Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1990), **10**, 483–512
Printed in Great Britain

Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géometriques des sous-groupes du groupe linéaire

YVES GUIVARC'H

Université de Paris VI, Laboratoire de Probabilités, Tour 56-3e étage, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

(*Received* 25 *April* 1988 *and revised* 15 *December* 1989)

Abstract. Using the asymptotic properties of products of random matrices we study some properties of the subgroups of the linear group. These properties are centered around the theorem of J. Tits giving the existence of free subgroups in linear groups.

0. *Introduction*

L'objet de ce travail est de montrer comment des méthodes de la théorie des systèmes dynamiques et du calcul des probabilités permettent d'obtenir des propriétés algébriques ou géometriques des sous-groupes du groupe linéaire. En fait, dans le cas d'un groupe linéaire sur un corps local, l'introduction d'une mesure de probabilité μ, de support contenu dans un tel sous-groupe Γ et engendrant un semi-groupe fermé T_μ, permet au moyen du produit de matrices aléatoires associé, et en particulier de ses exposants de Liapunoff de traduire de manière quantitative des propriétés qualitatives de Γ ou T_μ. Par exemple on donne dans la partie 1 une démonstration du théorème de J. Tits concernant l'existence de sous-groupes libres non abéliens dans un groupe linéaire [**23**], démonstration dont l'argument essentiel repose sur le théorème ergodique multiplicatif d'Osedelets au lieu de la densité au sens de Zariski. Utilisant les méthodes développées on obtient par une application simple du théorème de super-rigidité que toute représentation ($d>2$) d'un réseau de $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ dans un espace de dimension inférieure a une image finie. Afin de poursuivre l'étude des propriétés sous-jacentes au théorème de Tits on introduit dans la partie 2, pour un sous-groupe Γ de $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$, l'ensemble des points limites dans la compactification de Moore de l'espace symmétrique correspondant. On donne en particulier des résultats concernant l'action de Γ sur l'ensemble L_Γ de ces points limites et on montre que L_Γ est de dimension de Hausdorff positive. On précise cette propriété par une étude de la mesure μ-invariante portée par L_Γ. Cette étude conduit au retour à des propriétés nouvelles des produits de matrices aléatoires qui éclairent le théorème de Tits: sous une condition d'irréductibilité et de proximalité de l'action de T_μ sur l'espace projectif, un tel produit a presque sûrement une valeur propre dominante simple, réelle, et son comportement asymptotique est donné par le plus grand exposant de Liapunoff. Ceci répond à une conjecture de J. Cohen et

H. Fürstenberg [3]. Sous une hypothèse renforcée on peut en déduire des résultats plus précis concernant le spectre d'un tel produit qui est alors asymptotiquement simple et réel. Observons d'autre part qu'une autre direction naturelle d'application de ces techniques concerne l'étude de certaines algèbres de groupe intervenant en théorie des représentations unitaires [**15**]. Dans des divers résultats un rôle essentiel est joué par l'étude du spectre de Liapunoff d'un produit de matrices aléatoires indépendantes et en particulier de sa simplicité, étude qui a été faite en [**10**] et précisée en [**7**], [**12**]. Les techniques utilisées ici sont donc susceptibles de compléter ou de se combiner à celles de géométrie algébrique traditionnellement utilisées dans ce contexte comme cela apparaît également en [**5**], [**18**], [**26**].

1. *Sous-groupes libres du groupe lineaire*

1.1. *Introduction*

Dans un travail fondamental [**23**], J. Tits a donné une démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Soit k un corps de caractéristique nulle, Γ un sous-groupe du groupe linéaire* $\mathrm{Gl}(d, k)$. *Alors, ou bien Γ contient un sous-groupe résoluble d'indice fini, ou bien Γ contient un groupe libre à deux générateurs.*

La preuve de J. Tits est basée sur les propriétés de la topologie de Zariski et des considérations de géométrie algébrique. L'objet de cette partie 1 est d'en donner une autre démonstration, suivant le même plan, mais utilisant plutôt les propriétés des produits de matrices aléatoires. Cette méthode permet plusieurs simplifications et est susceptible d'applications diverses. Très brièvement résumé, le plan de la preuve de J. Tits est d'abord de remplacer k par un corps localement compact convenable K tel que, sur un certain espace projectif $P^r(K)$, Γ agisse de manière 'suffisamment irréductible et contractante'; puis la proposition cruciale 3-11 permet de trouver dans Γ 'suffisament' d'éléments g tels que g et g^{-1} aient des valeurs propres dominantes simples, enfin la densité au sens de Zariski permet de trouver dans Γ deux éléments 'en position générale', et un argument classique montre qu'ils engendrent un sous-groupe libre. On suivra ici cette démarche mais la technique sera différente et en particulier les propriétés des produits de matrices aléatoires permettront de suppléer à la proposition 3-11 de [**23**].

1.2. *Produits de matrices aléatoires*

Rappelons d'abord le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets sur un corps K commutatif localement compact non discret (corps local) [**21**], dont la valeur absolue sera notée $|.|$.

THÉORÈME D'OSELEDETS. *Soit (Ω, θ, π) un système dynamique ergodique, $g(\omega)$ une fonction de Ω à valeurs dans $Gl(d, K)$ telle que* $\mathrm{Log}\,\|g(\omega)\|$ *et* $\mathrm{Log}\,\|g^{-1}(\omega)\|$ *soient π-integrables. Supposons $g_n(\omega) = g \circ \theta^n(\omega)$ et $S_n(\omega)(n \in Z)$ défini par*

$$S_n(\omega) = g_{n-1}g_{n-2}\cdots g_0 \quad (n \geq 0)$$
$$S_0(\omega) = \mathrm{Id}$$
$$S_{-n}(\omega) = g_{-n}^{-1}g_{-n+1}^{-1}\cdots g_{-1}^{-1} \quad (-n < 0).$$

Alors il existe une matrice diagonale par blocs et une fonction $\varphi(\omega)$ à valeurs matricielles telle que

$$S_n(\omega) = \varphi \circ \theta^n(\omega) \Delta_n \varphi^{-1}(\omega).$$

De plus pour tout x correspondant à chaque bloc on a:

$$\lim_{n \to +\infty} (1/n) \operatorname{Log} \|S_n(\omega) \varphi(\omega) x\| = \lambda^i$$

(où λ^i est compté avec la multiplicité du bloc correspondant).

Remarque. Les nombres λ^i sont bien définis et s'appellent exposants caractéristiques. Ils seront ordonnés par $\lambda^1 \geq \lambda^2 \geq \cdots \geq \lambda^d$.

Définition 1. On dira qu'un semi-groupe T opère de manière proximale sur un espace métrique (E, δ) si pour tous x, y de E on peut trouver une suite $t_n \in T$ avec $\lim_n \delta(t_n x, t_n y) = 0$.

On considèrera la situation $T \subset Gl(d, K)$ opérant sur l'espace projectif $P^{d-1}(K)$ par les transformations projectives naturelles où K sera dans la suite un corps local.

Définition 2. On dira que le semi-groupe $T \subset Gl(d, K)$ opère de manière totalement irréductible sur $P^{d-1}(K)$ s'il n'existe pas de réunion finie de sous-espaces projectifs laissée invariante par T.

Soint maintenant μ une mesure de probabilité portée par le sous-groupe Γ de $Gl(d, K)$ et T_μ le semi-groupe engendré par le support $\sum_\mu$ de μ. On note Ω l'espace produit $(\sum_\mu)^Z$, π la probabilité canonique produit μ^Z sur Ω, θ le décalage et $g_n(\omega)$ les fonctions coordonnées qui sont ici des variables aléatoires indépendantes de loi μ. La condition d'intégrabilité de $g_0(\omega)$ sera toujours supposée satisfaite. On a établi en [**10**] le théorème suivant si $K = \mathbb{R}$, et sa démonstration s'étend au cas d'un corps local [**8**].

THÉORÈME 2. *Soit μ une mesure de probabilité sur $Gl(d, \mathbb{R})$ et supposons que T_μ opère de manière proximale et totalement irréductible sur $P^{d-1}(\mathbb{R})$. Alors les deux premiers exposants caractéristiques du produit des matrices aléatoires $g_n(\omega)$ sont différents. De plus la loi de la direction dilatante $\varphi(\omega)e_1$ correspondant au plus grand exposant ne charge pas de sous-espace projectif.*

Remarque. Si T_μ est un groupe, les propriétés de proximalité et d'irréductibilité envisagées dans le théorème restent valables sur l'espace projectif dual formé des hyperplans de $P^{d-1}(K)$. Il en découle, puisque Δ_n est alors changée en $(\Delta'_n)^{-1}$ que les deux derniers exposants du produit initial sont distincts également sous l'hypothèse du théorème [cf. **12**].

Définition 3. On dira que $g \in Gl(d, K)$ admet une valeur propre dominante simple s'il existe $a^+ \in P^{d-1}(K)$ et H^- hyperplan projectif supplémentaire avec:

$$\forall x \notin H^- \lim_{n \to +\infty} g^n x = a^+.$$

On dira que a^+ est le point attractif de g et H^- son hyperplan répulsif. La condition de proximalité du théorème est alors assurée par la.

PROPOSITION 1. *Soit Γ un groupe opérant de manière totalement irréductible sur $P^{d-1}(K)$ et supposons qu'il existe un élément de Γ ayant une valeur propre dominante simple. Alors Γ opère de manière proximale sur $P^{d-1}(K)$.*

Preuve. Pour x et y dans $P^{d-1}(K)$, il suffit de trouver $\eta \in \Gamma$ avec $\eta x \notin H^-$, $\eta y \notin H^-$ où H^- est le sous-espace répulsif de $\gamma \in \Gamma$ et a^+ son point attractif. Alors en effet:

$$\lim_n \gamma^n \eta x = \lim_n \gamma^n \eta y = a^+.$$

Or la condition $\eta x \in H^-$ ou $\eta y \in H^-$ pour tout η de Γ s'écrirait $x \in \eta^{-1}(H^-)$ ou $y \in \eta^{-1}(H^-)$ et violerait donc la totale irréductibilité dans le dual de $P^{d-1}(K)$, c'est-á-dire dans $P^{d-1}(K)$ d'après la remarque précédente.

Remarque. Cette proposition et la remarque précédente conduisent à une certaine symétrie dans les résultats: les deux premiers exposents et les deux derniers sont simultanément différents si $T_\mu = \Gamma$.

1.3. *Itération d'une matrice et produits de matrices aléatoires*

Ici la dimension d de l'espace vectoriel K^d sera 2 au moins.

Définition 4. On appellera doublet de points-hyperplans (ou simplement doublet) un système de deux points a^+, a^- de $P^{d-1}(K)$ ($d \geq 2$) et de deux hyperplans H^+, H^-, avec les relations $a^+ \notin H^-$, $a^- \notin H^+$, $a^+ \in H^+$, $a^- \in H^-$ et on le notera $D(a^+, a^-, H^+, H^-)$.

Si $g \in Gl(d, K)$ est tel que g et $(g')^{-1}$ admettent des valeurs propres dominantes simples, les points attractifs a^+, a^- et les sous-espaces répulsifs H^+, H^- correspondants forment un doublet que l'on notera $D(g)$.

De même le théorème précédent et la remarque qui suit montre que si $T_\mu = \Gamma$ est un sous-groupe de $Gl(d, K)$ totalement irréductible et proximal sur $P^{d-1}(K)$, les sous-espaces dilatants et contractants des cocycles $S_n(\omega)$, $[S_n(\omega)']^{-1}$ donnent lieu à un doublet point hyperplan que l'on notera $D(\omega)$ et qui est formé de $a^+ = \varphi(\omega)e_1$, $a^- = \varphi(\omega)e_d$, $H^- = \varphi(\omega)e_1'$, $H^+ = \varphi(\omega)e_d'$ où e_1' et e_d' désignant les hyperplans d'annulation de la première et de la dernière coordonnée.

Définition 5. On dira que deux doublets $D(a^+, a^-, H^+, H^-)$ et $D(b^+, b^-, L^+, L^-)$ sont en position générale si l'on a $b^+ \notin H^+ \cup H^-$, $b^- \notin H^+ \cup H^-$, $a^+ \notin L^+ \cup L^-$, $a^- \notin L^+ \cup L^-$.

Il est clair que les couples de doublets en position générale forment un ouvert dense.

PROPOSITION 2. *Soit $\Gamma \subset Gl(d, K)$ un sous-groupe totalement irréductible et proximal sur $P^{d-1}(K)$, μ une mesure de probabilité, portée par Γ et telle que $T_\mu = \Gamma$. Alors le produit de matrices aléatoires $S_n(\omega)$ définit pp un doublet $D(\omega)$. De plus pour presque tout $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$, les doublets correspondants $D(\omega)$ et $D(\omega')$ sont en position générale.*

Preuve. L'existence de $D(\omega)$ découle du Théorème 2 et de la remarque qui le suit. Fixons $D(\omega)$ et montrons la négligeabilité de l'ensemble des ω' tels que $D(\omega)$ et $D(\omega')$ ne soient pas en position générale. Sinon il existerait $\Omega' \subset \Omega$ de mesure positive vérifiant par exemple une condition $\varphi(\omega')e_1 \in \varphi(\omega)\ (e_1' \cup e_d')$ pour $\omega' \in \Omega'$; la loi de $\varphi(\omega')e_1$ (qui est la direction dilatante) chargerait une réunion de deux hyperplans projectifs, ce qui est impossible d'aprés le Théorème 2.

