisation (1.1.6.5) nous dit que le morphisme canonique $\mathcal{E} \to ({}^{\dagger}T)(\mathcal{E})$ est un isomorphisme. On notera alors $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$, la sous-catégorie pleine de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ formée des complexes tels que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}(\mathcal{E}) = 0$. De tels complexes seront appelés *$F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T)$-complexes holonomes* ou *complexes holonomes* si aucune confusion n'est à craindre.

### 2.2 Complexes pseudo-holonomes

On ne sait pas encore que les $F$-complexes holonomes sont à fibres finies, ce qui pose un problème quant à la définition des fonctions $L$ associées à ceux-ci. On est alors amené à définir la catégorie suivante.



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

Définition 2.2.1. On note $F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$, la sous-catégorie pleine de $F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}\vee}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ (§ 1.2.26) des complexes $(\mathcal{E},\ \Phi)$ qui sont à « fibres finies », i.e., pour tout point fermé $y$ de $Y$, les espaces de cohomologie de $i^{+}_{y,T}(\mathcal{E})$ sont des $K$-espaces vectoriels de dimension finie. De tels complexes seront dits « pseudo-holonomes ».

Conjecture 2.2.2. En s'inspirant du cas de la caractéristique nulle [BGKHME87, VII,10.7], on conjecture que les deux catégories $F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ et $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ sont égales.

On montrera dans le corollaire 2.3.4 que cette conjecture est validée lorsque $\mathfrak{X}$ est une courbe. En outre, on a prouvé que la conjecture de Berthelot sur la stabilité de l'holonomie par image inverse extraordinaire (voir [Ber02, 5.3.6]) implique la conjecture ci dessus [Car04b].

Tout ce qui suit est uniquement destiné à prouver le théorème 2.2.17. Celui-ci donne une propriété fondamentale des complexes pseudo-holonomes.

Pour tout complexe $\mathcal{E}\in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$, on pose

$$f^{!(m)}(\mathcal{E}) := \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} f^{-1}\mathcal{E}[d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underset{\underset{i}{\longleftarrow}}{\lim}\,(\mathbb{L}f_i^{*}(\mathcal{O}_{X_i}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E}))[d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}]. \qquad (2.2.2.1)$$

Lemme 2.2.3. *Soient $f:\mathfrak{X}'\hookrightarrow\mathfrak{X}$ une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, $\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ l'idéal définissant $f$ et $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent (respectivement un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent) et plat en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module (respectivement $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module).*

*On a alors un isomorphisme : $f^{!(m)}(\mathcal{E})[-d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}]\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}$ (respectivement $f^{!}(\mathcal{E})[-d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}]\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}$).*

*Démonstration.* Le cas respé se traitant de manière analogue, étudions donc le cas non respé. Tout d'abord, il résulte de l'isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ que $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module à droite cohérent. Grâce à [Ber96a, 3.2.3.(iii)], on en déduit l'isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'\hookrightarrow\mathfrak{X}}\xrightarrow{\sim}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$. Comme $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-plat, il s'en suit $f^{!(m)}(\mathcal{E})[-d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}]\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E}$. Lorsque $\mathcal{E}$ est plat en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module, on obtient alors $f^{!(m)}(\mathcal{E})[-d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}]\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}$. □

Lemme 2.2.4. *Soient $f:\mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses et $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent.*

*Si $\mathcal{E}$ est de la forme $(\mathcal{O}^{(J)}_{\mathfrak{X}})^{\wedge}$, i.e., est isomorphe au complété $p$-adique d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module libre, alors, pour tout $r\neq -d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}$, $\mathcal{H}^{r}f^{!(m)}(\mathcal{E})=0$ et $\mathcal{H}^{-d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}}f^{!(m)}(\mathcal{E})$ est isomorphe à $(\mathcal{O}^{(J)}_{\mathfrak{X}'})^{\wedge}$.*

*Si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-plat, alors, pour tout $r\neq -d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}$, $\mathcal{H}^{r}f^{!(m)}(\mathcal{E})=0$. De plus, si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$ sont affines alors*

$$\Gamma(\mathfrak{X}',\ \mathcal{H}^{-d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}}f^{!(m)}(\mathcal{E}))\xrightarrow{\sim}\Gamma(\mathfrak{X}',\ \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})\widehat{\otimes}_{\Gamma(\mathfrak{X},\,\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})}\Gamma(\mathfrak{X},\ \mathcal{E}).$$

*Démonstration.* Le premier cas étant similaire, traitons le deuxième. Comme $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module plat et via Mittag–Leffler (on utilise la version faisceautique [BO78, 7.20]), on obtient le deuxième isomorphisme :

$$f^{!(m)}(\mathcal{E})[-d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}]\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}\underset{\underset{i}{\longleftarrow}}{\lim}\,(\mathbb{L}f_i^{*}(\mathcal{O}_{X_i}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E}))\xrightarrow{\sim}\underset{\underset{i}{\longleftarrow}}{\lim}\,f_i^{*}(\mathcal{O}_{X_i}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E}). \qquad (2.2.4.1)$$

Or, on a les isomorphismes : $\mathcal{O}_{X_i}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}\otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}\otimes_{\Gamma(X_i,\,\mathcal{D}^{(m)}_{X_i})}[\Gamma(X_i,\ \mathcal{D}^{(m)}_{X_i})\otimes_{\Gamma(X_i,\,\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})}\Gamma(X_i,\ \mathcal{E})]$, le dernier résultant de [Ber96a, 3.3.9.(iv)]. En leur appliquant le foncteur $\Gamma(X_i,\ -)$ et en utilisant l'isomorphisme $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{X_i}\otimes_{\Gamma(X_i,\,\mathcal{O}_{X_i})}\Gamma(X_i,\ \mathcal{D}^{(m)}_{X_i})$, on obtient $\Gamma(X_i,\ \mathcal{O}_{X_i}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}\Gamma(X_i,\ \mathcal{D}^{(m)}_{X_i})\otimes_{\Gamma(X_i,\,\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})}\Gamma(X_i,\ \mathcal{E})$. En outre, on a $\Gamma(X_i,\ \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})/\pi^{i+1}\Gamma(X_i,\ \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})\xrightarrow{\sim}\Gamma(X_i,\ \mathcal{D}^{(m)}_{X_i})$ (voir [Ber96a, 3.3.2.4]). Il en découle

$$\Gamma(X_i,\ \mathcal{O}_{X_i}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}\Gamma(X_i,\ \mathcal{E})/\pi^{i+1}\Gamma(X_i,\ \mathcal{E}). \qquad (2.2.4.2)$$

En appliquant le foncteur $\Gamma(\mathfrak{X}', -)$ à l'isomorphisme 2.2.4.1, comme les faisceaux $\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}$ sont quasi-cohérents et vérifient l'isomorphisme (2.2.4.2), on conclut la preuve. □

*Remarques* 2.2.5. On suppose que $\mathfrak{X}$ est affine et l'on se donne $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$-module cohérent. Alors $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-plat si et seulement si $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ est $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$-plat.

En effet, si $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ est $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$-plat, alors, pour tout $i$, pour tout ouvert affine $\mathcal{Y}$ de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(Y_i, \mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ est un $\Gamma(Y_i, \mathcal{O}_{X_i})$-module plat. Or, d'après [Ber96a, 3.3.10] et avec les notations de [Ber96a, 3.3.7.1], on a un isomorphisme $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})^{\Delta}$. En appliquant à cet isomorphisme le foncteur $\Gamma(\mathcal{Y}, -)$, qui commute aux limites projectives, on en déduit

$$\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \widehat{\otimes}_{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}).$$

Comme $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est noethérien, il résulte ensuite de [Ber96a, 3.2.4] que $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$ est $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$-plat. D'où la platitude de $\mathcal{E}$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module.

Réciproquement, si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-plat, alors pour tout $i$, $\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{X_i}$-plat. Comme $\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}$ est quasi-cohérent, le faisceau $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E})$ est un $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$-module plat. Par (2.2.4.2), il en résulte que le $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$-module $\Gamma(X_i, \mathcal{E})/\pi^{i+1}\Gamma(X_i, \mathcal{E})$ est plat. Or, en appliquant le foncteur $\Gamma(\mathfrak{X}, -)$ à l'isomorphisme $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})^{\Delta}$, on obtient

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})/\pi^{i+1}\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}). \tag{2.2.5.1}$$

D'après [Ber96a, 3.2.4], comme $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est noethérien et $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})/\pi^{i+1}\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ est $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$-plat, il découle de l'isomorphisme 2.2.5.1 que $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ est $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$-plat.

Avec les notations du lemme 2.2.4, cette remarque implique que $\Gamma(\mathfrak{X}', \mathcal{H}^{-d_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}}} f^{!(m)}(\mathcal{E}))$ est séparé, complet et $\Gamma(\mathfrak{X}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})$-plat.

Proposition 2.2.6. *On suppose que $\mathfrak{X}$ est affine et l'on fixe un point fermé $x$ de $\mathfrak{X}$. Pour ne pas alourdir les notations, on écrira $\mathcal{V}_x$ pour $\mathcal{V}(x)$ et $K_x$ pour $K(x)$. De plus, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ désignera l'idéal définissant $i_x$ et l'on posera $A := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ et $I := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{I})$.*

(i) *Pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$-module cohérent (respectivement $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$-module cohérent, respectivement $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent) $\mathcal{E}$, en notant $E := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ le morphisme canonique $E/IE \to \mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}$ est un isomorphisme.*

(ii) *Dans le cas non respé, si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-plat, alors $E/IE$ est séparé et complet pour la topologie $p$-adique et le sous-ensemble $IE$ est fermé dans $E$, où $E$ est muni de la topologie induite par sa structure de $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})$-module de type fini (i.e. la topologie $p$-adique). En outre, si $\mathcal{E}$ est de la forme $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^{(J)})^{\wedge}$, alors $E/IE$ est isomorphe à $(\mathcal{V}_x^{(J)})^{\wedge}$.*

*Démonstration.* Commençons par prouver la première assertion. À cette fin, traitons le cas non respé, les autres cas étant similaires. Si $\mathcal{E}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$-module cohérent, le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \otimes_{\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})} E \to \mathcal{E}$ est un isomorphisme (voir [Ber96a, 3.3.9.(iv)]). Comme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ est à support dans $\{x\}$, le morphisme canonique $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}) \to \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ est un isomorphisme. De plus, $\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \mathcal{E}$. Il en découle l'isomorphisme :

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}) \otimes_{\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})} E \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}. \tag{2.2.6.1}$$

Comme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-plat à gauche, $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$. Puisque $\mathcal{I}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-cohérent, il en résulte que $\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$-module à droite cohérent. De la même manière, on vérifie que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$-module à droite cohérent. Comme le foncteur $\Gamma(\mathfrak{X}, -)$ est exact sur la catégorie



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-modules à droite cohérents [Ber96a, 3.3.10], il en résulte l'isomorphisme

$$\Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})/\Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}). \tag{2.2.6.2}$$

Comme $\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module à droite cohérent, on déduit de [Ber96a, 3.3.9.(i)] (et du fait que le foncteur $\Gamma(\mathfrak{X},\, -)$ commute aux limites projectives),

$$\Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}/\pi^{i+1}\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}). \tag{2.2.6.3}$$

Or, $\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}/\pi^{i+1}\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}/\pi^{i+1}\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$. En lui appliquant le foncteur $\Gamma(\mathfrak{X},\, -)$, on obtient $\Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}/\pi^{i+1}\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{I}/\pi^{i+1}\mathcal{I}) \otimes_{\Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{O}_{X_i})} \Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{D}^{(m)}_{X_i})$. Or, $\Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ est $\Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$-plat à gauche, $\Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{I}/\pi^{i+1}\mathcal{I}) \xrightarrow{\sim} I/\pi^{i+1}I$ et $\Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})/\pi^{i+1}\Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ (voir [Ber96a, 3.3.2.4]). On en déduit

$$\Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}/\pi^{i+1}\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} I\,\Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})/\pi^{i+1}I\,\Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}). \tag{2.2.6.4}$$

Enfin, en remarquant que $I\,\Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ est séparé et complet (car c'est un $\Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$-module à droite de type fini [Ber96a, 3.2.3.(v)]), il découle de (2.2.6.3) et de (2.2.6.4) que $\Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} I\Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$. On conclut alors, via (2.2.6.1) et (2.2.6.2), la première assertion.

La deuxième assertion est une conséquence de la première, de la formule (2.2.2.1), des lemmes 2.2.3, 2.2.4 et de [Mat70, 23.B]. □

Je remercie le rapporteur pour ses remarques qui ont permis de simplifier les preuves du lemme 2.2.7 et de la proposition 2.2.8 ci-dessous.

Lemme 2.2.7. *Soient $R$ un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique $(0, p)$, $L$ son corps des fractions et $\mathring{M}$ un $R$-module topologique de la forme $(R^{(J)})^{\wedge}$, i.e., isomorphe au complété pour la topologie $p$-adique d'un $R$-module libre.*

*Pour toute famille $L$-libre $(P_1, \ldots, P_r)$ de $\mathring{M}_{\mathbb{Q}}$, il existe alors un entier $N_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout entier $n$, on ait l'inclusion :*

$$(RP_1 + \cdots + RP_r) \cap p^{N_0+n}\mathring{M} \subset p^n(RP_1 + \cdots + RP_r). \tag{2.2.7.1}$$

*Démonstration.* La filtration de $RP_1 + \cdots + RP_r$ induite par $(RP_1 + \cdots + RP_r) \cap p^{N_0+n}\mathring{M}$ (respectivement $p^n(RP_1 + \ldots + RP_r)$) munit $LP_1 + \cdots + LP_r$ d'une norme de Banach. Comme ce dernier est de dimension finie, ces normes sont équivalentes. □

Proposition 2.2.8. *On garde les notations et hypothèses de la proposition 2.2.6. Soient $m_0$ un entier et $\mathcal{E}^{(m_0)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Pour tout $m \geqslant m_0$, on note $\mathcal{E}^{(m)} := \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m_0)}$ et $E^{(m)} := \Gamma(\mathfrak{X},\, \mathcal{E}^{(m)})$.*

*Pour tout $m \geqslant m_0$ fixé, si l'image du morphisme canonique $E^{(m_0)} \to E^{(m)}/IE^{(m)}$ est un $K_x$-espace vectoriel de dimension finie alors il en est de même de $E^{(m)}/IE^{(m)}$.*

*Démonstration.* Nous aurons besoin du lemme ci-après.

Lemme 2.2.9. *Pour tout $m \geqslant m_0$, l'image de $E^{(m_0)}$ dans $E^{(m)}$ est dense dans $E^{(m)}$, où $E^{(m)}$ est muni de la topologie induite par sa structure de $\Gamma(\mathfrak{X},\, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini (voir [Ber96a, 4.1.1]).*



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

*Démonstration.* Soit $P \in \Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. $P$ s'écrit sous la forme : $\sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{<\underline{k}>_{(m)}}$, où les $a_{\underline{k}}$ forment une suite de $A$ tendant vers 0 lorsque $|\underline{k}|$ tend vers l'infini. Pour tout entier $N \geqslant 0$, on note $P_N := \sum_{|\underline{k}| \leqslant N} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{<\underline{k}>_{(m)}}$. Lorsque $N$ tend vers l'infini, la suite $P_N$ converge vers $P$, pour la topologie de $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ définie dans [Ber96a, 4.1.1]. Or, l'action de $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ sur $E^{(m)}$ est continue. De plus, pour tout $x \in E^{(m_0)}$, en notant $1 \otimes x$ l'image de $x$ dans $E^{(m)}$, l'action de $P$ (respectivement $P_N$) sur $1 \otimes x$ est égale à $P \otimes x$ (respectivement $P_N \otimes x$). On en déduit :

$$P \otimes x = (\lim_{N \to \infty} P_N) \otimes x \xrightarrow{\sim} \lim_{N \to \infty} (P_N \otimes x) = \lim_{N \to \infty} (1 \otimes P_N \cdot x),$$

la dernière égalité résultant de la remarque que $P_N \in \Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. D'où le résultat. □

Notons $G^{(m)}$, l'image de $E^{(m_0)} \to E^{(m)}/IE^{(m)}$. Comme $G^{(m)}$ est de dimension finie sur $K$, celui-ci est fermé dans $E^{(m)}/IE^{(m)}$ (muni de la topologie quotient induite par la structure canonique de $E^{(m)}$). Il résulte du lemme 2.2.9 que $G^{(m)}$ est dense dans $E^{(m)}/IE^{(m)}$. D'où $G^{(m)} = E^{(m)}/IE^{(m)}$. □

Théorème 2.2.10. *On garde les notations et hypothèses de la proposition 2.2.6 et l'on se donne un $F$-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$. Pour tout entier $m \geqslant 0$, on désigne par $\mathcal{E}^{(m)}$, le $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent associé à $\mathcal{E}$ (voir [Ber00, 4.5.4]). On suppose en outre qu'il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathring{\mathcal{E}}^{(0)}$ isomorphe au complété $p$-adique d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module libre et tel que l'on ait un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire : $\mathring{\mathcal{E}}^{(0)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(0)}$. On pose $E^{(m)} := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}^{(m)})$ et $E := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$.*

*Si $E/IE$ est un $K_x$-espace vectoriel de dimension finie, alors il existe un entier $m_0 \geqslant 0$ tel que $E^{(sm_0)}/IE^{(sm_0)}$ soit un $K_x$-espace vectoriel de dimension finie.*

*Démonstration.* D'après [Ber02, 3.1.4], $\mathring{\mathcal{E}}^{(sm)} := F^{*m}(\mathring{\mathcal{E}}^{(0)})$ est $\widehat{\mathcal{D}}^{(sm)}_{\mathfrak{X}}$-cohérent. Par le lemme 2.2.4, $\mathring{\mathcal{E}}^{(sm)}$ est lui-aussi isomorphe au complété $p$-adique d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module libre et il vérifie $\mathring{\mathcal{E}}^{(sm)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(sm)}$. On note alors $\mathring{E}^{(sm)} := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathring{\mathcal{E}}^{(sm)})$ et si $P^{(0)} \in E^{(0)}$, pour tout entier $m$, $P^{(sm)}$ désignera l'image de $P^{(0)}$ dans $E^{(sm)}$ et $\overline{P}^{(sm)}$ son image dans $E^{(sm)}/IE^{(sm)}$. D'après la proposition 2.2.6, $\mathring{E}^{(sm)}/I\mathring{E}^{(sm)}$ est isomorphe au complété $p$-adique d'un $\mathcal{V}_x$-module libre. Pour démontrer ce dernier fait, on remarquera que l'hypothèse sur la structure de Frobenius n'est pas superflu.

Par l'absurde, supposons que, pour tout entier $m$, $E^{(sm)}/IE^{(sm)}$ soient des $K_x$-espaces vectoriels de dimension infinie.

En notant $r$ la dimension sur $K_x$ de $E/IE$, on construit, par récurrence sur $s \geqslant 0$, des éléments $P^{(0)}_{i,j} \in \mathring{E}^{(0)}$, pour $0 \leqslant i \leqslant r$ et $0 \leqslant j \leqslant s$, ainsi que des entiers $n_0, \ldots, n_s$ de la manière suivante :

- Pour $s = 0$ : comme $\dim_{K_x}(E^{(0)}/IE^{(0)}) = \infty$, il existe des éléments $P^{(0)}_{0,0}, \ldots, P^{(0)}_{r,0} \in E^{(0)}$ tels que la famille $(\overline{P}^{(0)}_{0,0}, \ldots, \overline{P}^{(0)}_{r,0})$ soit $K_x$-libre. D'après le lemme 2.2.7, il existe un entier $n_0$ tel que

$$(\mathcal{V}_x \overline{P}^{(0)}_{0,0} + \cdots + \mathcal{V}_x \overline{P}^{(0)}_{r,0}) \cap p^{n_0} \mathring{E}^{(0)}/I\mathring{E}^{(0)} \subset p(\mathcal{V}_x \overline{P}^{(0)}_{0,0} + \cdots + \mathcal{V}_x \overline{P}^{(0)}_{r,0}).$$

- Supposons $P^{(0)}_{i,j} \in \mathring{E}^{(0)}$ construits pour $0 \leqslant i \leqslant r$ et $0 \leqslant j \leqslant s$, ainsi que les entiers $n_0, \ldots, n_s$.

Grâce à la proposition 2.2.8, l'image du morphisme canonique $E^{(0)} \to E^{(sm)}/IE^{(sm)}$ est aussi un $K_x$-espace vectoriel de dimension infinie. Il existe donc des éléments $P^{(0)}_{0,s+1}, \ldots, P^{(0)}_{r,s+1} \in p^{s+1}\mathring{E}^{(0)}$ tels que :

(i) la famille $(\overline{P}^{(s+1)}_{0,s+1}, \ldots, \overline{P}^{(s+1)}_{r,s+1})$ soit libre et le $K_x$-espace vectoriel engendré par cette famille soit supplémentaire du $K_x$-espace vectoriel engendré par la famille $\{\overline{P}^{(s+1)}_{i,j}\ ;\ 0 \leqslant i \leqslant r,\ 0 \leqslant j \leqslant s\}$ ;

(ii) pour tous $0 \leqslant i \leqslant r$ et $0 \leqslant j \leqslant s$, $\overline{P}^{(j)}_{i,s+1} \in p^{n_j}\mathring{E}^{(j)}/I\mathring{E}^{(j)}$.



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

Comme la famille $(\overline{P}^{(s+1)}_{0,0}+\cdots+\overline{P}^{(s+1)}_{0,s+1},\ldots,\overline{P}^{(s+1)}_{r,0}+\cdots+\overline{P}^{(s+1)}_{r,s+1})$ est $K_x$-libre, il résulte du lemme 2.2.7 l'existence d'un entier $n_{s+1}$ tel que

$$\begin{aligned}&[\mathcal{V}_x(\overline{P}^{(s+1)}_{0,0}+\cdots+\overline{P}^{(s+1)}_{0,s+1})+\cdots+\mathcal{V}_x(\overline{P}^{(s+1)}_{r,0}+\cdots+\overline{P}^{(s+1)}_{r,s+1})]\cap p^{n_{s+1}}\mathring{E}^{(s+1)}/I\mathring{E}^{(s+1)}\\&\quad\subset p\,[\mathcal{V}_x(\overline{P}^{(s+1)}_{0,0}+\cdots+\overline{P}^{(s+1)}_{0,s+1})+\cdots+\mathcal{V}_x(\overline{P}^{(s+1)}_{r,0}+\cdots+\overline{P}^{(s+1)}_{r,s+1})].\end{aligned}\tag{2.2.10.1}$$

Comme pour $0\leqslant i\leqslant r$ et pour tout $j$, on a $P^{(0)}_{i,j}\in p^j\mathring{E}^{(0)}$, les sommes $P^{(0)}_i:=\sum_j P^{(0)}_{i,j}$ convergent dans $\mathring{E}^{(0)}$. Pour tout entier $m$, par continuité des flèches $E^{(0)}\to E^{(sm)}$, il en résulte que l'on a aussi $P^{(sm)}_i=\sum_j P^{(sm)}_{i,j}$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un entier $m$ et des éléments $\lambda_0,\ldots,\lambda_r\in K_x$ tel que $\sum_{i=0,\ldots,r}\lambda_i\overline{P}^{(sm)}_i=0$. Quitte à multiplier par une puissance adéquate de $\pi_x$ (une uniformisante de $\mathcal{V}_x$), on peut supposer que $\lambda_0,\ldots,\lambda_r\in\mathcal{V}_x$ et que, pour au moins un $i\in\{0,\ldots r\}$, $\lambda_i\in\mathcal{V}_x{}^*$. Or, on a

$$\lambda_0(\overline{P}^{(sm)}_{0,0}+\cdots+\overline{P}^{(sm)}_{0,m})+\cdots+\lambda_r(\overline{P}^{(sm)}_{r,0}+\cdots+\overline{P}^{(sm)}_{r,m})=-\Biggl[\lambda_0\Biggl(\sum_{j\geqslant m+1}\overline{P}^{(sm)}_{0,j}\Biggr)+\cdots+\lambda_r\Biggl(\sum_{j\geqslant m+1}\overline{P}^{(sm)}_{r,j}\Biggr)\Biggr].$$

Comme les éléments de droite de l'égalité ci-dessus appartiennent à $p^{n_m}\mathring{E}^{(sm)}/I\mathring{E}^{(sm)}$, grâce à (2.2.10.1) appliquée à $s+1=m$, il en dérive que $p$ divise $\lambda_i$, pour $i=0,\ldots,r$. On a donc abouti à une contradiction.