PROPOSITION 3. *Dans la situation du théorème d'Oseledets, supposons le premier et le dernier exposants de multiplicité* 1 *et soil $D(\omega)$ le doublet associé au cocycle $S_n(\omega)$. Alors pour presque tout ω il existe une sous-suite $n_k(\omega)$ telle que $S_{n_k}(\omega)$ et $S_{n_k}^{-1}(\omega)$ aient des valeurs propres dominantes simples. De plus on a* $\lim_{k\to\infty} D[S_{n_k}(\omega)] = D(\omega)$.

La preuve découlera de deux lemmes dont le premier résulte du théorème des fonctions implicites et est bien connu.

LEMME 1. *Soit K un corps local u un endomorphisme linéaire de K^d ayant une valeur propre dominante simple, a^+ le point attractif et H^- le sous-espace répulsif associés. Soit $u_n \in E\,nd\ (K^d)$ avec* $\lim u_n = u$. *Alors, pour n assez grand, u_n a une valeur propre dominante simple, un point attractif a^+, un sous-espace répulsif H_n^- vérifiant*:

$$\lim_n a_n^+ = a^+, \quad \lim_n H_n^- = H^-.$$

LEMME 2. *Soit (Ω, Θ, π) un système dynamique ergodique, φ une application mesurable de Ω dans $Gl(d, K)$. Alors pour presque tout ω, il existe une sous-suite $n_k(\omega)$ avec*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi^{-1}(\omega)\varphi \circ \theta^{n_k}(\omega) = \mathrm{Id}.$$

Preuve. Il est commode de munir $Gl(d, K)$ d'une distance invariante à gauche δ. Si l'assertion du lemme est fausse, il existe $\Omega' \subset \Omega$ de mesure positive et $\varepsilon > 0$ avec

$$\liminf \delta[I, \varphi^{-1}(\omega)\varphi \circ \theta^n(\omega)] = \varepsilon > 0.$$

Puisque les boules $B_\delta(g, (\varepsilon/2))$ recouvrent $Gl(d, K)$ si g parcourt G, on peut trouver $\gamma \in Gl(d, K)$ tel que l'ensemble Ω'' des $\omega' \in \Omega'$ avec $\delta[\gamma, \varphi(\omega')] < (\varepsilon/2)$ soit de mesure positive.

Le théorème de récurrence de Poincaré donne pour presque tout $\omega' \in \Omega''$ une sous-suite n_k avec $\theta^{n_k}\omega' \in \Omega''$. Alors, pour $\omega' \in \Omega''$.

$$\delta[\varphi(\omega'), \varphi \circ \theta^{n_k}(\omega')] \le \delta[\varphi(\omega'), \gamma] + \delta[(\gamma), \varphi \circ \theta^{n_k}(\omega')] < \varepsilon$$

ce qui contredit $\lim_n \inf \delta[\varphi(\omega'), \varphi \circ \theta^{n_k}(\omega')] \ge \varepsilon$.

Preuve de la proposition. Ecrivons, d'après le théorème d'Oseledets:

$$S_n(\omega) = \varphi \circ \theta^n(\omega)\Delta_n\varphi^{-1}(\omega)$$

$$S_n^{-1}(\omega) = \varphi(\omega)\Delta_n^{-1}\varphi^{-1} \circ \theta^n(\omega)$$

et montrons d'abord l'existence des valeurs propres dominantes. Il revient au même de considérer

$$\varphi^{-1}(\omega)S_n(\omega)\varphi(\omega) = v_n(\omega)\Delta_n$$

$$\varphi^{-1}(\omega)S_n^{-1}(\omega)\varphi(\omega) = \Delta_n^{-1}v_n^{-1}(\omega) \quad \text{avec} \quad v_n(\omega) = \varphi^{-1}(\omega)\varphi \circ \theta^n(\omega).$$

Notons que d'après le Théorème 2 et la remarque on a

$$\Delta_n e_1 = \lambda_n^{-1} e_1, \quad \Delta_n e_d = \lambda_n^d e_d \quad \text{avec} \quad \Delta_n' = \Delta_n/\lambda_n^1,\ \Delta_n'' = \lambda_n^d \Delta_n^{-1}$$

convergeant vers les projecteurs canoniques Δ' et Δ'' sur Ke_1 et Ke_d. On est donc amené à considérer $v_n(\omega)\Delta'_n$ et $\Delta''_n v_n^{-1}(\omega)$. Or, par exemple:

$$\|v_n(\omega)\Delta'_n - \Delta'\| \le \|v_n(\omega) - I\| \, \|\Delta'_n\| + \|\Delta'_n - \Delta'\|$$

et

$$\lim_{k \to +\infty} \|v_{n_k}(\omega) - I\| = 0$$

d'après le Lemme 2. Comme $\lim_{h \to \infty} \|\Delta'_n - \Delta'\| = 0$, on a bien $\lim_{k \leftarrow \infty} \|v_{n_k}(\omega')\Delta'_n - \Delta'\| = 0$ et le Lemme 1 permet de conclure. On traite de même $\|\Delta''_n v_n(\omega) - \Delta''\|$ avec la même sous-suite n_k. Au niveau des doublets point-hyperplan associés on a

$$D[S_n(\omega)] = \varphi(\omega) D[v_n(\omega)\Delta'_n] = \varphi(\omega) D[\Delta''_n v_n(\omega)]$$

et la convergence de $D[S_{n_k}(\omega)]$ vers $D(\omega)$ résulte encore de celle de $v_{n_k}(\omega)$ vers I et du Lemme 1. Les Propositions 2 et 3 donnent alors le.

THÉORÈME 3. *Soit K un corps local, $\Gamma \subset Gl(d, K)$ un sous-groupe totalement irréductible et proximal sur $P^{d-1}(K)$, $(d \ge 2)$, μ une mesure de probabilité portée par Γ et telle que $T_\mu = \Gamma$. Notons $S_n(\omega) = g_n g_{n-1} \cdots g_0$ le produit des matrices alèatoires indépendantes g_i de loi μ. Alors, pour presque tout ω, il existe une sous-suite $n_k(\omega)$ telle que $S_{n_k}(\omega)$ et $S_{n_k}^{-1}(\omega)$ aient des valeurs propres dominantes simples. De plus, pour presque tous ω et ω' de $(\sum_\mu)^Z$, il existe des sous-suites $n_k(\omega)$ et $n'_p(\omega')$ telles que $S_{n_k}(\omega)$ et $S_{n'_p}(\omega')$ engendrent un groupe libre non abélien.*

Preuve. La première partie découle des premières parties des Proposition 2 et 3. Utilisant les secondes parties de ces propositions on trouve, pour presque tout $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$ des sous-suites $n_k(\omega)$, $n'_p(\omega')$ et des doublets $D(\omega)$, $D(\omega')$ en position générale avec:

$$\lim_{k \to +\infty} D[S_{n_k}(\omega)] = D(\omega)$$

$$\lim_{k \to +\infty} D[S_{n'_p}(\omega')] = D(\omega').$$

Pour n_k et n'_p assez grands, $D[S_{n_k}(\omega)]$ et $D[S_{n'_p}(\omega')]$ sont donc aussi en position générale. La conclusion découle alors du lemme suivant [**23**] dont nous reproduisons la preuve.

LEMME 3. *Soient g et h deux éléments de $Gl(d, K)$ tels que g, h, g^{-1}, h^{-1} aient des valeurs propres dominantes simples et supposons $D(g)$, $D(h)$ en position générale. Alors il existe un entier n tel que g^n et h^n engendrent un groupe libre.*

Preuve. Notons $D(g) = D(a^+, a^-, H^+, H^-)$, $D(h) = D(b^+, b^-, L^+, L^-)$ et observons que

$$\lim_{n \to \pm\infty} g^n(b^+ \cup b^-) = a^\pm$$

$$\lim_{n \to \pm\infty} h^n(b^+ \cup b^-) = b^\pm.$$

Ceci donne deux voisinages A et B de $a^+ \cup a^-$ et $b^+ \cup b^-$ et $n \in N$ tels que:

$$g^m(B) \subset A, \qquad h^m(A) \subset B \quad (|m| \ge n).$$

Soient alors $p \notin A \cup B$ et $u = g^n$, $v = h^n$. $g^m p \in A$, $h^m p \in B$ $(|m| \ge h)$.

Si $\lambda(u, v)$ est un mot quelconque en u et v on a $\lambda(u, v)\ p \in A \cup B$.

Si λ est non trivial et donc $\lambda(u, v)p \neq p$, $\lambda(u, v) \neq \mathrm{Id}$.

Le groupe engendré par u et v est donc libre.

1.4. *Groupes non résolubles et proximalité*

Afin de démontrer le Théorème 1, il est commode de considérer des groupes finiment engendrés et, pour abréger le langage de donner la définition.

Définition. On dit qu'un groupe G est presque résoluble (resp. nilpotent) s'il possède un sous-groupe d'indice fini résoluble (resp. nilpotent).

On est amené à manipuler diverses représentations d'un groupe, par extension du corps de base notamment. Rappelons qu'une représentation de G sur un corps k est absolument irréductible si elle reste irréductible par toute extension du corps de base. Il suffit d'une extension de degré fini du corps de base pour obtenir, à partir d'une représentation donnée, une nouvelle représentation dont les quotients de la suite de Jordan–Hölder sont absolument irréductibles.

L'objet de ce paragraphe est de montrer le.

THÉORÈME 4. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k de caractéristique zéro, $G \subset Gl(V)$ un sous-groupe finiment engendré et non presque résoluble. Alors il existe un corps local K, un homomorphisme de k dans K, une représentation ρ de dimension* 2 *au moins d'un sous-groupe d'indice fini G' de G sur le corps K telle que $\rho(G')$ soit totalement irréductible et qu'il existe $g \in G'$ tel que $\rho(g)$ ait une valeur propre dominante simple.*

Remarques. On emploiera ici l'expression $\rho(G)$ totalement irréductible au lieu de $\rho(G)$ opère de manière totalement irréductible sur l'espace projectif associé.

On peut toujours remplacer k par l'extension de degré fini de Q engendrée par les coefficients des matrices representant un nombre fini de générateurs de G.

La preuve va découler de modifications successives de la représentation initialement donnée de G dans $Gl(V)$.

Définition. On dira qu'une représentation de G dans un espace vectoriel V sur un corps k est totalement absolument irréductible s'il n'existe pas d'extension du corps de base k, de sous-groupe d'indice fini H de G, telle que, dans la nouvelle représentation H laisse invariant un sous-espace strict.

LEMME 4. *Dans la situation du Théorème* 4 *on peut supposer, avec extension de degré fini du corps de base, la représentation de G dans $Gl(V)$ totalement absolument irréductible.*

Preuve. On considère une suite de Jordan-Hölder de la représentation donnée, à quotients successifs $V_{i+1}/V_i (0 \leq i \leq r)$. Le noyau de la représentation naturelle de G dans $\oplus_{i=0}^{r} V_{i+1}/V_i$ est nilpotent et donc dans l'un au moins des $Gl(V_{i+1}/V_i)$ l'image de G n'est pas presque résoluble, et la représentation de G correspondante peut être supposée absolument irréductible par extension finie du corps de base. Fixons alors cette représentation et notons encore V_{i+1}/V_i par V. Considérons alors les triplets (H, k', W) formés d'un sous-groupe distingué d'indice fini H de G, d'une extension k' de degré fini de k et d'un sous-espace W de $V \otimes k'$ laissé invariant par H. Fixons un tel sous-espace W de dimension minimum, le corps k' et le sous-groupe H correspondants. Par construction, la représentation de H dans W est totalement absolument irréductible et G/H s'identifie à un groupe de permutation fini puisque la représentation de G dans V est fidèle et absolument irréductible. Il en découle que H, comme G, n'est pas presque résoluble et en particulier dim $W \geq 2$. L'énoncé du lemme s'obtient donc en remplaçant G, par H et V par W.

LEMME 5. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k de caractéristique zéro, $G \subset Gl(V)$ un sous-groupe finiment engèndré du groupe linéaire de V. On suppose que, dans une clôture algébrique de k, les quotients des valeurs propres de tout g de G soient racines de l'unité. Alors G est presque nilpotent.*

Preuve. On peut considérer la représentation naturelle de G dans End $V: u \to gug^{-1}$ dont le noyau est central dans G et on peut donc supposer les valeurs propres de tout g de G racines de l'unité. On considère alors une suite de Jordan-Hölder de V et l'on note ρ_l les représentations irréductibles dans les quotients successifs. Le noyau de la représentation somme directes des ρ_i est nilpotent et d'après un théorème de Schur [**24**] relatif aux groupes linéaires périodiques tous les $\rho_i(G)$ sont finis. Il en découle que G possède un sous-groupe nilpotent d'indice fini.

Preuve du théorème. Soit $G \subset Gl(V)$ totalement absolument irréductible et, d'après le Lemme 5, $a \in G$ tel que les quotients des valeurs propres de a dans une clôture algébrique de k ne soient pas racines de l'unité. Par extension de degré fini de Q, si λ_i/λ_j n'est pas racine de l'unité, on peut trouver un corps local $(K, |\cdot|)$, un homomorphisme σ de k dans K tel que $|\sigma(\lambda_i/\lambda_j)| \neq 1$ ([**23**], [**25**]). Pour abréger les notations on identifiera dans la suite k à $\sigma(k) \subset K$.