On a ainsi prouvé que, pour tout entier $m$, la famille $(\overline{P}^{(sm)}_0,\ldots,\overline{P}^{(sm)}_r)$ est $K_x$-libre.

Finissons la preuve de théorème 2.2.10, i.e., contredisons la première hypothèse par l'absurde. Pour cela, notons pour tout $i$, $\overline{P}_i$, l'image de $\overline{P}^{(0)}_i$ dans $E/IE$. Prouvons à présent que la famille $(\overline{P}_0,\ldots,\overline{P}_r)$ est $K_x$-libre, ce qui contredira le fait que la dimension de $E/IE$ est égale à $r$.

Soient $\lambda_0,\ldots,\lambda_r\in K_x$ tels que $\lambda_0\overline{P}_0+\cdots+\lambda_r\overline{P}_r=0$. On vérifie $E/IE\xrightarrow{\sim}\varinjlim_m E^{(sm)}/IE^{(sm)}$. En effet, le système inductif $(E^{(sm)})_{m\in\mathbb{N}}$ peut être considéré comme un système inductif dans la catégorie des $A$-modules dont la limite inductive est isomorphe à $E$. En lui appliquant le foncteur $A/I\otimes_A -$, qui commute aux limites inductives, on termine la vérification.

Il existe donc un entier $m_0$ tel que l'image de $\lambda_0\overline{P}^{(0)}_0+\cdots+\lambda_r\overline{P}^{(0)}_r$ dans $E^{(sm_0)}/IE^{(sm_0)}$ (i.e. $\lambda_0\overline{P}^{(sm_0)}_0+\cdots+\lambda_r\overline{P}^{(sm_0)}_r$) soit nulle. Comme la famille $(\overline{P}^{(sm_0)}_0,\ldots,\overline{P}^{(sm_0)}_r)$ est $K_x$-libre, il en résulte pour tout $i=0,\ldots,r$, l'égalité $\lambda_i=0$. □

*Remarques* 2.2.11. Berthelot m'a fait remarquer que, comme $\mathcal{V}_x$ est un anneau local noethérien, un $\mathcal{V}_x$-module séparé complet et plat est forcément le complété $p$-adique d'un $\mathcal{V}_x$-module libre (on le voit soit directement, soit en utilisant le lemme 2.2.16 et le fait que « sans $p$-torsion » équivaut à « $\mathcal{V}_x$-plat »). Le théorème 2.2.10 est alors encore valable en remplaçant l'hypothèse « $\mathring{\mathcal{E}}^{(0)}$ est isomorphe au complété $p$-adique d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module libre » par « $\mathring{\mathcal{E}}^{(0)}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-plat ». En effet, via la remarque de Berthelot, on vérifie qu'avec cette nouvelle hypothèse, on a toujours : « $\mathring{E}^{(sm)}/I\mathring{E}^{(sm)}$ est isomorphe au complété $p$-adique d'un $\mathcal{V}_x$-module libre » (par contre, la structure de Frobenius reste indispensable pour valider cette dernière affirmation). On peut ensuite reprendre la suite de la preuve de théorème 2.2.10.

Pour obtenir une description optimale des complexes pseudo-cohérents (confère théorème 2.2.17), on aura besoin du théorème suivant formulé dans [Ber] et qui améliore la caractérisation [Ber96a, 4.4.5] des isocristaux surconvergents.

Théorème 2.2.12 (Berthelot). *On note $\mathfrak{X}_K$ la fibre générique de $\mathfrak{X}$ comme $K$-espace analytique rigide, et* sp *: $\mathfrak{X}_K\to\mathfrak{X}$ le morphisme de spécialisation.*

*Le foncteur* $\mathrm{sp}_*$ *induit une équivalence entre la catégorie des isocristaux sur* $Y$, *surconvergents le long de* $T$, *et celle des* $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)$*-modules cohérents tels que la restriction* $\mathcal{E}_{|\mathcal{Y}}$ *soit* $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$*-cohérente.*

Nous aurons besoin du lemme qui suit afin de prouver la proposition 2.2.14.

Lemme 2.2.13. *On suppose que* $\mathfrak{X}$ *est affine et possède des coordonnées locales. Soit* $\mathcal{E}$ *un* $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$*-module cohérent. Alors* $\mathcal{E}$ *est* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$*-cohérent si et seulement si* $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ *est un* $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$*-module de type fini.*

*Preuve.* D'après [Ber96a, 4.3.2.(ii)], si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent alors $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ est un $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini. Réciproquement, supposons que $E := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$ soit un $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini. Alors, en calquant la démonstration de [Ber96a, 4.1.4], on prouve que pour tout $\eta < 1$, pour tout $e \in E$, on a

$$\| \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \cdot e \| \, \eta^{|\underline{k}|} \to 0 \text{ pour } |\underline{k}| \to \infty, \tag{2.2.13.1}$$

où $\| - \|$ désigne une norme de Banach sur $E$ définie par sa structure de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini. Cette condition (2.2.13.1), est la condition de surconvergence [Ber90, 3.0.1.1]. En reprenant la démonstration [Ber90, 3.1.2], on en déduit alors que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$-module $\mathring{E}^{(m)}$, qui soit en outre un $\Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$-module de type fini et tel que $\mathring{E}^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} E$. Or, on vérifie aisément que le morphisme canonique

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})} \mathring{E}^{(m)} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})} \mathring{E}^{(m)}$$

est un isomorphisme (il s'agit de le voir modulo $\pi^{i+1}$, ce qui est analogue à la remarque [Ber96a, 2.3.5.(iii)]). Puisque $\mathring{E}^{(m)}$ est de type fini en tant que $\Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$-module et par conséquent en tant que $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$-module, les morphismes

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})} \mathring{E}^{(m)} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})} \mathring{E}^{(m)}, \quad \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})} \mathring{E}^{(m)} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})} \mathring{E}^{(m)}$$

sont aussi des isomorphismes. Le morphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})} \mathring{E}^{(m)} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})} \mathring{E}^{(m)}$ est donc un isomorphisme. En tensorisant par $\mathbb{Q}$ cet isomorphisme, puis en passant à la limite inductive sur $m$, il en dérive que le morphisme canonique :

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\Gamma(X, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})} E \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})} E \tag{2.2.13.2}$$

est un isomorphisme. Or, comme $\mathring{E}^{(m)}$ est séparé complet et de type fini sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$, le morphisme $\mathring{E}^{(m)} \to \Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})} \mathring{E}^{(m)}$ est un isomorphisme. En tensorisant par $\mathbb{Q}$, puis en passant à la limite inductive sur $m$, il en découle que le morphisme canonique

$$E \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})} E \tag{2.2.13.3}$$

est un isomorphisme. Or, comme $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent, on a l'isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})} E \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ ([Ber96a, 3.6.5]). Par conséquent, grâce au théorème de type $A$ pour les $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents [Ber96a, 4.3.2.(ii)], on conclut la preuve via (2.2.13.2) et (2.2.13.3). □

Proposition 2.2.14. *Soient* $\mathcal{E}$ *un* $F$-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$*-module cohérent,* $m_0 \geqslant 0$ *un entier et* $\mathcal{E}^{(m_0)}$*, le* $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$*-module cohérent associé à* $\mathcal{E}$ *(voir [Ber96a, 3.6.1]). Alors* $\mathcal{E}$ *est* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$*-cohérent si et seulement si* $\mathcal{E}^{(m_0)}$ *est* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$*-cohérent.*

*Démonstration.* L'assertion est locale et l'on peut supposer que $\mathfrak{X}$ est affine. Si $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent alors $\mathcal{E}$ est associé à un isocristal surconvergent [Ber96a, 4.1.4]. D'après [Ber90, 3.1.4.1 et 3.1.4.2], on obtient alors que $\mathcal{E}^{(m_0)}$ est isomorphe à $\mathcal{E}$.



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

Réciproquement, supposons que $\mathcal{E}^{(m_0)}$ soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent. Alors, pour tout entier $m$, $\mathcal{E}^{(sm+m_0)} \xrightarrow{\sim} F^{*m}\mathcal{E}^{(m_0)}$ est aussi $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent. De plus, puisque $\Gamma(X,\,\mathcal{E}^{(sm+m_0)})$ est un $\Gamma(X,\,\mathcal{O}_{\mathfrak{X}\,\mathbb{Q}})$-module de type fini (théorème de type $A$ [Ber96a, 4.3.2.(ii)]), d'après [BGR84, 3.7.3.1], en munissant $\Gamma(X,\,\mathcal{E}^{(sm+m_0)})$ de la topologie induite par sa structure de $\Gamma(X,\,\mathcal{O}_{\mathfrak{X}\,\mathbb{Q}})$-module de type fini, l'image de $\Gamma(X,\,\mathcal{E}^{(m_0)})$ dans $\Gamma(X,\,\mathcal{E}^{(sm+m_0)})$ est fermée. Or, de manière analogue à 2.2.9, on prouve que l'image de $\Gamma(X,\,\mathcal{E}^{(m_0)})$ dans $\Gamma(X,\,\mathcal{E}^{(sm+m_0)})$ est dense, lorsque $\Gamma(X,\,\mathcal{E}^{(sm+m_0)})$ est muni de la topologie induite par sa structure de $\Gamma(\mathfrak{X},\,\widehat{\mathcal{D}}^{(sm+m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-module de type fini. Mais, grâce à [Ber96a, 4.1.2], ces deux topologies concident. On en déduit que le morphisme canonique $\Gamma(X,\,\mathcal{E}^{(m_0)}) \to \Gamma(X,\,\mathcal{E}^{(sm+m_0)})$ est surjectif.

En passant à la limite sur le niveau $m$, il en résulte la surjectivité de $\Gamma(X,\,\mathcal{E}^{(m_0)}) \to \Gamma(X,\,\mathcal{E})$. D'après le lemme 2.2.13, $\mathcal{E}$ est donc $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent. □

Afin de démontrer le théorème 2.2.17, nous aurons aussi besoin des deux lemmes qui suivent.