Donc $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ et il y a une valeur propre λ_i dont le module $|\lambda_1|$ est maximum et réalisé avec multiplicité $p < \dim V$. Désignons par $e_i (1 \leq i \leq p)$ une base de la somme des sous-espaces caractéristiques correspondants, base dans laquelle la matrice de a est triangulaire. Alors dans $\Lambda^p(V \otimes K)$, le vecteur $e = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ sera vecteur propre de $\Lambda^p a$ et la valeur propre correspondante ρ dominera toutes les autres en module. On va maintenant remplacer $\Lambda^p(V \otimes K)$ par un sous-espace contenant e. Puisque la représentation de G dans $\Lambda^p(V \otimes K)$ est complètement réductible [**2**], e appartiendra à l'une des composantes irréductibles de $\Lambda^p(V \otimes K)$ et l'on notera η la représentation dans $W \subset \Lambda^p(V \otimes K)$ ainsi obtenue. Soit enfin W_1 un sous-espace de dimension minimum fixé par un sous-groupe d'indice fini et distingué L de G, Λ un système de représentants de G/L dans G: on a $W = \sum_{\gamma \in \Lambda} \gamma W_1$, chacun des γW_1 est fixé par L et les représentations de L dans chaque γW_1 sont totalement irréductibles. Montrons que e appartient à l'un des γW_1. Pour tout $w \in W$ on a:

$$\text{soit} \quad \lim_{n \to +\infty} (\eta(a^n)w)/(\rho^n) = 0$$

$$\text{soit} \quad \lim_{n \to +\infty} [(\eta(a^n)w/(\rho^n)] \in K^*e$$

et l'ensemble des w satisfaisant la première relation est un hyperplan E. D'autre part a^n appartient à L le long d'une progression arithmétique et laisse donc alors invariant $\bigcup_{\gamma\in\Lambda}\gamma W_1$; comme ce dernier ensemble engendre W, il n'est pas contenu dans l'hyperplan E et e appartient bien à $\bigcup_{\gamma\in\Lambda}\gamma W_1$, donc à l'un des γW_1. On a donc remplacé G par L, W par γW_1 et il reste à voir que $\dim \gamma W_1 \geq 2$. Sinon L fixerait la droite engendrée par e et donc le sous-espace engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_p$ dans $V \otimes K$. Ceci contredit le fait que G soit totalement absolument irréductible dans V. La représentation ρ de l'énoncé est donc la restriction de $\Lambda^p\eta$ à γW_1, le sous-groupe G' est égal à L et l'élément g est une puissance convenable de Λ^p a qui admet clairement une valeur propre dominante simple.

1.5. *Preuve du Théorème* 1

Ce théorème découle du Théorème 1′ et d'un lemme.

THÉORÈME 1′. *Soit k un corps de caractéristique nulle, Γ un groupe finiment engendré de $Gl(d, k)$. Alors ou bien Γ contient un groupe résoluble d'indice fini, ou bien Γ contient un groupe libre à* 2 *générateurs.*

Preuve. Supposons la première alternative non satisfaite et appliquons le Théorème 4 du paragraphe précédent: on peut remplacer k par un corps local K, et Γ par un sous-groups d'indice fini opérant de manière proximale et totalement irréductible sur $P^{d-1}(K)$ $(d \geq 2)$. D'après le Théorème 3 du § 1.3, Γ contient alors un groupe libre à deux générateurs. Les techniques élémentaires de géométrie algébrique [**2**] donnent une démonstration simple du lemme:

LEMME. *Soit Γ un sous-groupe de $Gl(d, k)$ tel que tout sous-groupe finiment engendré soit presque résoluble. Alors Γ est presque résoluble.*

Preuve. On utilisera encore le théorème de structure des groupes périodiques linéaires dû è Schur [**22**]: un tel groupe contient un groupe abélien d'indice fini.

Soit $G_0 \subset \bar{\Gamma}$ la composante connexe en topologie de Zariski de l'élément neutre dans l'adhérence algébrique $\bar{\Gamma}$ de G. Soit $\Gamma_i (i \in I)$ famille croissante de sous-groupes de Γ finiment engendrés de réunion égale à Γ, Γ_i leurs adhérences algébriques et G_i les composantes neutres correspondantes. Puisque G_i est d'indice fini dans $\bar{\Gamma}_i$, les G_i sont résolubles connexes et forment une famille croissante. Si R est un élément de dimension maximum, $\Gamma_i/\Gamma_i \cap R$ est donc fini et $\Gamma/\Gamma \cap R$ est réunion croissante de sous-groupes finis. Il en est de même de son image dans la représentation naturelle de Γ dans $\mathscr{G}_0/\mathscr{R}$ où $\mathscr{G}_0$ et $\mathscr{R}$ désignent les algèbres de Lie de G_0 et R: le théorème de Schur déjà cité implique que cette image possède un sous-groupe abélien d'indice fini. On peut d'autre part supposer $\Gamma \subset G_0$ car G_0 est d'indice fini dans $\bar{\Gamma}$ et alors le noyau de la représentation considérée commute avec G_0 modulo R: $\Gamma/\Gamma \cap R$ contient un groupe résoluble d'indice fini et il en est de même de Γ.

Ce lemme montre que pour démontrer le Théorème 1, on peut toujours se placer dans la situation du Théorème 1′.

1.6. *Application aux représentations des réseaux*

On prouve ici, en application des techniques précédentes le.

THÉORÈME 5. *Soit Γ un réseau de* $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$, $(d > 2)$, *ρ une représentation de Γ dans un espace vectoriel k^n où $n < d$ et k est un corps de caractéristique* 0. *Alors $\rho(\Gamma)$ est fini.*

Preuve. Si $n=1$, $\rho(\Gamma)$ est commutatif et la propriété de Kajdan pour Γ [26] implique $\rho(\Gamma)$ fini.

Dans le cas général on va appliquer le Théorème 4 ou plutôt les arguments de sa preuve, avec $G=\rho(\Gamma)$, l'espace de ρ étant V avec dim $V<d$: d'après la propriété de Kajdan, $\rho(\Gamma)$ n'est pas presque résoluble s'il est infini. On peut de plus supposer d'après le Lemme 4, $\rho(\Gamma)$ totalement absolument irréductible. Comme Γ est de type fini et $\rho(\Gamma)$ non presque résoluble, on peut remplacer comme au début de la preuve du Théorème 4, le corps de base k par un corps local K de façon que pour un certain $a\in\rho(\Gamma)\subset \mathrm{Gl}\,(n,K)$, il y ait une valeur propre dominante dont le module est répété p fois au plus ($p<n$). Montrons d'abord que, du fait que $n<d$, l'adhérence (topologique) $\overline{\rho(\Gamma)}$ dans $\mathrm{Gl}\,(n,K)$ est moyennable. Considérons pour cela l'adhérence algébrique de $\rho(\Gamma)$ et une composante H presque simple et connexe de sa partie semi-simple: on a ainsi un homomorphisme π du réseau Γ dans H dont l'image est algébriquement dense et on va voir que $\pi(\Gamma)$ est relativement compacte an appliquant le théorème de super-rigidité de G. A. Margulis, et en distinguant donc suivant la nature de K [**18**].

Si $K=\mathbb{R}$, on peut supposer que H est R-simple en passant au quotient par le centre (fini) et si l'ensemble des points réels $H_{\mathbb{R}}$ était non compact, π se prolongerait en un isomorphism de $\mathrm{Sl}\,(d,\mathbb{R})$ sur $H_{\mathbb{R}}$, ce qui est exclu car $n<d$, dim $H_{\mathbb{R}}<d$. Donc $H_{\mathbb{R}}$ est compact et de même que $\overline{\pi(\Gamma)}$.

Si $K=\mathbb{C}$, on peut encore supposer H simple et l'isomorphisme entre $\mathrm{Sl}\,(d,\mathbb{C})$ et H est encore exclu, ce qui donne $\overline{\pi(\Gamma)}$ compact.

Si K est ultramétrique, $\overline{\pi(\Gamma)}$ est compact, Finalement $\rho(\Gamma)$ est contenu dans une extension d'un groupe résoluble par un groupe compact et $\overline{\rho(\Gamma)}$ est donc moyennable. On considère alors, comme dans la preuve du Théorème 4, la sous-représentation totalement irréductible dans $W_1\subset\Lambda^pV$ qui y est construite et qui contient le vecteur propre dominant de Λ^pa. Puisque $\overline{\rho(\Gamma)}$ est moyennable, son action sur l'espace projectif associé à W_1 laisse une mesure de probabilité invariante; à cause des propriétés de Λ^pa et de la totale irréductibilité de l'action de $\rho(\Gamma)$, cette mesure est concentrée au point attractif de Λ^pa, ce qui contredit l'irréductibilité de W_1 et dim $W_1\geq 2$. D'où $\rho(\Gamma)$ est presque résoluble, donc fini d'après la propriété de Kajdan.

2. *Sur les points limites de certains sous-groupes du groupe lineaire*

2.1. *Introduction*

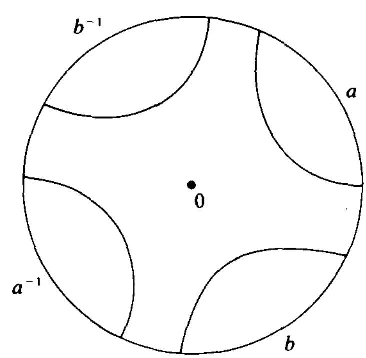
Si Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{Sl}\,(2,\mathbb{R})$; l'action de Γ sur le disque unité D par transformations conformes permet de définir la notion de points limites qui joue un rôle essentiel dans l'étude du flot géodésique sur la surface D/Γ. L'ensemble L_Γ de ces points limites soit égal au cercle unité, soit du type de Cantor, si Γ est non dégénéré. De plus l'action de Γ sur L_Γ possède des propriétés particulières, la minimalité par exemple. Dans cette partie on donne une extension à $\mathrm{Sl}\,(d,\mathbb{R})$ de la notion de points limites d'un sous-groupe fermé $\Gamma\subset\mathrm{Sl}\,(d,\mathbb{R})$. On montre en particulier que si Γ est 'non dégénéré', la dimension de Hausdorff de L_Γ est strictement positive, en utilisant les propriétés des produits de matrices aléatoires ([**5**], [**10**], [**12**]). On étudie l'action de Γ sur L_Γ et certaines mesures naturelles sur L_Γ. Ceci permet, en retour, de préciser les propriétés du spectre d'un tel produit.

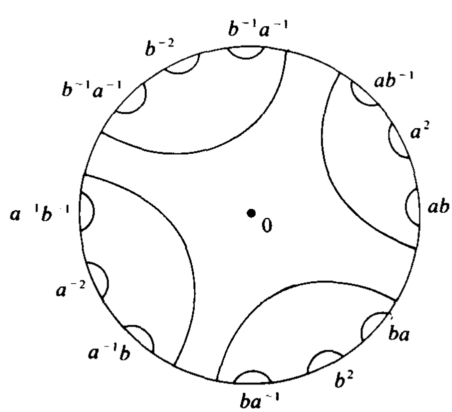
2.2. *Rappel sur les points limites*

Définition 1. Soit Γ un groupe localement compact et non compact opérant continûment sur un espace topologique E; on suppose E et Γ séparables. Pour $x \in E$ on appellera ensemble limite de x sous Γ, l'ensemble L_x des valeurs d'adhérence de l'orbite Γx suivant le filtre des complémentaires de parties compactes de Γ.

Il résulte de cette définition que L_x est un fermé Γ-invariant. Un exemple typique est fourni par le cas où $\Gamma \subset \mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ est engendré par 2 isométries hyperboliques du disque unité D notées A et B. Un polygone fondamental est dessiné ci-contre et on suppose que A envoie l'extérieur de l'arc a^{-1} sur l'intérieur de l'arc a; donc A^{-1} envoie l'extérieur de a sur l'intérieur de a^{-1} et de même pour $B^{\pm 1}$. On voit alors que les points $\gamma.\, 0(\gamma \in \Gamma)$ tendent vers un ensemble C du type de Cantor sur le cercle unité dont on dessine ci-dessous l'approximation d'ordre 2 comportant 4×3 arcs disjoints. On a donc $C = L$.

Rappelons qu'une condition suffisante pour qu'une partie fermée d'un espace euclidien soit de dimension de Haussdorff $\geq \alpha$ est qu'elle porte une mesure ν vérifiant





https://doi.org/10.1017/S0143385700005708 Published online by Cambridge University Press

par toute boule $B(a, \varepsilon)$ centrée en $a \in A$:

$$\nu[B(a, \varepsilon)] \leq \text{cte } \varepsilon^{\alpha}.$$

Il en est ainsi en particulier dès que $\text{Sup}_{a \in A} \int 1/(\|a-x\|^{\alpha}\, d\nu(x) < +\infty$.

La construction d'une telle mesure ν est naturelle dans l'exemple précédent, ainsi que pour l'ensemble triadique de Cantor classique et on va dans la suite étendre cette construction, puis en tirer des conclusions géométriques.

2.3. *Frontieres, espaces symetriques, points limites*

La notion de proximalité (§1.1, Def. 1) jouera un rôle essentiel. Un exemple typique est fourni par l'action de $G = Sl(d, \mathbb{R})$ sur l'espace projectif P^{d-1}. En effet, si $\gamma = \text{diag}(a^1, \ldots, a^d)$ avec $a^1 > a^{i+1}$ pour tout i on voit que si $x \in P^{d-1}$ est choisi en dehors des sous-variétés projectives joignant un nombre fini des points $\bar{e}_i$ associés aux vecteurs de base e_i $(1 \leq i \leq d)$, on $a: \lim_n \gamma^n x = \bar{e}_1$. La proximalité de G sur P^{d-1} découle alors de la transitivité de G sur P^{d-1}. Plus généralement on rappelle [**5**] que la frontière de Fürstenberg B de G est formée de drapeaux, c'est-à-dire des suites de d sous-espaces emboîtés distincts. Le drapeau canonique e est, par exemple, défini par la suite de multivecteurs $(e_1, e_1 \wedge e_2, \cdots e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d)$ correspondant à la suite des sous-espaces $\sum_{i<k} \mathbb{R}\, e_i$. L'argument précédent montre que pour $b \in B$ en dehors d'un sous-ensemble 'linéaire' exceptionnel on a $\lim_n \gamma^n b = e$, d'où encore la proximalité de l'action de G sur B, justifiant selon [**5**] le terme de frontière de G.