Lemme 2.2.15. *Soit $A$ une $\mathcal{V}$-algèbre, $\phi : M' \to M$ un morphisme de $A$-modules. De plus, on suppose que $M$ est sans $\pi$-torsion et que $\phi$ induit un isomorphisme $\overline{\phi} : M'/\pi M' \xrightarrow{\sim} M/\pi M$.*

*Le complété $p$-adique de $\phi$, $\widehat{M'} \to \widehat{M}$, est alors un isomorphisme.*

*Démonstration.* Le fait que $\overline{\phi}$ soit injectif se traduit par l'inclusion $\phi^{-1}(\pi M) \subset \pi M'$. Comme $M$ est sans $\pi$-torsion, on obtient par récurrence sur l'entier $n$, l'inclusion : $\phi^{-1}(\pi^n M) \subset \pi^n M'$.

Le fait que $\overline{\phi}$ soit surjectif se traduit par la relation : $M = \phi(M') + \pi M$. Il en résulte par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$ l'égalité : $M = \phi(M') + \pi^n M$.

$\phi$ induit donc des isomorphismes $\overline{\phi}_n : M'/\pi^n M' \xrightarrow{\sim} M/\pi^n M$. D'où le résultat. □

Lemme 2.2.16. *Soit $A$ un anneau séparé complet pour la topologie $p$-adique, $M$ un $A$-module séparé complet et sans $\pi$-torsion. On suppose que $M/\pi M$ est un $A/\pi A$ -module libre. Il existe alors un $A$-module libre $M'$ et un isomorphisme $A$-linéaire $\widehat{M'} \xrightarrow{\sim} M$.*

*Démonstration.* Par hypothèse, il existe un isomorphisme de la forme $(A/\pi A)^{(J)} \xrightarrow{\sim} M/\pi M$. On relève ce dernier en un morphisme : $A^{(J)} \to M$. Comme celui-ci est un isomorphisme modulo $\pi$, le lemme 2.2.15 nous permet de conclure. □

Théorème 2.2.17. *Soit $\mathcal{E}$ un $F$-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent tel que, pour tout point fermé $x$ de $X$, les espaces de cohomologie de $i^!_x(\mathcal{E})$ sont des $K$-espaces vectoriels de dimension finie. Il existe alors un diviseur $T$ de $X$ tel que $({}^{\dagger}T)(\mathcal{E})$ soit un $F$-isocristal surconvergent le long de $T$.*

*Démonstration.* Il s'agit de prouver l'existence d'un ouvert $\mathcal{Y}$ dense dans $\mathfrak{X}$ au dessus duquel $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent. En effet, comme pour tout ouvert dense $Y$ de $X$, il existe un diviseur de $X$ contenant $X \setminus Y$, cela résulte du théorème 2.2.12. On voit ainsi que le théorème est local en $\mathfrak{X}$ et l'on peut ainsi supposer que $\mathfrak{X}$ est affine et intègre.

Pour tout entier $m$, on désigne par $\mathcal{E}^{(m)}$, le $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent associé à $\mathcal{E}$ (voir [Ber00, 4.5.4]). Il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent sans $\pi$-torsion $\mathring{\mathcal{E}}^{(0)}$ et un isomorphisme $\mathcal{E}^{(0)} \xrightarrow{\sim} \mathring{\mathcal{E}}^{(0)}_{\mathbb{Q}}$ (voir [Ber96a, 3.4.4, 3.4.5, 3.6.2] et [Ber00, 4.5.4]). Le faisceau $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{E}}^{(0)}$ est alors un $\mathcal{D}^{(0)}_X$-module cohérent. De manière analogue à [BGKHME87, VII.9.3], il existe un ouvert affine et dense $Y$ de $X$ au dessus duquel $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{E}}^{(0)}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module libre. En notant $\mathcal{Y}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ d'espace sous-jacent $Y$, il résulte alors de 2.2.16 que $\Gamma(\mathcal{Y},\,\mathring{\mathcal{E}}^{(0)})$ est isomorphe au complété $p$-adique d'un $\Gamma(\mathcal{Y},\,\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$-module libre. Or, on dispose des isomorphismes $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \widehat{\otimes}_{\Gamma(Y,\,\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})} \Gamma(\mathcal{Y},\,\mathring{\mathcal{E}}^{(0)}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}} \widehat{\otimes}_{\Gamma(\mathcal{Y},\,\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})} \Gamma(\mathcal{Y},\,\mathring{\mathcal{E}}^{(0)}) \xleftarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\Gamma(\mathcal{Y},\,\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}})} \Gamma(\mathcal{Y},\,\mathring{\mathcal{E}}^{(0)}) \xrightarrow{\sim} \mathring{\mathcal{E}}^{(0)}_{|\mathcal{Y}}$. Ainsi, $\mathring{\mathcal{E}}^{(0)}_{|\mathcal{Y}}$ est isomorphe au complété $p$-adique d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$-module libre.



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

Quitte à rétrécir $\mathfrak{X}$ en un ouvert dense (en l'occurrence $\mathcal{Y}$), on se ramène ainsi, pour prouver la première phrase de la démonstration, à supposer que $\overset{\circ}{\mathcal{E}}{}^{(0)}$ est isomorphe au complété $p$-adique d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module libre.

Fixons un point fermé $x$ de $X$ et notons $\mathcal{I}$, l'idéal définissant un relèvement de l'immersion fermée canonique induite par $x$. Grâce au théorème 2.2.10 et avec ses notations, il existe alors un entier $m_0$, tel que $E^{(sm_0)}/IE^{(sm_0)}$ soit un $K_x$-espace vectoriel de dimension finie. Or, $\overset{\circ}{\mathcal{E}}{}^{(sm_0)} := F^{*m_0}(\overset{\circ}{\mathcal{E}}{}^{(0)})$ est $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(sm_0)}$-cohérent [Ber02, 3.1.4] et est isomorphe au complété $p$-adique d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module libre. Il découle alors de la proposition 2.2.6(ii) que le faisceau $\overset{\circ}{\mathcal{E}}{}^{(sm_0)}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module libre de type fini.

Ainsi, le faisceau $\mathcal{E}^{(sm_0)} \xrightarrow{\sim} \overset{\circ}{\mathcal{E}}{}^{(sm_0)}_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module libre de type fini. La proposition 2.2.14 nous permet alors de conclure. □

### 2.3 Identification entre holonomie et pseudo-holonomie pour les courbes

Dans cette section, $\mathfrak{X}$ désignera une $\mathcal{V}$-courbe formelle propre et lisse.

On aura alors besoin du lemme suivant immédiat.

Lemme 2.3.1. *Soient $k$ un corps parfait et $Z$ un $k$-schéma réduit de type fini et de dimension* 0. *Alors $Z$ est un $k$-schéma fini et étale.*

Proposition 2.3.2. *Soient $\mathcal{E}$ un $F$-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent et $T$ un diviseur de $X$. En notant $\mathcal{Y}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentaire de $T$, on suppose que $\mathcal{E}|\mathcal{Y}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent. L'isocristal sur $Y$ surconvergent le long de $T$, $({}^{\dagger}T)\mathcal{E}$, est alors $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent.*

*Démonstration.* Notons $f$ le morphisme structural de $\mathfrak{X}$. En notant $E$ l'isocristal sur $Y$ surconvergent le long de $T$ associé à $({}^{\dagger}T)\mathcal{E}$, on dispose d'un isomorphisme $f_+(({}^{\dagger}T)\mathcal{E})[-d_X] \xrightarrow{\sim} H^*_{\mathrm{rig}}(E)$ (voir [Ber90, 4.1.7], [Ber02, 4.3.6.3] et [Ber00, 4.3.4.5]). Comme les espaces de cohomologie rigide des $F$-isocristaux surconvergents sur une courbe lisse sont des $K$-espaces vectoriels de dimension finie (confère [Cre98] et [And02, 0.1.1]), il en est de même des espaces de cohomologie de $f_+(({}^{\dagger}T)\mathcal{E})$.

De plus, comme $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent et que $\mathfrak{X}$ est propre, $f_+\mathcal{E}$ est aussi à cohomologie cohérente (voir [Ber02, 4.3.8]). Or, on dispose du triangle distingué de localisation (1.1.6.5) :

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_T(\mathcal{E}) \to \mathcal{E} \to ({}^{\dagger}T)(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_T(\mathcal{E})[1]. \tag{2.3.2.1}$$

En appliquant le foncteur $f_+$ à ce triangle distingué, on en déduit que le complexe $f_+(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_T(\mathcal{E}))$ est à cohomologie cohérente.

Grâce au lemme 2.3.1, $T$ se relève en un $\mathcal{V}$-schéma formel affine et lisse $\mathcal{T}$. En choisissant un relèvement $\mathcal{T} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathfrak{X}$ de l'immersion fermée canonique $T \hookrightarrow X$, on obtient un isomorphisme canonique $i_+ \circ i^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_T(\mathcal{E})$ (voir [Ber02, 4.4.5]). Il en résulte l'isomorphisme $f_+(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_T(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} (f\circ i)_+(i^!(\mathcal{E}))$. Les espaces de cohomologie de $(f\circ i)_+(i^!(\mathcal{E}))$ sont donc des $K$-espaces vectoriels de dimension finie. Comme $f\circ i$ est un morphisme fini et étale entre $\mathcal{V}$-schémas formels lisses de dimension 0, il en est de même pour le complexe $i^!(\mathcal{E})$. Comme $i_+$ préserve la cohérence, le complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_T(\mathcal{E})$ est à cohomologie cohérente. Il résulte alors de (2.3.2.1) qu'il en est de même de $({}^{\dagger}T)(\mathcal{E})$. □

Théorème 2.3.3. *Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout point fermé $x$ de $\mathfrak{X}$, les espaces de cohomologie de $i^!_x(\mathcal{E})$ sont des $K$-espaces vectoriels de dimension finie.*
2. *Pour tout diviseur $T$ de $X$, $({}^{\dagger}T)\mathcal{E} \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$.*
3. $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$.
4. *Pour tout diviseur $T$ de $X$, $({}^{\dagger}T)\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$.*



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

*Démonstration.* L'équivalence entre les deux premières assertions résulte aussitôt des triangles de localisation (1.1.6.5) de $\mathcal{E}$ et de [Ber02, 4.4.5].

Montrons que $1 \Rightarrow 3$. Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ vérifiant la condition 1. Il résulte du théorème 2.2.17, qu'il existe un ouvert dense $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{E}|_{\mathfrak{Y}}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent. D'après [Ber02, 5.3.5.(i)], $\mathcal{E}$ vérifie alors la condition 3.

Montrons maintenant que $3 \Rightarrow 1$. Grâce à [Ber02, 5.3.5.(i)], il existe un diviseur $T$ de $X$ tel que les espaces de cohomologie de $({}^{\dagger}T)\mathcal{E}$ sont des $F$-isocristaux surconvergents le long de $T$. Si $x$ est un point fermé de $X$ n'appartenant pas à $T$, comme $\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent en dehors de $T$, les espaces de cohomologie de $i^{!}_{x}(\mathcal{E})$ sont des $K$-espaces vectoriels de dimension finie.

Or, il résulte aussitôt de la proposition 2.3.2 que $({}^{\dagger}T)\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Si $x$ est un point fermé de $T$, grâce au triangle de localisation en $T$ de $\mathcal{E}$, il en résulte alors que les espaces de cohomologie de $i^{!}_{x}(\mathcal{E})$ sont des $K$-espaces vectoriels de dimension finie.

On a donc prouvé l'équivalence des assertions 1, 2 et 3. De plus, $4 \Rightarrow 3$ est immédiat. Terminons par une démonstration de l'implication $3 \Rightarrow 4$. Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Comme $3 \Rightarrow 2$, pour tout diviseur $T \neq \emptyset$ de $X$, $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}(\mathcal{E}) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Comme celui-ci est à support dans $T$, de dimension 0, on a en fait $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}(\mathcal{E}) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Grâce au triangle de localisation de $\mathcal{E}$ en $T$, on en déduit que $({}^{\dagger}T)\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. $\square$

Corollaire 2.3.4. *Soit $T$ un diviseur de $X$. Les deux catégories $F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ et $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$ sont égales.*

*Démonstration.* Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. Il découle du théorème 2.3.3 que $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. Grâce à [Vir00, II.4], il en dérive $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. En utilisant à nouveau le théorème 2.3.3, on obtient $({}^{\dagger}T) \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. L'isomorphisme de bidualité [Vir00, I.3] et la commutation à l'extension des scalaires du foncteur dual [Vir00, I.4] donnent $({}^{\dagger}T) \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. D'où $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. On établit la réciproque avec les mêmes arguments. $\square$

## 3. Fonctions $L$ associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

Sauf mention explicite du contraire, on gardera les hypothèses et notations suivantes. On se donne $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, $T$ un diviseur de $X$, $\mathfrak{Y}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentaire de $T$ et $j : \mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ l'immersion ouverte correspondante.

Si $x$ est un point fermé de $X$, on désigne par $k(x)$ le corps résiduel de $x$, $\deg x$ son degré, $i_x$ : $\mathcal{S}(x) = \operatorname{Spf} \mathcal{V}(x) \hookrightarrow \mathfrak{X}$ un relèvement $\mathcal{V}$-linéaire de la $k$-immersion fermée canonique $\operatorname{Spec} k(x) \hookrightarrow X$, $K(x) := \operatorname{Frac}\mathcal{V}(x)$ et $f_x : \mathcal{S}(x) \to \mathcal{S}$ le morphisme structural. On remarque alors que le morphisme $f_x$ est fini et étale. Le foncteur $f_{x,+}$ est donc canoniquement isomorphe au foncteur exact $f_{x,*}$, i.e., au foncteur oubli de la catégorie des $K(x)$-espaces vectoriels dans celle des $K$-espaces vectoriels. Pour alléger les notations, on omettra d'écrire $f_{x+}$.

### 3.1 Définitions et conjecture cohomologique des fonctions $L$

Définition 3.1.1. Soient $S$ est un sous-ensemble de $Y$, $S^0$ l'ensemble des points fermés de $S$ et $(\mathcal{E},\ \Phi) \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$. On définit la fonction $L$ associée à $\mathcal{E}$ au dessus de $S$ en posant :

$$L(S,\mathcal{E},t) = \prod_{y \in S^0} \prod_{r \in \mathbb{Z}} \det_K(1 - t^{\deg y} F^{\deg y}_{|H^r(i^{+}_{y,T}(\mathcal{E}))})^{(-1)^{r+1+d_X}/\deg y}.$$

*Remarques* 3.1.2. Soient $x$ un point fermé de $X$, $\mathcal{I}$ désigne l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ définissant $i_x$ et $\mathcal{E} \in \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\bullet)}_{\mathfrak{X}}(T))$. Comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-plat [Ber96a, 4.3.2.(ii)] et $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent [Ber96b],



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

d'après le lemme 2.2.3, on dispose de l'isomorphisme $i_x^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})[d_{\mathfrak{X}}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$. De plus,

$$i_x^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} i_x^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} i_x^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}(x),\mathbb{Q}}} i_x^! \mathcal{E}[d_X], \tag{3.1.2.1}$$

l'isomorphisme de gauche résultant de § 1.1.8 tandis que le second se vérifie en ramenant aux schémas $X_i$.

Supposons maintenant que $x$ est un point fermé de $T$. On calcule alors $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(T)/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(T) = 0$. Il en découle $i_x^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) = 0$ puis, via (3.1.2.1), $i_x^!(\mathcal{E}) = 0$.

Nous remarquons aussi que lorsque $x$ est un point fermé de $T$, puisque $i_x^{-1}(T)$ n'est pas un diviseur de $x$, les foncteurs $i_{x,T}^!$ et $i_{x,T}^+$ n'ont pas été définis (mais on pourrait les définir comme étant égaux aux foncteurs nuls). C'est la raison pour laquelle nous prenons $S$ inclus dans $Y$ dans la définition de la fonction $L$ pour un complexe $(\mathcal{E},\ \Phi) \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$.

Définition 3.1.3. La fonction cohomologique $P$ associée à $(\mathcal{E},\ \Phi) \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ s'écrit :

$$P(\mathcal{Y},\mathcal{E},t) := \prod_{r\in\mathbb{Z}} \det_K(1 - tF_{|H^r(f_{T,!}\mathcal{E})})^{(-1)^{r+1+d_X}}.$$

On en arrive alors à l'énoncé de la conjecture suivante.

Conjecture 3.1.4. On se donne un complexe $(\mathcal{E},\ \Phi) \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. On conjecture l'égalité :

$$L(\mathcal{Y},\mathcal{E},t) = P(\mathcal{Y},\mathcal{E},t).$$

Si $(\mathcal{E},\ \Phi)$ vérifie l'équation $L(\mathcal{Y},\mathcal{E},t) = P(\mathcal{Y},\mathcal{E},t)$, on dira alors que $(\mathcal{E},\ \Phi)$ satisfait la propriété $L = P$.

Lorsque $\mathfrak{X}$ est une courbe, on établira, via le théorème 3.4.1, que la conjecture 3.1.4 est vérifiée.

## 3.2 Premières propriétés des fonctions $L$

Proposition 3.2.1. *Soit $\mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'[1]$ un triangle distingué de $F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. On a alors les deux égalités*

$$L(\mathcal{Y},\mathcal{E},t) = L(\mathcal{Y},\mathcal{E}',t) \times L(\mathcal{Y},\mathcal{E}'',t), \tag{3.2.1.1}$$
$$P(\mathcal{Y},\mathcal{E},t) = P(\mathcal{Y},\mathcal{E}',t) \times P(\mathcal{Y},\mathcal{E}'',t). \tag{3.2.1.2}$$

*Démonstration.* Commençons par la première égalité. Soit $y$ un point fermé de $Y$. Comme le foncteur $i^+_{y,T}$ est un $\partial$-foncteur, on obtient le triangle distingué : $i^+_{y,T}\mathcal{E}' \to i^+_{y,T}\mathcal{E} \to i^+_{y,T}\mathcal{E}'' \to i^+_{y,T}\mathcal{E}'[1]$ . En appliquant le foncteur cohomologique $H^0$ on en déduit une suite exacte longue. En écrivant l'action fonctorielle de l'automorphisme de Frobenius sur celle-ci et en utilisant le caractère multiplicatif du déterminant, la première égalité en résulte. On procède de même pour la deuxième égalité. □

Proposition 3.2.2. *Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, $T \subset T'$ deux diviseurs de $X$, $\mathcal{Y}$ (respectivement $\mathcal{Y}'$) l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentaire de $T$ (respectivement $T'$). On se donne un complexe $(\mathcal{E}',\ \Phi') \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T'))$. On vérifie alors que $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}') \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ et l'on obtient les égalités :*

$$L(\mathcal{Y}',\mathcal{E}',t) = L(\mathcal{Y},\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}'),t), \tag{3.2.2.1}$$
$$P(\mathcal{Y}',\mathcal{E}',t) = P(\mathcal{Y},\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}'),t). \tag{3.2.2.2}$$

*Démonstration.* Tout d'abord, grâce à § 1.2.19, $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}') \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}\vee}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. Fixons un point fermé $y$ de $Y$. D'après la proposition 1.1.10 et § 1.2.2, on dispose d'isomorphismes



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

canoniques $i^!_{y,T} \xrightarrow{\sim} i^!$ et $i^!_{y,T'} \xrightarrow{\sim} i^!$ compatibles à Frobenius. Grâce au théorème de bidualité de Virrion [Vir00, II.3.5], on obtient alors l'isomorphisme compatible à Frobenius:

$$i^+_{y,T}(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}')) = \mathbb{D}_{\mathcal{S}(y)} \circ i^!_y \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}')) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathcal{S}(y)} \circ i^!_y(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}')). \tag{3.2.2.3}$$

Le cas où $y \notin Y'^0$ implique, grâce à la remarque 3.1.2, l'égalité $i^!_y(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}')) = 0$. Via (3.2.2.3), il s'en suit $i^+_{y,T}(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}')) = 0$. Le second cas, celui où $y \in Y'^0$, entraîne $i^+_{y,T}(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}')) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathcal{S}(y)} \circ i^!_y(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}')) \xrightarrow{\sim} i^+_{y,T'}(\mathcal{E}')$.

Il résulte de l'étude de ces deux cas que $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}') \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. En outre, on obtient la formule $L(\mathcal{Y}', \mathcal{E}', t) = L(\mathcal{Y}, \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}'), t)$.

Enfin, l'égalité (3.2.2.2) découle du fait que $f_{T',!} \xrightarrow{\sim} f_{T,!} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}$ (grâce au théorème de bidualité de Virrion [Vir00, II.3.5]). □

La proposition suivante montre que les fonctions $L$ et $P$ se comportent bien vis à vis des images directes extraordinaires par une immersion fermée.

Proposition 3.2.3. *Soient $u : \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels propres et lisses, $T$ un diviseur de $X$ tel que la trace $T_Z$ de $T$ sur $Z$ soit un diviseur de $Z$ et $\mathcal{Y}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ d'espace sous-jacent le complémentaire de $T$.*

*Si $(\mathcal{E}, \Phi)$ est un complexe de $F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z},\mathbb{Q}}({}^\dagger T_Z))$, alors $u_{T,!}\mathcal{E} \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$ et l'on obtient les égalités :*

$$L(\mathcal{Y}, u_{T,!}\mathcal{E}, t)^{(-1)^{d_{Z/X}}} = L(\mathcal{Z} \cap \mathcal{Y}, \mathcal{E}, t), \tag{3.2.3.1}$$

$$P(\mathcal{Y}, u_{T,!}\mathcal{E}, t)^{(-1)^{d_{Z/X}}} = P(\mathcal{Z} \cap \mathcal{Y}, \mathcal{E}, t). \tag{3.2.3.2}$$

*Démonstration.* Tout d'abord, comme les deux foncteurs $u_+$ et $u_{T,+}$ sont isomorphes (proposition 1.1.9) et puisque le foncteur $u_+$ (respectivement $u_{T,+}$) préserve la $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z},\mathbb{Q}}$-cohérence (respectivement la $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z},\mathbb{Q}}({}^\dagger T_Z)$-cohérence), on vérifie que $u_{T,!}\mathcal{E} \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}\vee}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. Or, en dualisant le morphisme d'adjonction : $Id \to u^!_T u_{T,+}$ (§ 1.2.13), comme $u$ est une immersion fermée (§ 1.2.13), on obtient l'isomorphisme $u^+_T \circ u_{T,!}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. Il en dérive que $u_{T,!}\mathcal{E}$ est à fibres finies et donc que $u_{T,!}\mathcal{E} \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$.

Traitons à présent l'égalité 3.2.3.1. Comme $u_{T,!}\mathcal{E}$ est à support dans $\mathcal{Z}$, on obtient

$$L(\mathcal{Y},\, u_{T,!}\mathcal{E}, t) = L(\mathcal{Z} \cap \mathcal{Y},\, u_{T,!}\mathcal{E}, t).$$

Comme l'isomorphisme de composition des images inverses (extraordinaires) est compatible à Frobenius (voir § 1.2.2), il découle alors de l'isomorphisme $u^+_T \circ u_{T,!}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ l'égalité (3.2.3.1).