Notons A le groupe des matrices diagonales positives, N celui des matrices triangulaires supérieures unipotentes, K le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^d$, M le sous-groupe de K formé des matrices diagonales à coefficients ± 1.

Comme le stabilisateur de e est égal à MAN on a: $B = G/MAN = K/M$ et la décomposition d'Iwasawa: $G = KAN$. En particulier B est muni d'une mesure naturelle K-invariante que l'on notera m. Si alors $\gamma_n = \text{diag}(a_n^1, \ldots, a_n^d)$ avec $a_n^{i+1} = 0(a_n^i)$, il est clair que $\lim_n \gamma_n m = \delta_e$ propriété qui sera utilisée de manière essentielle dans la suite.

Considérons l'espace symétrique $S = G/K$ qui s'identifie ici à l'espace des matrices symétriques définies positives de déterminant unité, l'action de G sur S étant définie par $g \,.\, M = gMg^t$ $(g \in G, M \in S)$. Le noyau de Poisson $P(s, db)$ fait correspondre à la matrice Id la mesure m sur B. On notera ici 0 le point de S défini par Id et $P(s, db)$ fait alors correspondre au point $s = g \,.\, 0$ la mesure $g \,.\, m$. Si $\mathcal{P}(B)$ désigne l'espace compact en topologie vague des mesures de probabilités sur B, on a ainsi un plongement bicontinu $s \to P(s, .)$ de s dans $\mathcal{P}(B)$. On notera $\bar{S}$ l'adhérence de cette image; elle est appelée classiquement compactification de Moore de S [**19**] et on trouvera une description simple en [**10**]. Il est clair, vu la proximalité de G sur B que $\bar{S} \supset B$, où B est ici identifié aux mesures de Dirac δ_b sur B. En général $\bar{S}$ est la réunion de l'ouvert S, du fermé B et d'un nombre fini d'espaces homogènes de dimensions intermédiaires. Par exemple si $d = 3$, les éléments de $\bar{S} - S \cup B$ sont de deux types correspondant à des mesures portées par K identifié au fibré unitaire tangent à S^2:

(1) Les mesures 'du type de Poisson' portées par les vecteurs tangents aux grands cercles de S^2.

(2) Les mesures 'du type de Poisson' portées par le cercle des vecteurs unitaires tangents à S^2 en un point donné de S^2. Le stabilisateur d'une mesure du type 1 est de la forme

$$\begin{pmatrix} b(A) & a \\ 0 \quad 0 & c \end{pmatrix}$$

où A est orthogonal et $cb^2 \det A = 1$, a, $b \in \mathbb{R}$. L'ensemble S_1 de ces mesures est donc un fibré en disques unités au-dessus d'un plan projectif P^2. Il en est de même de S_2 et l'on a $\bar{S} = S \cup B \cup S_1 \cup S_2$ avec $B = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2$ apparaissant comme une frontière commune de S_1 et S_2. Soit alors Γ un sous-groupe fermé de G, σ un point de S, considérons la partie de S intersection de B et $\overline{\Gamma \cdot \sigma}$ et notons $\lambda = P(\sigma, db)$. Il est immédiat que la relation $\lim \gamma_n \cdot \lambda = \delta_b$ implique aussi $\lim \gamma_n \cdot m = \delta_b$. On peut donc poser la:

Définition 2. On appellera ensemble limite de Γ la partie fermée de B définie par $L_\Gamma = \overline{\Gamma \cdot 0} \cap B$.

On vient de voir que la proximalité de Γ sur B implique $L_\Gamma \neq \emptyset$. Pour une étude plus approfondie de L_Γ on introduit la condition suivante.

Définition 3. On dira que Γ est totalement irréductible sur B s'il ne laisse pas invariante de réunion finie de sous-espaces de $\Lambda^k \mathbb{R}^d (1 \leq k \leq d-1)$.

Si Γ est algébriquement dense la condition précédente est satisfaite. Il en est de même de la proximalité comme l'ont prouvé Goldsheid et G. A. Margulis [7].

Les premiers résultats de cette partie sont les suivants:

THÉORÈME 1. *Supposons Γ totalement irréductible et proximal sur B. Alors Γ agit de manière minimale sur l'ensemble des points limites L_Γ. De plus si $L_\Gamma \neq B$ alors L_Γ est parfait sans point intérieur.*

THÉORÈME 2. *Dans la situation du Théorème* 1, *L_Γ est de dimension de Hausdorff strictement positive.*

La preuve sera donnée plus loin en utilisant les propriétés des produits de matrices aléatoires que l'on rappelle brièvement ci-dessous.

2.4. *Produits de matrices aleatoires*

Soit μ une mesure de probabilité sur G de support $\sum_\mu$, T_μ (resp. Γ_μ) le semi-groupe (resp. groupe) engendré par le support de μ. L'action de G sur B définit une convolution entre mesures sur G et B: si μ et ν sont deux probabilités sur G et B respectivement on pose:

$$\mu * \nu = \int_B \delta_{g \cdot b} \, d\mu(g) \, d\nu(b).$$

On notera μ^n la $n^{\text{ième}}$ convolée de μ, π la mesure produit μ^N sur $\Omega^+ = (\sum_\mu)^N$. Soient $X_n(\omega)$ les fonctions coordonnées sur Ω^+ et $S_n(\omega)$ le produit $S_n(\omega) = X_n(\omega) X_{n-1}(\omega) \cdots X_1(\omega)$.

Un résultat essentiel de *H.* Fürstenberg dit que si T_μ est irréductible et non compact on a:

$$\text{p.p.}\quad \lim_n (1/n) \operatorname{Log} \|S_n\| = \gamma_1 > 0$$

$$\text{si}\quad \int \operatorname{Log} \|g\|\, d\mu(g) < +\infty$$

Concernant la frontière B on a les théorèmes suivants ([**5**], [**10**]).

THÉORÈME 3. *Soit μ une mesure de probabilité sur $Sl(d, \mathbb{R})$ telle que T_μ soit totalement irréductible et proximal sur B. Alors l'équation $\mu * \nu = \nu$ où ν est une probabilité sur B a une solution unique et la suite $X_1 \cdots X_n$. ν converge* p.p. *vers une mesure de Dirac.*

THÉORÈME 4. *Avec les notations du Théorème* 3 *supposons de plus*

$$\int \operatorname{Log} \|g\|\, d\mu(g) < +\infty$$

et écrivons S_n sous forme d'Iwasawa:

$$S_n = K_n A_n N_n \quad \text{avec} \quad K_n \in K,\ N_n \in N,\ A_n = \operatorname{diag}(a_n^1, \ldots, a_n^d) \in A.$$

On a alors p.p. *et pour tout i*

$$\lim (1/n) \operatorname{Log} a_n^1 = \gamma_1 > 0, \quad \lim (1/n) \operatorname{Log} a_n^i / a^{i+1} = \gamma_i - \gamma_{i+1} > 0.$$

De plus N_n converge p.p. *et la projection de K_n sur B converge en loi.*

THÉORÈME 5. *Avec les notations du Théorème* 4 *supposons de plus $\int \|g\|^c\, d\mu(g) < +\infty$ pour un certain $c > 0$. Alors il existe $\varepsilon > 0$, $\rho (0 < \rho < 1)$ et $C > 0$ avec*

$$\int (a_n^{i+1}/a_n^i)^\varepsilon(\omega)\, d\pi(\omega) \le C\rho^n.$$

Afin d'interpréter ces résultats dans l'espace symétrique S introduisons le drapeau e' associé aux multivecteurs $(e_d, e_d \wedge e_{d-1}, \ldots, e_d \wedge e_{d-1} \wedge \cdots \wedge e_1)$. Posant $g_i = X^{-1}$, $N_n^{-1} = \eta_n$, $A^{-1} = \alpha_n$ on obtient: $g_1 \cdots g_n \cdot m = \eta_n \alpha_n \cdot m$ et $\lim_n \alpha_n \cdot m = \delta_e$, donc $\lim \alpha_n \cdot 0 = e'$. $\lim \eta_n = \eta$ et $\lim g_1 \cdots g_n \cdot 0 = \eta \cdot e'$. On a donc en particulier la convergence de la suite $g_1 \cdots g_n \cdot 0$ vers un point de $\bar{S} - S$ situé dans B et de loi ν' vérifiant $\check{\mu} * \nu' = \nu'$ où $\check{\mu}$ est la symétrique de μ. Le théorème suivant donne un type d'estimation essentiel pour l'étude du spectre d'un produit de matrices aléatoires.

THÉORÈME 6. *Avec les hypothèses du Théorème* 3 *et supposant de plus*

$$\int \|g\|^c\, d\mu(g) < +\infty$$

pour un certain $c > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\int \|\eta(\omega)\|^\varepsilon\, d\pi(\omega) < +\infty$.

On peut observer que la loi $\nu' = \eta \cdot e'$ peut être considérée comme la mesure harmonique de la marche aléatoire sur Γ_μ de trajectoires $g_1 \cdots g_n$.

Remarque. Les résultats de [**13**] montrent que l'hypothèse d'irréductibilité et de proximalité de T_μ ne dépend que de l'adhérence algébrique de T_μ qui est un groupe. Elle vaut donc pour T_μ^{-1} et $(T_\mu)'$ aussi bien que pour T_μ.

2.5. *Quelques propriétés de l'action de* Γ sur L_Γ

THÉORÈME 1. *Supposons* Γ *totalement irréductible et proximal sur B. Alors* Γ *agit de manière minimale sur* L_Γ. *De plus si* $L_\Gamma \neq B$, L_Γ *est parfait sans points intérieurs.*

Preuve. Fixons une mesure μ symétrique avec $T_\mu = \Gamma$ que l'on peut supposer fermé. Montrons que le support $\sum_\nu$ de l'unique mesure invariante $\nu[\mu * \nu = \nu]$ est égal à L_Γ. Par construction de ν, on a $\sum_\nu \subset L_\Gamma$. Si $x \in L_\Gamma$, il existe $\gamma_n \in \Gamma$ avec $\lim \gamma_n \cdot m = \delta_x$. Mais la mesure ν possède des propriétés de non dégénérescence ([**10**], [**12**]) et en particulier, comme on l'a vu ici ne charge pas le complémentaire de $N \cdot e'$ dans B. Ceci suffit à assurer que l'on a aussi $\lim_n \gamma_n \cdot \nu = \delta_x$. Comme $(\gamma_n \cdot \nu)(\sum_\nu) = 1$ puisque $\sum_\nu$ est invariant sous T_μ donc sous Γ on a aussi à la limite: $\delta_x \in \sum_\nu$ donc $\sum_\nu = L_\Gamma$.

Si maintenant $F \subset L_\Gamma$ est un fermé invariant sous l'action de Γ l'opérateur de convolution par μ sur les probabilités portées par F admet un point fixe ν_1: $\mu * \nu_1 = \nu_1$. Comme il y a unicité de la mesure μ-invariante d'après le Théorème 3, on a $\nu_1 = \nu$ et $F = L_\Gamma = \sum_\nu$. Donce Γ est minimal sur L_Γ. En particulier L_Γ est égal à l'ensemble D de ses points d'accumulation puisque celui-ci est un fermé Γ-invariant. De même si $L_\Gamma \neq B$, la frontière $L_\Gamma - L_\Gamma^0$ est non vide et est un fermé Γ-invariant: par minimalité $L_\Gamma - L_\Gamma^0 = L_\Gamma$, ce qui donne $L_\Gamma^0 = \emptyset$.

Le recours à l'espace symétrique S n'est pas nécessaire pour la définition des points limites. On peut en effet faire opérer directement Γ sur la frontière de Fürstenberg B ou même sur des sous-frontières telles que l'espace projectif P^{d-1}. Ceci permet de donner la.

Définition 4. Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Sl}\,(d, \mathbb{R})$. On appelle point limite de Γ sur P^{d-1} tout point $p \in P^{d-1}$ tel qu'il existe une suite $\gamma_n \in \Gamma$ tendant vers l'infini avec $\lim \gamma_n \,.\, m = \delta_p$ où m désigne la mesure invariante par rotation sur P^{d-1}. L'ensemble de ces points limites sera noté L_Γ^1. Il est facile de voir que l'ensemble L_Γ^1 des points limites est un fermé Γ-invariant.

On a alors l'analogue du Théorème 1:

THÉORÈME 1'. *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathrm{Sl}\,(d, \mathbb{R})$ *opérant de manière totalement irréductible et proximale sur* P^{d-1}. *Alors l'ensemble des points limites* L_Γ *est un fermé non vide sur lequel* Γ *agit de manière minimale. Si* $L_\Gamma^1 \neq P^{d-1}$, L_Γ^1 *est parfait sans points intérieurs. De plus* L_Γ^1 *est l'adhérence de l'ensemble des points attractifs des éléments de* Γ *ayant une valeur propre dominante simple.*

Preuve. Il suffit d'utiliser l'analogue du Théorème 3 sous l'hypothèse affaiblie qui assure encore des résultats analogues si l'on remplace B par P^{d-1} [**10**]. Le fait que L_Γ^1 soit non vide découle de [**5**]. Dans la partie 2.1 on a vu au Théorème 3 que Γ contenait des éléments ayant une valeur propre dominante simple; l'ensemble des points attractifs correspondants est donc non vide et contenu dans L_Γ^1. Son adhérence est un fermé Γ-invariant qui est égal à L_Γ^1 par minimalité de l'action de Γ sur L_Γ^1. On a aussi les analogues des Théorèmes 3, 4, 5 qui seront brièvement justifiés.