Enfin, en dualisant (1.2.22.3), on obtient l'isomorphisme $p_{T,!} \circ u_{T,!}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (p \circ u)_{T_Z,!}(\mathcal{E})$ compatible à l'action de Frobenius, où $p : \mathfrak{X} \to \mathcal{S}$ désigne le morphisme structural de $\mathfrak{X}$. D'où la formule (3.2.3.2). □

On vérifie le lemme suivant.

Lemme 3.2.4. *Soit $V_2^{r,s} \Rightarrow V^n$ une suite spectrale de $K$-espaces vectoriels de dimension finie telle que $V_2^{r,s} = 0$, sauf pour un nombre fini de couples $(r,\, s)$. On se donne de plus un endomorphisme $\theta = (\theta_2^{r,s}, \theta^n)$ de la suite spectrale $V_2^{r,s} \Rightarrow V^n$. Pour tout entier $N$, on a alors l'égalité dans $K[t]$ :*

$$\prod_{r,s} \det_K(1 - t^N \theta_2^{r,s})^{(-1)^{r+s+1}} = \prod_n \det_K(1 - t^N \theta^n)^{(-1)^{n+1}}.$$



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

Proposition 3.2.5. *Pour tout* $(\mathcal{E},\Phi)\in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}T))$, *on a les égalités*

$$L(\mathcal{Y},\mathcal{E},t)=\prod_{s}L(\mathcal{Y},\mathcal{H}^{s}(\mathcal{E}),t)^{(-1)^{s}},\quad P(\mathcal{Y},\mathcal{E},T)=\prod_{s}P(\mathcal{Y},\mathcal{H}^{s}(\mathcal{E}),T)^{(-1)^{s}}.$$

*Démonstration.* Commençons par l'égalité relative à la fonction $L$. Pour chaque point fermé $y$ de $Y$, l'action de Frobenius commute à la suite spectrale

$$H^{r}(i^{+}_{y,T})(\mathcal{H}^{s}(\mathcal{E}))\Rightarrow H^{r+s}(i^{+}_{y,T})(\mathcal{E}).$$

Le lemme 3.2.4, appliqué à $\theta=F^{\deg y}$ et à $N=\deg(y)$, donne alors l'égalité

$$\prod_{r,s}\det{}_{K}(1-t^{\deg y}F^{\deg y}_{|H^{r}i^{+}_{y,T}(\mathcal{H}^{s}(\mathcal{E}))})^{(-1)^{r+s+1}}=\prod_{n}\det{}_{K}(1-t^{\deg y}F^{\deg y}_{|H^{n}i^{+}_{y,T}(\mathcal{E})})^{(-1)^{n+1}}.$$

En mettant l'égalité ci-dessus à la puissance $(-1)^{d_X}/\deg y$, puis en faisant le produit sur tous les points fermés de $Y$, on en déduit la première égalité.

De même, pour l'égalité relative à la fonction $P$, il suffit d'appliquer le lemme 3.2.4 à la suite spectrale $H^{r}f_{T,!}(\mathcal{H}^{s}(\mathcal{E}))\Rightarrow H^{r+s}f_{T,!}(\mathcal{E})$ pour $\theta=F$ et $N=1$. □

### 3.3 Lien avec les fonctions $L$ associées aux $F$-isocristaux surconvergents

On note $\mathfrak{X}_K$ la fibre générique de $\mathfrak{X}$, qui est un $K$-espace analytique rigide, et $\mathrm{sp}:\mathfrak{X}_K\to\mathfrak{X}$ le morphisme de spécialisation.

Soit $(E,\Phi)$ un $F$-isocristal sur $Y$ surconvergent le long de $T$. Pour tout point fermé $y$ de $Y$, soient $E_y:=H^{0}_{\mathrm{rig}}(\operatorname{Spec}k(y),i^{*}_{y,K}E)$ la fibre de $E$ en $y$ et $F_{|E_y}$ son automorphisme de Frobenius.

Dans [ÉL93, 2.3], la fonction $L$ associée à $(E,\Phi)$ est donnée par

$$L(Y,E,t):=\prod_{y\in Y^{0}}\det{}_{K}(1-t^{\deg y}F^{\deg y}_{|E_y})^{-1/\deg y}.$$

Proposition 3.3.1. *Avec les notations ci-dessus, on a l'égalité :*

$$L(Y,E^{\vee},t)=L(\mathcal{Y},\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathrm{sp}_{*}E),t).$$

*Démonstration.* Soient $y$ un point fermé de $Y$. En notant de même sp le morphisme de spécialisation de $\operatorname{Spf}\mathcal{V}(y)$, Noot-Huyghe construit dans [NH95, 1.5] un isomorphisme canonique fonctoriel en $E$ : $\mathrm{sp}_{*}\circ i^{*}_{y,K}(E)\xrightarrow{\sim}i^{!}_{y\,T}\circ\mathrm{sp}_{*}(E)[d_{\mathfrak{X}}]$. Comme, dans l'équivalence de catégorie de théorème 2.2.12, $\mathrm{sp}^{*}$ est un foncteur quasi-inverse de $\mathrm{sp}_{*}$ , on vérifie que $\mathrm{sp}_{*}\circ i^{*}_{y,K}(E)\xrightarrow{\sim}i^{!}_{y\,T}\circ\mathrm{sp}_{*}(E)[d_{\mathfrak{X}}]$ est compatible à Frobenius.

En outre, comme $E$ est un $j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}$-module localement libre de type fini (où $j^{\dagger}$ est le foncteur des germes de sections surconvergentes le long de $T$ (voir [Ber96c, 2.1.1.1])), on dispose d'un isomorphisme $K(y)$-linéaire compatible à Frobenius : $\mathrm{sp}_{*}\circ i^{*}_{y,K}(E^{\vee})\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}_{\mathcal{S}(y)}\circ\mathrm{sp}_{*}\circ i^{*}_{y,K}(E)$. D'où : $\mathrm{sp}_{*}\circ i^{*}_{y,K}(E^{\vee})\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}_{\mathcal{S}(y)}\circ i^{!}_{y,\,T}(\mathrm{sp}_{*}E)[d_{\mathfrak{X}}]$. En utilisant l'isomorphisme compatible à Frobenius $i^{+}_{y,T}(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathrm{sp}_{*}E))\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}_{\mathcal{S}(y)}\circ i^{!}_{y,\,T}(\mathrm{sp}_{*}E)$, on conclut alors la démonstration. □

*Remarques* 3.3.2. Avec les notations de la proposition 3.3.1, on dispose d'après [Car05] d'un isomorphisme $\mathrm{sp}_{*}(E^{\vee})\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}\mathrm{sp}_{*}(E)$. Cependant, afin d'obtenir sa compatibilité à Frobenius, il faut rajouter un twist, i.e., il existe un isomorphisme canonique $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}}\mathrm{sp}_{*}(E^{\vee})\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathrm{sp}_{*}(E))$ compatible à Frobenius.

Le lemme qui suit précise [Ber90, 4.1.7].

Lemme 3.3.3. *Soit $E$ un isocristal surconvergent sur $Y$. L'isomorphisme canonique*

$$H^{r}_{\mathrm{rig}}(Y/K,E)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Ext}^{r}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},\mathrm{sp}_{*}E)\tag{3.3.3.1}$$

*commute à l'action de Frobenius.*



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

*Démonstration.* Quitte à faire de la descente cohomologique, on se ramène au cas où l'endomorphisme de Frobenius de $X$ se relève en un morphisme $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$. Comme $T$ est un diviseur, le morphisme canonique $\mathrm{sp}_*(E) \to \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(E)$ est un isomorphisme. D'où l'isomorphisme $H^r_{\mathrm{rig}}(Y/K, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^r_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \mathrm{sp}_*E)$ (confère [Ber90, 4.1.7]). De plus, l'action de Frobenius sur $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \mathrm{sp}_*E)$ est la même que celle définie par fonctorialité sur le complexe de de Rham de $\mathrm{sp}_*E$ (voir (1.3.1.1)). Comme l'action de Frobenius sur la cohomologie rigide est aussi définie par fonctorialité sur le complexe de de Rham, on en déduit le lemme. □

Théorème 3.3.4. *Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. On suppose que les espaces de cohomologie de $\mathcal{E}$ sont associés à des $F$-isocristaux sur $Y$ surconvergents le long de $T$. Alors $\mathcal{E}$ vérifie la conjecture $L = P$.*

*Démonstration.* Grâce à la proposition 3.2.5 et à [Car05, 2.2.13], on se ramène au cas où $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E})$ est de la forme $\mathrm{sp}_*(E)$, avec $E$ un $F$-isocristal sur $Y$ surconvergent le long de $T$. Or, les fonctions $L$ et $P$ sont additives en $\mathfrak{X}$ et commutent aux changements de base (pour la fonction $P$, cela résulte de [Ber02, 2.4.2], de [Ber00, 3.2.1] et de [Vir00, I.4]). Quitte à faire une extension du corps de base, on peut donc supposer $\mathfrak{X}$ géométriquement connexe. Or, via la proposition 3.3.1 puis la formule cohomologique [ÉL93, 6.3.II] d'Étesse et Le Stum, on obtient :

$$L(\mathcal{Y},\, \mathcal{E},\, t) = L(Y,\, E^\vee,\, t) = \prod_{r=0}^{2d_{\mathfrak{X}}} \det_K(1 - tq^{d_{\mathfrak{X}}} F^{-1}_{|H^r_{\mathrm{rig}}(Y,\,E)})^{(-1)^{r+1}}. \tag{3.3.4.1}$$

De plus, grâce à théorème 1.2.25 et au théorème de bidualité compatible à Frobenius (voir [Vir00, II.3.5]), on dispose d'un isomorphisme canonique compatible à Frobenius

$$H^{r-d_{\mathfrak{X}}}(f_{T,!}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^r_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}),\, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}).$$

Or, il résulte du théorème de dualité de Poincaré 1.3.5, que si $\lambda_1, \dots, \lambda_{d_{\mathfrak{X}}}$ sont les valeurs propres de l'action de Frobenius sur $\mathrm{Ext}^{2d_{\mathfrak{X}}-r}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}))$, alors $q^{d_{\mathfrak{X}}}/\lambda_1, \dots, q^{d_{\mathfrak{X}}}/\lambda_{d_{\mathfrak{X}}}$ sont les valeurs propres de l'action de Frobenius sur $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}),\, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Grâce au lemme 3.3.3 et comme $(-1)^{2d_{\mathfrak{X}}-r+1} = (-1)^{r+1}$, il en résulte la formule :

$$\det_K(1 - tq^{d_{\mathfrak{X}}} F^{-1}_{|H^{2d_{\mathfrak{X}}-r}_{\mathrm{rig}}(Y,E)})^{(-1)^{2d_{\mathfrak{X}}-r+1}} = \det_K(1 - tF_{|H^{r-d_{\mathfrak{X}}}(f_{T,!}(\mathcal{E}))})^{(-1)^{r+1}}.$$

En faisant le produit sur $r$, on obtient alors l'égalité de fonctions cohomologiques :

$$\prod_{r=0}^{2d_{\mathfrak{X}}} \det_K(1 - tq^{d_{\mathfrak{X}}} F^{-1}_{|H^r_{\mathrm{rig}}(Y,E)})^{(-1)^{r+1}} = P(\mathcal{Y},\, \mathcal{E},\, t).$$

On conclut via (3.3.4.1). □

### 3.4 Formule cohomologique des fonctions $L$ dans le cas des courbes

Théorème 3.4.1. *On suppose que $d_X \leqslant 1$. Alors, la propriété $L = P$ (voir 3.1.4) est vérifiée pour tout complexe $(\mathcal{E},\ \Phi) \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$.*

*Démonstration.* Soit $(\mathcal{E},\ \Phi) \in F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T))$. La proposition 3.2.2 nous donne les égalités : $L(\mathcal{Y}, \mathcal{E}, t) = L(\mathfrak{X}, \mathbb{D}_{\mathfrak{X}} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}), t)$ et $P(\mathcal{Y}, \mathcal{E}, t) = P(\mathfrak{X}, \mathbb{D}_{\mathfrak{X}} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}), t)$. On se ramène donc au cas où $T = \emptyset$.