Avant de montrer le Théorème 2, prouvons le.

THÉORÈME 2'. *Soit Γ un sous-groupe de* $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ *opérant de manière totalement irréductible et proximale sur P^{d-1}. Alors l'ensemble des points limites L^1_Γ est de dimension de Hausdorff strictement positive.*

Le Théorème 2 découle immédiatement du Théorème 2' et du lemme suivant car la projection de B sur P^{d-1} est Lipchitzienne pour les métriques naturelles.

LEMME 1. *Dans la situation du Théorème* 1, *la projection naturelle de B sur P^{d-1} applique L_Γ sur L^1_Γ.*

Preuve. Par définition de L_Γ et L^1_Γ la projection de L_Γ dans P^{d-1} est un compact Γ-invariant contenu dans L^1_Γ. Par minimalité de l'action de Γ sur L^1_Γ, ce compact est égal à L^1_Γ.

La preuve du Théorème 2' repose sur le.

LEMME 2. *Soit (C, d) un espace métrique compact, A et B deux compacts disjoints de C, s et t deux applications continues de C dans C vérifiant $s(C) \subset A$, $t(C) \subset B$.*

On suppose que pour deux constantes $\rho, \rho' \in]0, 1[$ on a

$$\forall x, y \in C \quad \rho' d(x, y) \le d(sx, sy) \le \rho d(x, y)$$
$$\rho' d(x, y) < d(tx, ty) \le \rho d(x, y).$$

Alors, notant $S = \{s, t\}$ et $C^\infty = \bigcap_{n>0} S^n C$, le compact C^∞ est homéomorphe à l'espace produit S^N et de dimension de Hausdorff strictement positive.

Preuve. Soit $\sigma = (s_k)_{k \in N} \in S^N$ et observons que la suite $s_1 s_2 \cdots s_n C$ est décroissante de diamètre majoré par $c\rho^n$; son intersection définit donc un point $\bar\sigma = \lim_n s_i s_n \cdots s_n C$. Comme d'autre part $S^n C$ est réunion disjointe des $s_1 s_2 \cdots s_n C$ $(s_1 \in S)$, il est clair que C^∞ est l'image de S^N par l'application $\sigma \to \bar\sigma$. Soient σ, $\sigma' \in S^N$ avec $\sigma = (s_k)$, $\sigma = (s'_k)$ et $s_k = s'_k$ $(k \le n)$ et estimons $d(\bar\sigma, \bar\sigma')$. Pour $x \in C$ on a $\bar\sigma = \lim_k s_1 s_2 \cdots s_k x$, $\bar\sigma' = \lim_k s'_1 s'_2 \cdots s'_k x$.

Or $d(s_{n+1} \cdots s_k x, s'_{n+1} \cdots s'_k x) \le c$ et donc $d(\bar\sigma, \bar\sigma') \le c\rho^n$.

De même, puisque $s_{n+1} \ne s'_{n+1}$ on a

$$d(s_{n+1} \cdots s_k x, s'_{n+1} \cdots s'_k x) \ge d(A, B) = \varepsilon > 0$$

et $d(\bar\sigma, \bar\sigma') \ge \rho'^n \varepsilon$.

L'espace S^N muni de la métrique définie par $\delta(\sigma, \sigma') = 1/2^n$ pour σ et σ' du type précédent est compact, de dimension de Hausdorff 1. Les inégalités précédentes peuvent alors s'écrire avec des constantes $\alpha, \beta > 0$

$$\varepsilon \delta(\sigma, \sigma')^\beta \le d(\bar\sigma, \bar\sigma') \le c \delta(\sigma, \sigma')^\alpha.$$

On a donc l'homéomorphisme de C^∞ et S^N avec positivité de la dimension de Hausdorff de C^∞, majorée en fonction de α et minorée en fonction de β.

LEMME 3. *Soient g et h deux applications linéaires ayant des valeurs propres dominantes simples, réelles. On suppose le point attractif de g distinct de celui de h, n'appartenant pas à l'hyperplant répulsif de h et vice-versa. Alors, pour la métrique naturelle δ sur P^{d-1}, il existe deux boules fermées disjointes A et B, un entier $n > 0$ et des constantes*

ρ, $\rho' \in]0, 1[$ *telles que*

$$g^n(A \cup B) \subset A, \quad h^n(A \cup B) \subset B$$
$$\rho' \delta(x, y) \leq \delta(rx, ry) \leq \rho \delta(x, y)$$

pour x, $y \in A \cup B$ *et* $r = g^n$ ou h^n.

Preuve. Soient 0 un point de P^{d-1}, H un hyperplan, u une application projective fixant 0 et H. On peut alors considérer $P^{d-1} - H$ comme un espace vectoriel $\mathbb{R}^{d-1}$, que l'on peut normer, et u comme une application linéaire inversible. Si u admet une valeur propre dominante simple, 0 étant le point attractif correspondant, on a pour tout compact C de $P^{d-1} - H$: $\lim_n u^n(C) = 0$. Donc pour n assez grand il existe η, $\varepsilon \in]0, 1[$ avec

$$\varepsilon \|x\| \leq \|u^n x\| \leq \eta \|x\| \quad (x \notin H).$$

Pour le compact C, il existe d'autre part deux constantes a et b telles que sur C: $a\|x - y\| \leq \delta(x, y) \leq b\|x - y\|$. Le compact C étant choisi de façon que $u(C) \subset C$, on en déduit pour tout $p \in \mathbb{N}$ et x, y dans C:

$$\frac{a}{b} \varepsilon^p \delta(x, y) \leq \delta(u^{np}x, u^{np}y) \leq \frac{b}{a} \eta^p \delta(x, y).$$

D'où en prenant p assez grand, l'existance de ρ, $\rho' \in [0, 1[$, avec

$$\forall (x, y) \in C \times C: \rho' \delta(x, y) \leq \delta(u^{np}x, u^{np}y) \leq \rho \delta(x, y).$$

Revenant à la situation du lemme prenons pour A et B des boules centrées aux points attractifs de g et h, ne rencontrant pas les hyperplans répulsifs. Alors pour tout n assez grand $g^n(A \cup B) \subset A$, $h^n(A \cup B) \subset B$. Utilisant le début de la preuve avec $u = g^n$ ou h^n, $C = A \cup B$ on obtient, en prenant n assez grand ($r = g^n$ ou h^n) $\rho, \rho' \in]0, 1[$ avec $\rho' \delta(x, y) \leq \delta(rx, ry) \leq \rho \delta(x, y)$ pour $(x, y) \in C \times C$.

Preuve du Théorème 2'. Le Théorème 3 de la partie I permet de trouver g et h dans Γ ayant des valeurs propres dominantes simples, à cause de la proximalité et de l'irréductibilité de l'action de Γ sur P^{d-1}. Les Lemmes 2 et 3 montrent alors, avec $s = g^n$, $t = h^n$, $S = \{s, t\}$ qu'il existe C d'intérieur non vide tel que le compact $C^\infty = \bigcap_n S^n C$ soit de dimension de Hausdorff positive. Si m_1 est la restriction de la mesure de Lebesgue à C et $\sigma = (s_k) \in S^N$; la suite de mesures $s_1 \cdots s_k \bar{m}$ converge vers la mesure de Dirac en $\bar{\sigma} = \bigcap_k (s_1 \cdots s_k C)$. Il en est donc de même de la suite $s_1 \cdots s_k m$ [9] et $\bar{\sigma} \in C^\infty$ est un point limite de Γ. Cet ensemble de points limites L_Γ^1 contient donc C^∞ et est de dimension de Hausdorff positive.

2.6. *Calculs de moments sur les groupes nilpotents*

Le groupe N présente une structure graduée facilitant les calculs. En effet si E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du terme dans la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne où il vaut 1, on peut décomposer l'algèbre de Lie η de N sous la forme

$$\eta = \bigoplus_{i=1}^{d-1} \eta^i \quad \text{avec} \quad \eta^i = \sum_{k-j=i} \mathbb{R} \cdot E_{jk}$$

et les η^i définissent une graduation de η. On identifiera η et N par l'exponentielle, le produit $x \circ y (x, y \in N)$ étant alors donné par la formule de Campbell–Hausdorff.

Les éléments α de A définissent une famille naturelle commutative d'automorphisme de N: $\alpha(\beta)=\alpha\beta\alpha^{-1}$ ($\beta\in N$). En particulier on notera Λ la famille 'd'homothéties' $\alpha=\operatorname{diag}(\lambda^d,\lambda^{d-1},\dots,\lambda)$; l'action d'un tel α sur $\eta^i=N^i$ se réduit à la multiplication par λ^i. Ayant fait des choix de normes sur les espaces vectoriels $\eta^i:\beta^i\to|\beta^i|$, on peut 'normer' $\eta=N$ par $((\beta))=\operatorname{Sup}_{1\le i\le d-1}|\beta_i|^{1/i}$ où $\beta=\sum_{i=1}^{d-1}\beta_i$. Alors, si l'on note u_λ l'élément de Λ définie par λ on a [11]

$$((u_\lambda(x)))=|\lambda|((x))\quad (x\in N)$$
$$((x\circ y))\le((x))+((y))+\text{cte}.$$

Ici à cause de la graduation la constante est nulle:

$$((u_\lambda(x\circ y)))=((u_\lambda(x)\circ u_\lambda(y)))\le|\lambda|((x))+|\lambda|((y))+\text{cte}$$

et aussi $((u_\lambda(x\circ y)))=|\lambda|((x\circ y))$. Donc

$$((x\circ y))\le((x))+((y))+(\text{cte}/|\lambda|)$$

et prenant $|\lambda|$ grand, on obtient bien $((x\circ y))\le((x))+((y))$. Pour un automorphisme u de N commutant avec Λ on peut alors définir une 'norme' par

$$((u))=\sup_{x\neq 0}((ux))/((x))=\operatorname*{Sup}_{((x))=1}((ux)).$$

En particulier si $\alpha=\operatorname{diag}(\alpha^1,\alpha^2,\dots,\alpha^d)$ on voit que la norme de l'automorphisme associé à α est $((\alpha))=\operatorname{Sup}_{1\le i\le d}|\alpha^i/\alpha^{i+1}|$.

Il est clair que N est complet pour la distance associée à $((\cdot))$ et il est donc aisé d'étendre un certain nombre de propriétés de $\mathbb{R}^n$.

LEMME 4. *Soient $\alpha_n(\omega)$, $\beta_n(\omega)$ des suites aléatoires d'éléments de A, N respectivement, vérifiant pour un certain $\varepsilon>0$.*

$$\overline{\lim_n}\left[\int((\alpha_n(\omega)))^\varepsilon\,d\pi(\omega)\right]^{1/n}=\rho<1,$$
$$\operatorname*{Sup}_n\int((\beta_n(\omega)))^\varepsilon\,d\pi(\omega)<+\infty.$$

Alors le produit

$$\eta_n=\beta_1\circ\alpha_1(\beta_2)\circ\alpha_2(\beta_3)\circ\cdots\circ\alpha_{n-1}(\beta_n)$$

converge p.p. vers η et l'on a

$$\int((\eta(\omega)))^{\varepsilon/2}\,d\pi(\omega)<+\infty,\quad \overline{\lim_n}\left[\int((\eta_n^{-1}\eta(\omega)))^{\varepsilon/2}\,d\pi(\omega)\right]^{1/n}=\rho<1.$$

Preuve. On va appliquer le critère de Cauchy à la suite η_n

$$((\eta_n))\le\sum_{i=1}^{n-1}((\alpha_i))((\beta_{i+1})),$$
$$((\eta_n))^{\varepsilon/2}\le\sum_{i=1}^{n-1}((\alpha_i))^{\varepsilon/2}((\beta_{i+1}))^{\varepsilon/2},$$
$$\int((\eta_n))^{\varepsilon/2}\,d\pi\le\sum_{i=1}^{n-1}\left(\int((\alpha_i))^\varepsilon\,d\pi\right)^{1/2}\left(\int((\beta_{i+1}))^\varepsilon\,d\pi\right)^{1/2},$$
$$\int((\eta_n))^{\varepsilon/2}\,d\pi\le cte(1/1-\rho^{1/2})<+\infty.$$

De la même façon

$$((\eta_n^{-1})\eta_{n+p}) \le \sum_n^{\infty} ((\alpha_i))((\beta_{i+1})).$$

Posant $U_n = \operatorname{Sup}_p ((\eta_n^{-1})\eta_{n+p})$ on obtient

$$\int U_n(\omega)^{\varepsilon/2} \, d\pi(\omega) \le \text{cte } \rho^{n/2}.$$

Ceci prouve d'une part la convergence presque sûre de $U_n(\omega)$ vers zéro, donc la convergence de η_n vers η. On a donc

$$\int \|\eta(\omega)\|^{\varepsilon/2} \, d\pi(\omega) < +\infty.$$

De plus:

$$\int \|\eta_n^{-1}\eta(\omega)\|^{\varepsilon/2} \, d\pi(\omega) \le \int U_n(\omega)^{\varepsilon/2} \, d\pi(\omega) \le \text{cte } \rho^{n/2}.$$

LEMME 5. *Soit $g_i (1 \le i \le n)$ une suite d'éléments de* $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ *et décomposons les produits $g_1 \cdots g_i$ sous la forme d'Iwasawa: $g_1 \cdots g_1 = \eta_i \alpha_i k_i (\eta_i \in N,\ \alpha_i \in A,\ k_i \in K)$. Alors η_n s'écrit avec des β_i fonctions de g_i et k_{i-1}:*

$$\eta_n = \beta_1 \circ \alpha_1(\beta_2) \circ \cdots \circ \alpha_{n-1}(\beta_n).$$

Preuve. On l'établit par récurrence sur n. Notons $kg = b(g, k)(k \circ g)$ où $k \circ g \in K = G/AN$, $a(g, k) \in N$ et admettons la relation voulue à l'ordre n. Alors, à l'ordre $n+1$:

$$g_1 \cdots g_n g_{n+1} = \eta_n \alpha_n b(g_{n+1} k_n) a(g_{n+1}, k_n) k_n \cdot g_{n+1}$$

d'où en particulier

$$\eta_{n+1} = \eta_n \circ \alpha_n(\beta_{n+1}) \quad \text{avec} \quad \beta_{n+1} = b(g_{n+1}, k_n).$$

De plus on note que $\alpha_{n+1} = \alpha_n a(g_{n+1}, k_n)$, $k_{n+1} = k_n \cdot g_{n+1}$.

Preuve du Théorème 6. Considérons maintenant la situation du Théorème 6 avec $g_1 \cdots g_n = \eta_n \alpha_n k_n$ et les $g_i(\omega) \in \sum_\mu$ satisfaisant $\int \|g_i(\omega)\|^c \, d\pi(\omega) \le \text{cte}$.

Le Lemme 4 donne l'écriture de η_n sous la forme $\eta_n = \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_{i-1}(\beta_i)$ avec des β_i vérifiant comme les g_i:

$$\int \|\beta_i(\omega)\|^c \, d\pi(\omega) \le \text{cte}.$$

Observons que les calculs d'exponentielles et de logarithme dans N donnent

$$((\beta)) \le \text{cte } (1 + \|\beta\|^{d-1}), \quad \|\beta\| \le \text{cte}[1 + ((\beta))^{d-1}], \quad \|\beta - I\| \le \text{cte} \sum_1^{d^2} ((\beta))^k$$

on a donc aussi

$$\int ((\beta_i(\omega)))^{c'} \, d\pi(\omega) \le \text{cte} \quad \text{avec} \quad c' = c/(d-1).$$

https://doi.org/10.1017/S0143385700005708 Published online by Cambridge University Press

Comme d'autre part $((\alpha_p)) = \operatorname{Sup}_{1<j<d-1} |a^{j+1}/a^j|$ le Théorème 5 relatif aux produits de matrices aléatoires nous donne

$$\lim_n \left[\int ((\alpha_n(\omega)))^{\varepsilon'} \, d\pi(\omega)\right]^{1/n} \le \rho < 1$$

pour un certain ε'. On peut donc appliquer le Lemme 1 qui donne si $\varepsilon' < c/(d-1)$:

$$\int ((\eta(\omega)))^{\varepsilon'/2} \, d\pi(\omega) < +\infty, \quad \overline{\lim} \left[\int ((\eta_n^{-1}\eta(\omega)))^{\varepsilon'/2} \, d\pi(\omega)\right]^{1/n} < 1.$$

Enfin la comparaison de $((\eta))$ et $\|\eta\|$ donne $\int \|\eta(\omega)\|^{\varepsilon} \, d\pi(\omega) < +\infty$ avec $\varepsilon = \varepsilon'/2(d-1)$. La relation $\|\eta_n - \eta\| \le \|\eta_n\| \, \|I - \eta_n^{-1}\eta\|$ permet d'aboutir de même a:

$$\overline{\lim} \left[\int \|\eta_n - \eta\|^{\lambda} \, d\pi(\omega)\right]^{1/n} < 1 \quad \text{avec} \quad \lambda = \varepsilon'/2d^2.$$

2.7. *Estimation de la mesure invariante sur la frontiere de fürstenberg*

On a vu que la frontière B s'identifie à K/M; d'autre part K est muni de la distance de la norme $d(k, k') = \|k - k'\|$; une distance naturelle δ, invariante sur K se trouve donc définie sur B par passage au quotient. Pour b et b' dans B on peut en particulier trouver des représentants k et k' dans k tels que: $\delta(b, b') = \|k - k'\|$.

THÉORÈME 7. *Soit μ une mesure sur* $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ *vérifiant* $\int \|g\|^c \, d\mu(g) < +\infty$ *pour un certain $c > 0$ telle que T_μ soit totalement irréductible et proximal sur B. Soit ν' la loi de* $\lim g_1 \cdots g_n \cdot 0 \in B$. *On a alors* $\operatorname{Sup}_{b\in B} \int (1/\delta^{\varepsilon}(b, b')) \, d\nu'(b') < +\infty$ *pour un certain $\varepsilon > 0$.*

Preuve. On a vu, avec les notations précédentes que $\lim_n g_1 \cdots g_n \cdot 0 = \eta \cdot e' \in N \cdot e' \subset B$ et que $\int \|\eta(\omega)\|^{\varepsilon} \, d\pi(\omega) < +\infty$. Soit w un élément de K avec $we' = e$, k un élément de K correspondant à η et donc défini par $\eta \cdot e' = k \cdot e'$. On peut observer que k est défini modulo M et que l'application $\eta \to \bar{k} \in K/M$ est l'analogue de la projection stéréographique classique. Afin de comparer $\|k - w\|$ et $\|\eta\|$ notons que: $(ke_d)\|\eta e_d\| = \pm \eta e_d$ et donc $|\langle ke_d, e_d\rangle| \, \|\eta e_d\| = 1$, soit $\|\eta\| \, |\langle ke_d, e_d\rangle| \ge 1$.

Or si

$$we_d = \pm e_1$$

on a

$$|\langle ke_d, e_d\rangle| = |\langle (k - w)e_d, e_d\rangle| \le \|k - w\|$$

ce qui donne $\|k - w\| \ge |\langle ke_d, e_d\rangle| \ge (1/\|\eta\|)$. On a donc bien, d'après le Théorème 5, en projetant dans B:

$$\int (1/\delta^{\varepsilon}(\bar{w}, \bar{k})) \, d\nu(\bar{k}) < +\infty.$$

Si $r \in K$, le changement de y par $\delta_r * \mu * \delta_{r^{-1}}$ aboutit à changer ν' en $r \cdot \nu'$ et l'uniformité valable dans le Théorème 5 relatif aux matrices aléatoires donne en particulier des ε et ρ valable pour tout r et donc

$$\int (1/\delta^{\varepsilon}(\bar{w}, b)) \, dr \cdot \nu'(b) \le +\infty$$

comme $\delta(r\cdot \bar{w}, r\cdot b)=\delta(\bar{w}, b)$ on obtient, pour tout $r\in B$:

$$\int (1/\delta^{\varepsilon}(r\cdot \bar{w}, b))\, d\nu'(b)\leq \text{cte}<+\infty$$

ce qui achève la preuve car K est transitif sur B.

Remarque. Ce théorème fournit une nouvelle preuve du Théorème 2.

2.8. *Estimation de la mesure invariante sur l'espace projectif*

THÉORÈME 7′. *Avec l'hypothèse du Théorème 2′, soit μ une mesure de probabilité sur Γ telle que $T_\mu=\Gamma$ et $\int \|g\|^c\, d\mu(g)<+\infty$ pour un certain $c>0$, ν l'unique mesure μ-invariante sur $P^{d-1}(\mu * \nu=\nu)$. Alors pour la distance naturelle δ sur P^{d-1} et le produit scalaire $\langle a, b\rangle$ sur S^{d-1} on a*

$$\operatorname*{Sup}_{\bar{a}\in P^{d-1}} \int (1/\delta^{\varepsilon}(\bar{a}, \bar{b}))\, d\nu(\bar{b})<+\infty \quad \text{pour un certain } \varepsilon>0.$$

$$\operatorname*{Sup}_{\bar{a}\in P^{d-1}} \int \frac{1}{|\langle a, b\rangle|^{\varepsilon}}\, d\nu(\bar{b})<+\infty.$$

Afin de justifier cet énoncé ou plutôt un énoncé équivalent, donnons quelques notations et lemmes. Si N est le groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes, V le sous-groupe de N vérifiant $Ve_i=e_i(1\leq i\leq d-1)$, M le sous-groupe de N vérifiant $Me_d=e_d$, on a la décomposition en produit semi-direct $N=V\cdot M$ où V est distingué et s'identifie à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{d-1}$. Ainsi N apparaît comme un sous-groupe du groupe affine de $\mathbb{R}^{d-1}$ et P^{d-1} comme l'espace projectif complété de l'espace affine $Ve_d\sim\mathbb{R}^{d-1}$. Les éléments de M s'identifient à des matrices $(d-1\times d-1)$ et sont donc naturellement normés.

LEMME 6. *Soient $m_n(\omega)$, $v_n(\omega)$ des suites aléatoires d'éléments de M, V vérifiant pour un certain $\varepsilon\in\,]0, 1[$:*

$$\overline{\lim_n}\left[\int \|v_n(\omega)\|^{\varepsilon}\, d\pi(\omega)\right]^{1/n}=\rho<1$$

$$\overline{\lim_n}\left[\int \|m_n(\omega)\|^{\varepsilon}\, d\pi(\omega)\right]^{1/n}=1/\rho.$$

Alors la composante s_n sur V du produit $\prod_n=v_1m_1v_2m_2\cdots v_nm_n$ converge p.p. *vers $s((\omega))$ et l'on a*:

$$\int \|s(\omega)\|^{\varepsilon'}\, d\pi(\omega)<+\infty, \quad \overline{\lim_n}\left[\int \|s(\omega)-s_n(\omega)\|^{\varepsilon'}\, d\pi(\omega)\right]^{1/n}<1$$

pour $\varepsilon'=(\varepsilon/2(d-2)^2)$.

Preuve. On écrit $s_n(\omega)$ composante de $\prod_n(\omega)$:

$$s_n=v_1+m_1(v_2)+m_1m_2(v_3)+\cdots+m_1\cdots m_{n-1}(v_n)$$

et

$$\|s_n\|^{\varepsilon'}\leq\sum_k \|m_1\cdots m_k\|^{\varepsilon'}\|v_{k+1}\|^{\varepsilon'}.$$

https://doi.org/10.1017/S0143385700005708 Published online by Cambridge University Press

On a vu précédemment que pour $m \in M$

$$\|m\| \leq 1 + \text{cte}\,((m))^{d-2}, \quad ((m)) \leq \text{cte}\,[1 + \|m\|^{d-1}].$$

On en déduit:

$$\|m_1 \cdots m_k\|^{\varepsilon'} \leq 1 + \text{cte}\,[((m_1))^{(d-2)\varepsilon'} + \cdots + ((m_k))^{(d-2)\varepsilon'}]$$

$$\|m_1 \cdots m_k\|^{\varepsilon'} \leq 1 + \text{cte}\,[+\|m_1\|^{\varepsilon/2} + \cdots + \|m_k\|^{\varepsilon/2}].$$

L'hypothèse nous donne que pour ε'' assez petit et un certain $t > 0$:

$$\int \|v_n(\omega)\|^{\varepsilon}\, d\pi(\omega) \leq \text{cte}\,(\rho + \varepsilon'')^n,$$

$$\int \|m_n(\omega)\|^{\varepsilon}\, d\pi(\omega) \leq \text{cte}\,[1/\rho - t + \varepsilon'']^n.$$

On en déduit, par l'inégalité de Schwarz,

$$\int \|m_1 \cdots m_k\|^{\varepsilon'} \|v_{k+1}\|^{\varepsilon'}\, d\pi(\omega) \leq \text{cte}\,(\rho + \varepsilon'')^k [1 + k + k((1/\rho) - t + \varepsilon'')^k].$$

Si ε'' est choisi de façon que $\rho + \varepsilon'' < 1$ et $(\rho + \varepsilon'')((1/\rho) - t + \varepsilon'') - t + \varepsilon'') < 1$, on a obtenu la convergence géométrique de la série des intégrales des termes $\|m_1 \cdots m_k\|^{\varepsilon'} \|v_{k+1}\|^{\varepsilon'}$ et donc, comme précédemment la convergence de $s_n(\omega)$ vers $s(\omega)$ avec

$$\int \|s(\omega)\|^{\varepsilon'}\, d\pi(\omega) < +\infty.$$

De plus $s(\omega) - s_n(\omega)$ est le reste de la série qui définit $s(\omega)$ et la majoration géométrique précédente fournit aussi une majoration géométrique de l'intégrale de $\|s(\omega) - s_n(\omega)\|^{\varepsilon'}$.

Le Théorème 5 devient ici, avec un énoncé légèrement précisé par rapport à [10] où l'on trouvera en fait la démonstration (Proposition 2 et Théorème 3, §2.2).