Rappelons que d'après le corollaire 2.3.4 les deux catégories $F\text{-}\widetilde{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ et $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ sont égales. De plus, grâce à la proposition 3.2.5, on peut supposer que $\mathcal{E}$ est un $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome.



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

Il résulte des théorèmes 2.2.17 et 2.3.3, qu'il existe un diviseur réduit $Z$ de $X$ tel que $({}^\dagger Z)\mathcal{E}$ soit un $F$-isocristal sur $X \setminus Z$ surconvergent le long de $Z$.

D'après le lemme 2.3.1, $Z$ est un $k$-schéma affine et lisse. On peut donc relever l'immersion fermée canonique $Z \hookrightarrow X$ en une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses $i : \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$. Avec l'aide de (1.2.14.1), le triangle de localisation de $\mathcal{E}$ en $Z$ (1.1.6.5) s'écrit alors

$$i_+ \circ i^!(\mathcal{E}) \to \mathcal{E} \to ({}^\dagger Z)(\mathcal{E}) \to i_+ \circ i^!(\mathcal{E})[1]. \tag{3.4.1.1}$$

Or, le théorème 3.3.4 nous dit que $({}^\dagger Z)(\mathcal{E})$, qui est un $F$-isocristal surconvergent, vérifie la conjecture $L = P$. Comme $i_+ \circ i^!(\mathcal{E})$ est à support dans $Z$, il est de la forme $i_!(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est un $F$-isocristal convergent sur $Z$. Il résulte alors de la proposition 3.2.3, que la conjecture $L = P$ est vérifiée pour $i_+ \circ i^!(\mathcal{E})$. On termine alors la preuve grâce au triangle distingué (3.4.1.1) et à la proposition 3.2.1. □

## 4. Holonomie des *F*-isocristaux surconvergents sur les courbes

Grâce à la proposition 2.3.2, nous prouvons dans cette section que la conjecture énoncée dans [Ber02, 5.3.6.D] est validée pour les courbes propres et lisses.

### 4.1 *F*-isocristaux convergents et $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur les log-schémas formels

On appellera *$F$-isocristal convergent sur un log-schéma $(X,\ M)$ fin et de type fini sur $k$*, un $F$-isocristal sur le site convergent de $(X,\ M)$ zariskien ou étale (voir [Shi02, 2.1.3 et 2.1.19]).

Rappelons que Montagnon construit dans [Mon02] les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de niveau $m$ sur les schémas logarithmiques fins et log-lisses. En calquant la construction non logarithmique [Ber96a], on en déduit par complétion, tensorisation par $\mathbb{Q}$ et passage à la limite sur le niveau la construction du faisceau d'anneaux $\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X},M),\mathbb{Q}}$, où $(\mathfrak{X}, M)$ désigne un $\mathcal{V}$-schéma formel logarithmique log lisse et fin.

Il résulte de la section [Ber96a, 3] et de la structure locale des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{(\mathfrak{X},M),\mathbb{Q}}$ donnée par Montagnon [Mon02] que ceux-ci sont cohérents. Les théorèmes [Ber96a, 3.5.3 et 4.3.5] se généralisent alors au cas des log-schémas : les extensions $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{(\mathfrak{X},M),\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{(\mathfrak{X},M),\mathbb{Q}}$ sont donc plates. Par passage à la limite sur le niveau, le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X},M),\mathbb{Q}}$ est donc cohérent.

Remarquons que par fonctorialité, le morphisme canonique $(\mathfrak{X}, M) \to \mathfrak{X}$ induit un morphisme d'anneaux $\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X},M),\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$.

Proposition 4.1.1. *Soit $(\mathfrak{X},\ M)$ un log-schéma formel lisse. Le foncteur* $\mathrm{sp}_*$ *induit une équivalence entre la catégorie des isocristaux convergents sur $(X,\ M)$ et celle des $\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X},M),\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérents.*

*Démonstration.* Il s'agit de recopier [Ber96a, 4.1.4]. □

### 4.2 La conjecture de monodromie génériquement finie

Rappelons la conjecture suivante énoncée par Shiho dans [Shi02, 3.1.8] (ou Tsuzuki dans [Tsu02, 1.3.1]) que l'on peut nommer la *conjecture de monodromie génériquement finie* :

Conjecture 4.2.1. Soit $Y$ un $k$-schéma lisse séparé de type fini et $E$ un $F$-isocristal surconvergent sur $Y$. Il existe alors :

(i) un morphisme propre, surjectif, génériquement étale $g : Y_1 \to Y$ ;

(ii) une immersion ouverte $j_1 : Y_1 \hookrightarrow X_1$ dans une variété projective lisse telle que $D_1 := X_1 \setminus Y_1$ soit un diviseur à croisements normaux de $X_1$ ;

(iii) un isocristal convergent $G_1$ sur $(X_1, M_1)$ (où $M_1$ est la log structure associée à $(X_1, D_1)$) sur $\mathrm{Spf}\,\mathcal{V}$,

tels que $j^\dagger(G_1) \xrightarrow{\sim} g^*E$.

Dans le cas des courbes, Kedlaya (voir [Ked03, 1.1]) a prouvé cette conjecture. Dans le langage des $\mathcal{D}$-modules, celle-ci se réécrit :

Théorème 4.2.2. *Soient $\mathfrak{X}$ une $\mathcal{V}$-courbe formelle propre et lisse, $T$ un diviseur de $X$, $\mathfrak{Y}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentaire de $T$ et $\mathcal{E}$ un $F$-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent qui soit en outre $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-cohérent. Il existe alors :*

(i) *un morphisme fini, surjectif et génériquement étale de $\mathcal{V}$-courbes formelles lisses $f : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}$ ;*

(ii) *un diviseur $T_1$ de $X_1$ tel que $f^{-1}(T) \subset T_1$ ;*

(iii) *un $\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X}_1, M_1),\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$-cohérent $\mathcal{G}_1$ (où $M_1$ est la structure logarithmique induite par le diviseur $T_1$ sur $X_1$) ;*

*tels que $f^!_{T_1,T}(\mathcal{E})$ provienne de $\mathcal{G}_1$, i.e., qu'il soit isomorphe à $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X}_1,M_1),\mathbb{Q}}} \mathcal{G}_1$.*

*Démonstration.* Notons $E$ le $F$-isocristal surconvergent sur $Y$ associé à $\mathcal{E}$ (théorème 2.2.12). Grâce à Kedlaya [Ked03, 1.1], il existe un morphisme fini, génériquement étale et surjectif $g : Y_1 \to Y$, une immersion ouverte $Y_1 \hookrightarrow X_1$ dans une variété propre et lisse, un isocristal convergent $G_1$ sur $(X_1, M_1)$ (où $M_1$ est la log structure associée à $(X_1, X_1 \setminus Y_1)$) sur $\mathrm{Spf}\,\mathcal{V}$, tels que $j^\dagger(G_1) \xrightarrow{\sim} g^*E$. Notons $\mathcal{G}_1$ le $\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X},M),\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent associé à $G_1$ (proposition 4.1.1).

Le morphisme $g$ se prolonge de manière unique en un morphisme fini $f_0 : X_1 \to X$. Grâce au lemme [Cre98, 8.3] de Crew, $f_0$ se relève en un morphisme $f : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}$, où $\mathfrak{X}_1$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et plat. Les réductions modulo $\pi^{i+1}$ de $\mathfrak{X}_1$ sont donc lisses sur $S_i$ (car celles-ci sont plates et leur unique fibre, $X_1$, est lisse : voir [SGA1, II.2.1]). Ainsi, $\mathfrak{X}_1$ est lisse. De même, on vérifie via [SGA1, I.5.9] que $f$ est fini et génériquement étale.

En posant $T_1 := X_1 \backslash Y_1$, d'après [NH95, 1.5], $\mathrm{sp}_*(g^*E) \xrightarrow{\sim} f^!_{T_1,T}(\mathcal{E})$. De plus, de manière analogue au cas où la log-structure $M_1$ est triviale, $\mathrm{sp}_* j^\dagger(G_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}} \mathcal{G}_1$. Prouvons à présent que le morphisme canonique $\rho : \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}} \mathcal{G}_1 \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X}_1,M_1),\mathbb{Q}}} \mathcal{G}_1$ est un isomorphisme. Comme le morphisme canonique $\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X}_1,M_1),\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme en dehors de $T_1$, par théorème 2.2.12, on vérifie que les deux termes de $\rho$ sont $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}}$-cohérents. Par [Ber90, 3.1.4.2], $\rho$ est un isomorphisme en dehors de $T_1$. Il en découle que $\rho$ est un isomorphisme (via [Ber96a, 4.3.10.1]). □

### 4.3 Preuve

On s'inspire de la preuve de la $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérence de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ (voir [Ber96b]). On remplace le théorème de désingularisation de de Jong [Dej96] par le théorème de monodromie génériquement finie.

Proposition 4.3.1. *Soient $f : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}$ un morphisme propre, surjectif et génériquement étale de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, $T$ un diviseur de $X$. Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent et $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-cohérent.*

*Si $f^!_T\mathcal{E}$ est à cohomologie $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$-cohérente, alors $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent.*

*Démonstration.* Notons $E$ le $F$-isocristal sur $X \setminus T$ surconvergent le long de $T$ associé à $\mathcal{E}$ et $f_K : \mathfrak{X}_{1K} \to \mathfrak{X}_K$ le morphisme induit par $f$ sur les fibres génériques. Comme $d_{X_1} = d_X$, d'après [NH95, 1.5], on a un isomorphisme canonique $\mathrm{sp}_* \circ f^*_K(E) \xrightarrow{\sim} f^!_T(\mathcal{E})$. Or, l'image inverse d'un isocristal surconvergent commute au foncteur dual. Comme en outre le foncteur $\mathrm{sp}_*$ commute aux foncteurs duaux respectifs (remarques 3.3.2), on en déduit un isomorphisme canonique $f^!_T\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} f^+_T\mathcal{E}$. Comme $f$ est un morphisme propre, $f_{T,+}$ est adjoint à gauche de $f^!_T$ et $f^+_T$ est adjoint à gauche de $f_{T+}$ (cela résulte du théorème 1.2.7 et de (1.2.10.1)). On obtient donc par adjonction les morphismes suivants

$$\mathcal{E} \to f_{T+}f^!_T(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}.$$

Comme $f^!_T(\mathcal{E})$ est à cohomologie $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$-cohérente, il résulte de l'isomorphisme canonique $f_{T+} \xrightarrow{\sim} f_+$ (voir la proposition 1.1.9) que le complexe $f_{T+}f^!_T(\mathcal{E})$ est à cohomologie $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérente (comme $f$ est propre, d'après [Ber02, 4.3.8] le foncteur $f_+$ conserve la $\mathcal{D}^\dagger$-cohérence).

Il reste ainsi à prouver que le composé de ces deux morphismes d'adjonction est un isomorphisme. Comme $\mathcal{E}$ est un isocristal surconvergent, il suffit de le vérifier sur un ouvert dense de $\mathfrak{X}$. Or, il existe un ouvert dense $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{X}$ inclus dans $\mathfrak{X} \setminus T$ tel que $g := f_{|\mathfrak{U}}$ soit surjectif, fini et étale. On a donc les égalités $g_+ = g_*$ et $g^! = g^*$. Sur $\mathfrak{U}$, ce morphisme composé est donc égal à la multiplication par le rang générique de $g^{-1}(U)$ sur $U$. D'où le résultat. □

Pour les courbes, on a un peu mieux.