THÉORÈME 5'. *Soit Γ un sous-groupe de* $\mathrm{Sl}\,(d, \mathbb{R})$ *opérant de manière totalement irréductible et proximale sur P^{d-1}. Soit μ une mesure de probabilité portée par Γ telle que $T_\mu = \Gamma$ et $\int \|g\|^c\, d\mu(g) < +\infty$ pour un certain c. Soient X_n des variables aléatoires indépendantes de loi μ, S_n le produit $X_n \cdots X_1$, et décomposons S_n sous la forme d'Iwasawa $S_n = K_n A_n N_n$ avec en particulier $A_n = \mathrm{diag}\,(a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^d)$. Alors on a pour tout ε assez petit positif et des constantes $\gamma > 0$, $c > 0$:*

$$\overline{\lim_n} \left[\int |a_n^{i+1}/a_n^i|^{\varepsilon}\, d\pi(\omega) \right]^{1/n} \leq 1 + C\varepsilon^2 \quad (i \neq 1, d-1)$$

$$\overline{\lim_n} \left[\int |a_n^{j+1}/a_n^j|^{\varepsilon}\, d\pi(\omega) \right]^{1/n} \leq 1 - \gamma\varepsilon \quad (j = 1, d-1).$$

On peut alors énoncer le Théorème 6' qui, à cause de la présence d'exposants égaux, présente une difficulté supplémentaire par rapport au Théorème 6.

https://doi.org/10.1017/S0143385700005708 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 6′. *Avec les notations du Théorème* 5′, *écrivons* S_n^{-1} *sous la forme d'Iwasawa*:

$$S_n^{-1} = \eta_n \alpha_n k_n.$$

Alors la composante s_n *de* η_n *sur* V *converge* p.p. *vers* s *et l'on a, pour un certain* $\varepsilon > 0$:

$$\int \|s(\omega) - s_n(\omega)\|^\varepsilon \, d\pi(\omega) < +\infty, \quad \overline{\lim_n} \left[\int \|s(\omega) - s_n(\omega)\|^\varepsilon \, d\pi(\omega) \right]^{1/n} < 1.$$

Preuve. Reprenons la preuve du Théorème 6 en écrivant:

$$\eta_n = \beta_1 \cdot \alpha_1(\beta_2) \cdots \alpha_{n-1}(\beta_n)$$

avec ici

$$\beta_i = v_i' m_i', \in V, \; m_i' \in M$$

et donc

$$\alpha_i(\beta_i) = \alpha_i(v_i')\alpha_i(m_i') = v_i m_i.$$

L'action de α sur le vecteur v' est celle d'une matrice diagonale de coefficients α^k/α^d $(k<d)$; il en est de même sur la matrice m_i' décomposée dans la base canonique et les coefficients sont maintenant $\alpha^k/\alpha^P (k<P<d)$. On a donc, par application de l'inégalité de Schwarz et du Théorème 5′ où $\alpha_n = a_n^{-1}$, pour ε assez petit et avec des nouvelles constantes $c>0$, $\gamma>0$:

$$\overline{\lim_n} \left[\int \|v_n(\omega)\|^\varepsilon \, d\pi(\omega) \right]^{1/n} \leq 1 - \gamma\varepsilon$$

$$\overline{\lim_n} \left[\int \|m_n(\omega)\|^\varepsilon \, d\pi(\omega) \right]^{1/n} \leq 1 + C\varepsilon^2.$$

Les hypothèses du lemme sont satisfaites pour ε assez petit et on peut conclure à la convergence de la composante de η_n sur V vers s avec $\int \|s(\omega)\|^{\varepsilon'} d\pi(\omega) < +\infty$ pour un certain $\varepsilon' > 0$, de même qu'*à* la majoration géométrique de l'intégrale de $\|s(\omega) - s_n(\omega)\|^{\varepsilon'}$.

Preuve du Théorème 7′. On procède comme au Théorème 7 et on adopte les mêmes notations $g_i = x_i^{-1}$ et ν' étant la loi limite de $g_1 \ldots g_n \cdot m = \eta_n \alpha_n . m$. On note de la même façon, les vecteurs e_i et les points correspondants. La propriété $\lim_n \alpha_n^j/\alpha_n^d = 0$ $(j<d)$ donne encore ici $\lim_n \alpha_n \cdot m = \delta_{e_d}$ et comme M fixe e_d on a, la composante de η_n sur V convergeant sur $s(\omega)$:

$$\lim_n g_1 \cdots g_n \cdot m = s(\omega) \cdot \delta_{e_d}$$

avec

$$\int \|s(\omega) e_d\|^\varepsilon \, d\pi(\omega) < +\infty.$$

On introduit encore $w \in K$ avec $w \cdot e_d = e_1$, $k \in K$ avec $k \cdot e_d = s \cdot e_d$, k étant défini modulo le statiblisateur K_0 de e_d. Soit δ la métrique quotient sur $P^{d-1} = K/K_0$ définie à partir de la norme:

$$\delta(k \cdot e_d, k' \cdot e_d) = \operatorname*{Inf}_{r \in K_0} \|k^{-1}k' - r\|$$

et comparons $\|se_d\|$ et $\delta(k \cdot e_d, e_1)$:

on a encore

$$\pm k e_d \|s e_d\| = s e_d$$

et donc

$$\|s e_d\| |\langle k e_d, e_d\rangle| \geqslant 1.$$

D'où comme au Théorème 6:

$$\|k - w\| \, \|s e_d\| \geq 1$$

et

$$\delta(k \cdot e_d) \|s e_d\| \geq 1.$$

La condition $\int \|s(\omega)\|^{\varepsilon} \, d\pi(\omega)$ du Théorème 6' donne alors

$$\int (1/\delta^{\varepsilon}(\bar{b}, \bar{e}_1)) \, d\nu'(\bar{b}) < +\infty$$

comme au Théorème 6 on conclut grâce aux uniformités valables pour les mesures $\delta_{\sigma} * \mu * \delta_{\sigma^{-1}} (\sigma \in K)$:

$$\operatorname*{Sup}_{\bar{a} \in P^{d-1}} \int (1/\delta(\bar{a}, \bar{b})^{\varepsilon} \, d\nu'(\bar{b}) < +\infty.$$

Reprenant le calcul précédent, on obtient aussi

$$|\langle k e_d, e_d\rangle|^{-\varepsilon} \leq \|s e_d\|^{\varepsilon}$$

et la condition du théorème 6' donne encore:

$$\int |\langle e_d, \bar{b}\rangle|^{-\varepsilon} \, d\nu'(\bar{b}) < +\infty.$$

On conclut grâce aux uniformités valables pour les mesures

$$\delta_{\sigma} * \mu * \delta_{\sigma^{-1}} (\sigma \in K)$$

$$\operatorname*{Sup}_{a \in P^{d-1}} \int |\langle a, b\rangle|^{-\varepsilon} \, d\nu'(b) < +\infty.$$

2.9. *Spectre d'un produit de matrices aleatoires*

L'objet de ce paragraphe est de prouver le.

THÉORÈME 8. *Soit μ une mesure de probabilité sur* $\mathrm{Sl}(d, \mathbb{R})$ *telle que T_{μ} agisse de façon proximale et totalement irréductible sur P^{d-1}. On suppose qu'il existe $c > 0$ avec $\int \|g\|^{c} \, d\mu(g) < +\infty$. Alors, presque sûrement, le produit de matrices aléatoires $S_n(\omega)$ admet, pour tout n assez grand, une valeur propre dominante réelle simple λ_n. On a aussi, avec $\gamma = \lim n^{-1}$* Log $\|S_n\|$

$$\text{p.p.} \quad \lim \frac{1}{n} \operatorname{Log} |\lambda_n| = \gamma.$$

Ce théorème découlera du suivant.

THÉORÈME 9. *Avec les notations et hypothèses du Théorème* 8, *la trace de $S_n(\omega)$ vérifie*: p.p. $\lim n^{-1} \log |TrS_n| = \gamma$.

https://doi.org/10.1017/S0143385700005708 Published online by Cambridge University Press

Ce théorème découle de plusieurs lemmes.

LEMME 7. *Ecrivons S_n dans la décomposition d'Iwasawa $S_n = K_nA_nN_n$. Alors $Tr(S_n) = \sum_{i=1}^d a_n^i\langle K_ne_i, N_n^t e_i\rangle$.*

Preuve. Il suffit de noter que $TrS_n = Tr(N_nK_nA_n)$ et

$$\langle N_nK_nA_ne_i, e_i\rangle = a_n^i\langle K_ne_i, N_n^t e_i\rangle.$$

Dans la suite on doit étudier la matrice triangulaire inférieure N_n^t qui apparaît dans l'écriture $S_n^t = N_n^t A_n K_n^{-1}$. L'étude de $S_n^t = X_1^t X_2^t \cdots X_n^t = g_1^t g_2^t \cdots g_n^t$ est analogue à celle de $S_n^{-1} = g_1 g_2 \cdots g_n$ puisque les hypothèses de proximalité et d'irréductibilité valent aussi bien pour T_μ^t que pour T_μ ou T_μ^{-1}; il y a en particulier convergence de $N_n^t e_1$ vers $t(\omega)$ à vitesse exponentielle: $\overline{\lim}\,[\int \|N_n^t e_1 - t(\omega)\|^\varepsilon \, d\pi(\omega)]^{1/n} < 1$ pour un $\varepsilon > 0$ convenable.

On a vu également en [10] que la projection $S_n \cdot e_1$ de S_n sur P^{d-1}, qui correspond au vecteur unitaire K_ne_1, converge en loi vers la mesure invariante ν et que cette convergence a lieu à vitesse exponentielle au sens que l'on précise ci-dessous. Si φ est une fonction Holdérienne d'ordre ε sur un espace métrique (X, δ) on note

$$[\varphi]_\varepsilon = \operatorname*{Sup}_{x,y\in X} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\delta^\varepsilon(x, y)}.$$

On a alors, pour ε assez petit, l'existence de deux constantes C et $\rho \in]0, 1[$ avec, pour toute φ ε-Holdérienne sur P^{d-1}:

$$\operatorname*{Sup}_{x\in P^{d-1}} \left| \int \varphi(S_n \cdot x)\, d\pi(\omega) - \nu(\varphi)\right| \le C\rho^n[\varphi]_\varepsilon.$$

LEMME 8. *Considérons le couple $S_n \cdot e_1$, $N_n^t e_1$ de $P^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}$. Il existe $\varepsilon > 0$, $C > 0$ et $\rho \in [0, 1[$ tels que pour toute fonction ε-Holdérienne sur $P^{d-1} \times \mathbb{R}^{d-1}$ on ait*:

$$\left| \int \varphi(S_n \cdot e_1, N_n^t e_1)\, d\pi(\omega) - \int \varphi[x, t(\omega)]\, d\nu(x)\, d\pi(\omega) \right| \le C\rho^n[\varphi]_\varepsilon.$$

Preuve. La différence précédente est somme des 3 termes Δ_1, Δ_2, Δ_3 suivants:

$$\Delta_1 = \int \varphi(S_n \cdot e_1, N_n^t e_1)\, d\pi(\omega) - \int \varphi(S_n \cdot e_1, N_{[n/2]}^t e_1)\, d\pi(\omega)$$

$$\Delta_2 = \int \varphi(S_n \cdot e_1, N_{[n/2]}^t e_1)\, d\pi(\omega) - \int \varphi(x, N_{[n/2]}^t e_1)\, d\nu(x)\, d\pi(\omega)$$

$$\Delta_3 = \int \varphi(x, N_{[n/2]}^t e_1)\, d\nu(x)\, d\pi(\omega) - \int \varphi[x, t(\omega)]\, d\nu(x)\, d\pi(\omega).$$

Les remarques précédant le lemme donnent les majorations, avec un certain $\rho \in]0, 1[$ et une constante $C > 0$

$$|\Delta_1| \le [\varphi]_\varepsilon \left[\int \|N_n^t e_1 - t(\omega)\|^\varepsilon\, d\pi(\omega) + \int \|N_{[n/2]}^t e_1 - t(\omega)\|^\varepsilon\, d\pi(\omega) \right]$$

$$|\Delta_1| \le C[\varphi]_\varepsilon \rho^{[n/2]} + c[\varphi]_\varepsilon \rho^n$$

$$|\Delta_2| \le C[\varphi]_\varepsilon \rho^{[n/2]}$$

$$|\Delta_3| \le C[\varphi]_\varepsilon \rho^{[n/2]}.$$

On a donc l'inégalité voulue en modifiant C et ρ. Dans la majoration de Δ_2 on a utilisé l'indépendance des X_i en fixant d'abord $[n/2]$ variables et en intégrant par rapport aux variables X_i pour $i>[n/2]$.

LEMME 9. *Notons $\bar{y}$ l'image canonique de $y \in N'e_1$ dans P^{d-1}. Alors la fonction sur $P^{d-1}\times\mathbb{R}^{d-1}$ définie par $u(x, y)=|\langle x, \bar{y}\rangle|$ est Lipchitzienne.*

Preuve. $|\langle x, \bar{y}\rangle|$ est bien défini en considérant x et $\bar{y}$ comme des vecteurs unitaires définis au signe près. Alors:

$$|\langle x, \bar{y}\rangle| - |\langle x', \bar{y}'\rangle| \leq \|x-x'\| + \|\bar{y}-\bar{y}'\|.$$

En modifiant les vecteurs par le changement désigné:

$$|u(x, \bar{y}) - u(x', \bar{y}')| \leq \delta(x, x') + \delta(\bar{y}, \bar{y}').$$

Pour $\beta>0$, notons ψ_β la fonction linéaire par morceaux égale à 1 sur $[-e^{-\beta}, e^{\beta}]$, nulles en dehors de $2[-e^{-\beta}, e^{-\beta}]$.