PROPOSITION 4.3.2. *Soient $f : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}$ un morphisme propre, surjectif et génériquement étale de $\mathcal{V}$-courbes formelles lisses, $T$ (respectivement $T_1$) un diviseur de $X$ (resp $X_1$) tels que $f^{-1}(T) \subset T_1$. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent et $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-cohérent.*

*Si $f^!_{T_1,T}(\mathcal{E})$ est à cohomologie $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$-cohérente, alors $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent.*

*Démonstration.* Il existe un diviseur $T'_1$ disjoint de $f^{-1}(T)$ tel que $T_1 = T'_1 \cup f^{-1}(T)$. On dispose du triangle de localisation de $f^!_T(\mathcal{E})$ relativement à $T'_1$ :

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T'_1}(f^!_T(\mathcal{E})) \to f^!_T(\mathcal{E}) \to ({}^\dagger T'_1)(f^!_T(\mathcal{E})) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T'_1}(f^!_T(\mathcal{E}))[1]. \tag{4.3.2.1}$$

Il résulte de [NH95, 1.5] que $f^!_T(\mathcal{E})$ est un isocristal surconvergent sur $X_1 \setminus f^{-1}(T)$. Comme $T'_1 \subset X_1 \setminus f^{-1}(T)$, en notant $\alpha$ une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses relevant $T'_1 \subset X_1$, il en dérive, via [NH95, 1.5], que $\alpha^!(f^!_T(\mathcal{E}))$ est un isocristal convergent sur $T'_1$ décalé de $[-1]$ (l'image inverse d'un isocristal convergent est un isocristal convergent). Via l'analogue arithmétique de Kashiwara [Ber02, 5.3.3], $\alpha_+\alpha^!(f^!_T(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T'_1}(f^!_T(\mathcal{E}))$ est donc à cohomologie $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$-cohérente. Or, $f^!_{T_1,T}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} ({}^\dagger T'_1)(f^!_T(\mathcal{E}))$ (proposition 1.1.9). Par hypothèse, $({}^\dagger T'_1)(f^!_T(\mathcal{E}))$ est donc aussi à cohomologie $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$-cohérente. D'après le triangle de localisation (4.3.2.1), il en est de même de $f^!_T(\mathcal{E})$. On conclut la démonstration grâce à la proposition 4.3.1. □

PROPOSITION 4.3.3. *Soient $\mathfrak{X}$ une $\mathcal{V}$-courbe formelle propre et lisse, $T$ un diviseur de $X$, $\mathfrak{Y}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ complémentaire de $T$ et $M$ la structure logarithmique induite par $T$. Si $\mathcal{E}$ un $F$-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)$-module cohérent $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-cohérent et qui provienne d'un isocristal convergent sur le log-schéma $(X, M)$ (au sens du théorème 4.2.2), alors $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent.*

*Démonstration.* Comme $\mathcal{E}$ provient par restriction d'un isocristal convergent sur $(X, M)$, il existe donc un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{G}$ et un isomorphisme $({}^\dagger T)\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. D'après la proposition 2.3.2, on en déduit aussitôt la proposition. □

THÉORÈME 4.3.4. *On garde les notations de la proposition 4.3.3. Si $\mathcal{E}$ un $F$-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)$-module cohérent qui soit associé à un $F$-isocristal sur $Y$ surconvergent le long de $T$, alors $\mathcal{E}$ est un $F$-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome.*

*Démonstration.* D'après le théorème 4.2.2 et avec ses notations, il existe un $\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X}_1,M_1),\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$-cohérent $\mathcal{G}_1$ tel que $f^!_{T_1,T}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{(\mathfrak{X}_1,M_1),\mathbb{Q}}} \mathcal{G}_1$. Via la proposition 4.3.3, $f^!_{T_1,T}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$-cohérent. Il résulte alors de la proposition 4.3.2 que $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent. Par [Ber02, 5.3.5.(i)], $\mathcal{E}$ est donc holonome. □

Le théorème qui suit dit que la conjecture [Ber02, 5.3.6.D] est validée lorsque $\mathfrak{X}$ est une $\mathcal{V}$-courbe formelle propre et lisse.

THÉORÈME 4.3.5. *On garde les notations de la proposition 4.3.3. Si $\mathcal{E}$ un $F$-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T)$-module cohérent dont la restriction à $\mathfrak{Y}$ est holonome, alors $\mathcal{E}$ est un $F$-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module holonome.*

*Démonstration.* Comme $\mathcal{E}_{|\mathfrak{Y}}$ est holonome, d'après [Ber02, 5.3.5], il existe un ouvert dense $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que $\mathcal{E}|\mathfrak{U}$ soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}$-cohérent. On obtient donc un diviseur $T'$ de $X$ disjoint de $T$ tel que $U = X\backslash(T'\cup T)$ et $({}^\dagger T'\cup T, T)\mathcal{E}$ est un $F$-isocristal sur $U$ surconvergent le long de $T'\cup T$. D'après le théorème 4.3.4, $({}^\dagger T'\cup T, T)(\mathcal{E})$ est holonome. Or, $({}^\dagger T'\cup T, T)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} ({}^\dagger T'\cup T)(\mathcal{E})$ (voir § 1.1.8) et le morphisme canonique $({}^\dagger T')(\mathcal{E}) \to ({}^\dagger T'\cup T)(\mathcal{E})$ est un isomorphisme (car avec [Ber96a, 4.3.12], il l'est en dehors de $T'$). D'où l'holonomie de $({}^\dagger T')(\mathcal{E})$.

Soient $i' : \mathfrak{T}' \hookrightarrow \mathfrak{X}$ et $i'' : \mathfrak{T}' \hookrightarrow \mathfrak{Y}$ des relèvements des immersions fermées respectives $T' \hookrightarrow X$ et $T' \hookrightarrow Y$. Il résulte de l'isomorphisme $i'^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} i''^!(\mathcal{E}_{|\mathfrak{Y}})$ et du théorème 2.3.3 que $i'^!(\mathcal{E})$ est holonome. Il en est ainsi de même de $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T'}(\mathcal{E})$ (qui est isomorphe à $i'_+ i'^!(\mathcal{E})$).

Il résulte du triangle de localisation de $\mathcal{E}$ en $T'$, que $\mathcal{E}$ est holonome. □

## REMERCIEMENTS

Cet article est essentiellement issu de ma thèse de doctorat effectuée sous la direction de Bernard Le Stum. Je tiens à le remercier pour sa disponibilité, son attention et ses conseils prodigués tout au long de ma thèse et de la rédaction de cet article. Je dois aussi beaucoup à Pierre Berthelot, fondateur de la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules que j'utilise dans cet article, pour m'avoir éclairé sur de nombreux points de celle-ci. Enfin, toute ma reconnaissance à Christine Noot-Huyghe et Anne Virrion pour les discussions instructives qui m'ont souvent clarifié les idées et à Fabien Trihan pour ses judicieuses remarques.

## BIBLIOGRAPHIE


And02 Y. André, *Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique*, Invent. Math. **148** (2002), 285–317. MR 1906151.

Ber P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. IV. Variété caractéristique*, in preparation.

Ber74 P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 407 (Springer, Berlin, 1974). MR 52#5676.

Ber90 P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules*, in *p-adic analysis (Trento, 1989)* (Springer, Berlin, 1990), 80–124. MR 92h:14013.

Ber96a P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **29** (1996), 185–272. MR 97b:14019.

Ber96b P. Berthelot, *Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), 35–40. MR 97g:14017.

Ber96c P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie*, Preprint IRMAR 96-03, Université de Rennes, 1996.

Ber00 P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **81** (2000). MR 2001k:14043.

Ber02 P. Berthelot, *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules*, in *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II.* Astérisque **279** (2002), 1–80. MR 1922828.




https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press

BO78 P. Berthelot and A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1978). MR 58#10908.

BGKHME87 A. Borel, P.-P. Grivel, B. Kaup, A. Haefliger, B. Malgrange, and F. Ehlers, *Algebraic D-modules* (Academic Press, Boston, MA, 1987). MR 89g:32014.

BGR84 S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert, *Non-Archimedean analysis*, in *A systematic approach to rigid analytic geometry* (Springer, Berlin, 1984). MR 86b:32031.

Car02 D. Caro, *Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, PhD thesis, Université de Rennes I, 2002.

Car04a D. Caro, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), 1943–1996.

Car04b D. Caro, *Surcohérence : holonomie des $F$-isocristaux unités*, Preprint, University of Sydney, 2004.

Car05 D. Caro, *Comparaison des foncteurs duaux des isocristaux surconvergents*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **114** (2005), to appear.

Cre98 R. Crew, *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998), 717–763. MR 2000a:14023.

Dej96 A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **83** (1996), 51–93. MR 98e:14011.

ÉL93 J.-Y. Étesse and Bernard Le Stum, *Fonctions L associées aux $F$-isocristaux surconvergents. I. Interprétation cohomologique*, Math. Ann. **296** (1993), 557–576. MR 94i:14030.

Har66 R. Hartshorne, *Residues and duality* (Springer, Berlin, 1966). MR 36#5145.

Ked03 K. S. Kedlaya, *Semistable reduction for overconvergent $F$-isocrystals on a curve*, Math. Res. Lett. **10** (2003), 151–159. MR 1981892 (MR 2005e:12010).

Mat70 H. Matsumura, *Commutative algebra* (W. A. Benjamin, New York, 1970). MR 42#1813.

Mon02 C. Montagnon, *$\mathcal{D}$-modules logarithmiques de niveau $m$ et descente par Frobenius*, PhD thesis, Université de Rennes I, 2002.

NH04 C. Noot-Huyghe, *Finitude de la dimension homologique d'algèbres d'opérateurs différentiels faiblement complètes et à coefficients surconvergents*, J. Algebra (2004), to appear.

NH95 C. Noot-Huyghe, *Construction et étude de la Transformée de Fourier pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, PhD thesis, Université de Rennes I, 1995.

SGA1 A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–61 (SGA 1). With two papers by M. Raynaud. Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Mathematics, vol. 224 (Springer, Berlin, 1971)], Doc. Math. (Paris), vol. 3 (Société Mathématique de France, Paris, 2003).

SGA6 P. Berthelot, A. Grothendieck and L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6), Lecture Notes in Mathematics, vol. 225 (Springer, Berlin, 1971); MR 50:7133.

Shi02 A. Shiho, *Crystalline fundamental groups. II. Log convergent cohomology and rigid cohomology*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), 1–163. MR 1889223 (MR 2003c:14020).

Tsu02 N. Tsuzuki, *Morphisms of $F$-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root $F$-isocrystals*, Duke Math. J. **111** (2002), 385–418. MR 1885826.

Vir00 A. Virrion, *Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **128** (2000), 1–68. MR 2001h:14018.

Vir04 A. Virrion, *Trace et dualité relative pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, in *Geometric aspects of Dwork theory*, vol. I and II (Walter de Gruyter, Berlin, 2004), 1039–1112. MR 2099095.

Daniel Caro daniel.caro@mathematik.uni-regensburg.de
NWF I - Mathematik, Universität Regensburg, Universitätsstraße 31, 93053 Regensburg, Germany
*Current address:* Department of Mathematical Sciences, South Road, Durham DH1 3LE, UK



https://doi.org/10.1112/S0010437X05001880 Published online by Cambridge University Press