LEMME 10. *Pour tout $\alpha>0$ on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int \psi_{n\alpha} \circ u[x, t(\omega)]\, d\nu(x)\, d\pi(\omega) < \infty.$$

Preuve. Utilisons le Théorème 7':

$$\operatorname*{Sup}_{y \in P^{d-1}} \int |\langle x, y\rangle|^{-\varepsilon}\, d\nu(x) = C < +\infty$$

avec y égal au point correspondant à $t(\omega)$ dans P^{d-1}. On obtient

$$\nu\{x; |\langle x, y\rangle| \leq 2\, e^{-n\alpha}\} \leq C\, e^{-n\alpha\varepsilon_2\varepsilon}$$

et

$$\int \psi_{n\alpha} \circ u[x, t(\omega)]\, d\nu(x)\, d\pi(\omega) \leq C 2^{\varepsilon}\, e^{-n\alpha\varepsilon}.$$

La série de ces intégrales est donc convergente.

LEMME 11.

$$\operatorname*{Lim}_{n} \frac{1}{n} \operatorname{Log} |\langle K_n e_1, N'_n e_1\rangle| = 0.$$

Preuve. Comme $N'_n e_1$ converge la quantité $u_n = |\langle K_n e_1, N'_n e_1\rangle|$ est bornée et il suffit de voir que, pour tout $\alpha>0$

$$\pi\left\{\underline{\lim}\, \frac{1}{n} \operatorname{Log} u_n < -\alpha\right\} = 0.$$

Ceci découlera de

$$\sum_n \pi\{u_n < e^{-n\alpha}\} < +\infty$$

c'est-à-dire de

$$\sum_n \int \psi_{n\alpha}(\langle K_n \cdot e_1, N'_n \cdot e_1\rangle)\, d\pi(\omega) < +\infty.$$

Cette finitude découle du Lemme 8 en prenant $\varphi = \psi_{n\alpha} \circ u$ et du Lemme 10.

LEMME 12.

$$\overline{\lim_n} \left| \frac{a_n^i}{a_n^1} \langle K_n e_i, N_n' e_i \rangle \right|^{1/n} < 1 \quad (i > 1).$$

Preuve. Utilisons comme au paragraphe précédent la décomposition du groupe N' sous forme d'un produit semi-direct d'un espace vectoriel $V = \mathbb{R}^{d-1}$ et d'un groupe M fixant e_1. Alors N_n' s'écrit

$$N_n' = v_n m_n \quad \text{avec} \quad v_n e_i = e_i (i > 1)$$

et $m_n e_1 = e_1$; il en découle

$$\|N_n' e_i\| = \|m_n e_i\| < \|m_n\| \quad (i > 1).$$

Il en découle

$$\left| \frac{a_n^i}{a_n^1} \langle K_n e_i, N_n' e_i \rangle \right| \leq \left| \frac{a_n^i}{a_n^1} \right| \|N_n e_i\| \leq \left| \frac{a_n^i}{a_n^1} \right| \|m_n\|.$$

Utilisant les relations

$$\overline{\lim_n} \left[\int \|m_n(\omega)\|^\varepsilon \, d\pi(\omega) \right]^{1/n} \leq 1 + C\varepsilon^2$$

$$\overline{\lim_n} \left[\int \left| \frac{a_n^i}{a_n^i}(\omega) \right|^\varepsilon d\pi(\omega) \right]^{1/n} \leq 1 - \gamma\varepsilon \quad (i > 1)$$

en prenant ε assez petit

$$\overline{\lim_n} \left[\int \left| \frac{a_n^i}{a_n^1}(\omega) \right|^{\varepsilon/2} \|m_n\|(\omega)^{\varepsilon/2} \, d\pi(\omega) \right]^{1/n} < 1.$$

La série de terme général $|a_n^i / a_n^1|^{\varepsilon/2} \|m_n(\omega)\|^{\varepsilon/2}$ est donc convergente et son terme général tend vers zéro géométriquement.

Preuve du Théorème 9. Les Lemmes 7, 11 et 12 montrent que $\lim_n (|TrS_n| / |a_n^1|)^{1/n} = 1$. D'où:

$$\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} |TrS_n| = \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} |a_n^1| = \gamma.$$

La preuve du Théorème 8 découlera du.

LEMME 13. *On considère l'équation de degré* d: $\lambda^d + \theta_1 \lambda^{d-1} + \cdots + \theta_d = 0$ *où les* θ_i *sont réels. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que la condition* $\operatorname{Sup}_{1 < k < d} |\theta_k / \theta_1^k| \leq \eta$ *implique l'existence d'une unique racine simple réelle* λ_1 *de l'équation de module maximum et vérifiant*

$$\left| \frac{\lambda_1}{\theta_1} + 1 \right| < \varepsilon.$$

Preuve. Le changement d'inconnue $\lambda = -\theta_1 x$ ramène à l'équation

$$x^d - x^{d-1} + \alpha_2 x^{d-2} + \cdots + \alpha_d = 0$$

evec

$$\alpha_k = \theta_k / \theta_1^k.$$

Donc lorsque $\mathrm{Sup}_{1\le k<d}|\alpha_k|$ tend vers zéro, cette dernière équation tend vers $x^d - x^{d-1}=0$, qui admet $+1$ pour racine multiple d'ordre $d-1$.

Le théorème des fonctions implicites donne alors l'existence d'une racine x^1 réelle simple proche de 1 pour η assez petit, de façon que $|x^1-1|<\varepsilon$. Alors les fonctions symmétriques des autres racines sont arbitrairement petites et il en est donc de même des racines: la racine x_1 est bien dominante. En revenant à l'équation initiale on obtient le résultat annoncé.

Preuve du Théorème 8. Considérons l'action de T_μ sur les puissances extérieures de $\mathbb{R}^d$ et notons S_n^k la matrice correspondant à S_n dans $\Lambda^k\mathbb{R}^d$ $(1\le k\le d)$. La propriété de proximalité et d'irréductibilité de T_μ implique [**12**] la simplicité du plus grand exposant de Liapunoff et donc

$$\lim_n (\|S_n^k\|/\|S_n\|)^{1/n}<1 \quad (k>1).$$

Les coefficients θ_k du polynome caractéristique de S_n satisfont $|\theta_k|=|TrS_n^k|\le d\|S_n^k\|$.

Comme d'après le Théorème 9 $\lim_n \|S_n\|^{1/n}=\lim_n|TrS_n|^{1/n}$ on a bien pour $k>1$: θ_k/θ_1^k arbitrairement petit. Le Lemme 12 donne alors l'existence de la valeur propre dominante simple, réelle λ_n de S_n avec de plus

$$\lim_n |\lambda_n|/|TrS_n|=1.$$

Le Théorème 9 donne encore

$$\lim_n \frac{1}{n}\operatorname{Log}|\lambda_n|=\lim_n\frac{1}{n}\operatorname{Log}|TrS_n|=\gamma.$$

Remarque. La méthode de preuve du Théorème 8 étant basée sur le théorème des fonctions implicites, son énoncé reste valable lorsque $\mathbb{R}$ est remplacé par un corps local: il y a une valeur propre dominante appartenant à ce corps lui-même.

THÉORÈME 8'. *Soit μ une mesure de probabilité sur* $\mathrm{Sl}(d,\mathbb{R})$ *telle que T_μ opère de façon proximale et totalement irréductible sur la frontière de Fürstenberg B. On suppose qu'il existe $c>0$ avec $\int\|g\|^c\,d\mu(g)<+\infty$. Alors, presque sûrement, pour n assez grand, le produit de matrices aléatoires $S_n(\omega)$ est diagonalisable à valeurs propres réelles distinctes $\lambda_n^k(|\lambda_n^1|>|\lambda_n^2|>\cdots>|\lambda_n^d|)$. Si l'on note γ^k le $k^{\text{ième}}$ exposant de Liapunoff de $S_n(\gamma^1=\gamma)$ on a presque sûrement:*

$$\mathit{lim}_n \operatorname{Log}|\lambda_n^k|=\gamma^k.$$

Preuve. L'hypothèse sur T_μ assure la simplicité du spectre de Liapunoff [**10**]. On peut appliquer le Théorème 8 aux différentes puissances extérieures de $\mathbb{R}^d$ et on a donc l'existence d'une valeur propre dominante réelle dans un tel produit avec

$$\lim_n\frac{1}{n}\operatorname{Log}|\lambda_n^1\ldots\lambda_n^k|=\gamma^1+\cdots\gamma^k.$$

Donc, pour tout $k\le d$: $\lim_n n^{-1}\operatorname{Log}|\lambda_n^k|=\gamma^k$ et la conclusion voulue.

Remarque. Comme le Théorème 8, ce théorème reste valable sur un corps local.

2.10. *Remarques et questions*

(1) Les résultats de la fin de la partie 2 peuvent être précisés: la valeur propre dominante $\lambda_n(\omega)$ a, en module, un comportement très proche de celui de $S_n(\omega)$: elle suit les mêmes lois limites du calcul des probabilités [**10**]. De plus le point attractif de $S_n(\omega)$ converge en loi tandis que le point répulsif converge p.p., avec indépendance asymptotique de ces variables aléatoires. On peut conjecturer que, pour presque tout $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$, et n assez grand, $S_n(\omega)$ et $S_n(\omega')$ engendrent un groupe libre.

(2) Il serait utile de préciser dans quelles conditions la mesure harmonique ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ainsi que de préciser les harmoniques bornées associées [**16**].

(3) Quelles relations y a-t-il entre l'ensemble des points limites L_Γ et l'ensemble des points non errants sous l'action de Γ. Ces notions devraient peut-être ici être adaptées.

(4) L'ensemble L_Γ peut-il être de mesure de Lebesgue positive sans être égal à 2 [**22**]?

(5) Les techniques précédentes permettent-elles de discuter l'existence de sous-groupes libres dans les groupes non moyennables d'homéomorphismes de variétés compactes?

(6) Existe-t-il des mesures ν portées par L_Γ qui soient μ-invariantes pour un μ convenable et de 'dimension' égale à celle de L_Γ?

Acknowledgements
L'auteur remercie P. de la Harpe pour d'utiles commentaires concernant le théorème de Tits et les propriétés des algèbres de groupe. Il remercie également H. Fürstenberg pour une preuve simplifiée de la positivité de la dimension de Hausdorff de L_Γ.

REFERENCES

[**1**] P. Bougerol & J. Lacroix. *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators.* Birkhauser: 1986.

[**2**] C. Chevalley. *Théorie des Groupes de Lie.* Hermann: 1968.

[**3**] J. Cohen, H. Kesten & C. Newman, eds., Random matrices and applications. *Contemp. Math. Amer. Math. Soc.* **50** (1986).

[**4**] J. D. Dixon. Free subgroups of linear groups. pp. 45–56. *Lecture Notes in Math.* **319** Springer: 1973.

[**5**] H. Furstenberg. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. *Proc. Symp. Pure Math.* **6** (1972), 193–229.

[**6**] S. Glaner. Proximal flows. *Springer Lecture Notes* **517** (1976).

[**7**] I. Goldsheid & G. A. Margulis. Simplicity of the Liapunoff spectrum for products of random matrices. **35** (1987), 309–313.

[**8**] F. Guimier. Simplicité du spectre de Liapunoff d'un produit de matrices aléatoires sur un corps ultramétrique. *C.R.A.S. Paris* (1989), (à paraître).

[**9**] Y. Guivarc'h. Quelques propriétés asymptotiques des produits de matrices aléatoires. *Springer Lecture Notes* **774** (1980) 176–250.

[**10**] Y. Guivarc'h & A. Raugi. Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence. *Z. Wahr.* **69** (1985) 187–242.

[**11**] Y. Guivarc'h. Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. *Bulletin Soc. Math. France* **101** (1973), 333–379.

https://doi.org/10.1017/S0143385700005708 Published online by Cambridge University Press

[12] Y. Guivarc'h & A. Raugi. Propriétés de contraction d'un semi-groupe de matrices inversibles. *Israël J. Math.* **65** (2) (1989), 165-196.
[13] Y. Guivarc'h & A. Raugi. Quelques remarques sur les produits de matrices aléatoires indépendantes. *C.R.A.S.* **304** série 1, **8** (1987), 199-201.
[14] P. de la Harpe. Free groups in linear groups. *L'Enseignement Math.* **29** (1983), 129-144.
[15] P. de la Harpe. Reduced C*-algebras of discrete groups which are simple with a unique trace. pp. 248-251. *Lecture Notes* **1132** Springer-Verlag.
[16] F. Ledrappier. Poisson boundaries of discrete groups of matrices. *Israël J. Math.* **50** (4) (1985).
[17] E. Le Page. Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires. *Springer Lecture Notes* **928** (1982), 258-303.
[18] G. A. Margulis. Arithméticity of the irreductible lattices in the semi-simple groups of rank greater than one. *Invent. Math.* **76** (1984), 93-120.
[19] G. A. Margulis & G. A. Soifer. A criterion for the existence of maximal subgroups of infinite index in a finitely generated linear group. *Soviet Math. Dokl.* **18** (3) (1977), 847-851.
[20] C. C. Moore. Amenable subgroups of semi-simple groups and proximal flows. *Israël J. Math.* **34** (1979), 121-138.
[21] M. S. Raghunathan. A proof of Oseledet multiplicative theorem. *Israël J. Math.* **32** (1979) 356-362.
[22] D. Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Publ. Math. I.H.E.S.* **50**.
[23] J. Tits. Free subgroups in linear groups. *J. of Algebra* **20** (1972), 250-270.
[24] B. A. F. Wehrfritz. Infinite linear groups. *Ergebnisse der Mathematik* (1973).
[25] A. Weil. Basic number theory. *Grundlehren der Math Wiss.* **144** Springer: 1967.
[26] R. Zimmer. Ergodic theory and semi-simple groups. Birkhauser: 1984.