

# EQUATION DE HILL ET PROBLEME DE STÖRMER

RENE DE VOGELAERE

**1. Introduction.** Pour la détermination des orbites infiniment voisines de l'équateur, dans le problème de Störmer, une équation de Hill est à résoudre. Les méthodes sont expliquées d'abord sur l'équation générale, puis appliquées au problème de Störmer. Signalons les résultats suivants: les orbites équatoriales, considérées du point de vue de leur perturbation dans le plan méridien sont successivement stables, instables impaires, stables, instables paires et cela indéfiniment quand  $\gamma_1$  se rapproche de un; quelques orbites limites entre les zones de stabilité et d'instabilité sont obtenues avec une méthode qui permet n'importe quelle précision désirée.

## EQUATION DE HILL

**1. Généralités.** C'est une équation du type

$$(1.1) \quad \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} + f(\sigma)\eta = 0$$

où  $f(\sigma)$  est une fonction périodique de  $\sigma$ , [5] et [17]. La solution peut se mettre sous la forme

$$(1.2) \quad \eta = Ce^{\Omega\sigma}\varphi(\sigma) + De^{-\Omega\sigma}\varphi(-\sigma)$$

où  $C$  et  $D$  sont des constantes arbitraires,  $\varphi(\sigma)$  une fonction périodique de même période  $T$  que  $f(\sigma)$  et  $\Omega$  une constante déterminée appelée par Poincaré exposant caractéristique. C'est même la solution générale si  $\Omega T \neq \pi i$ .

La résolution peut se faire par deux méthodes très différentes: la première, par intégration numérique de l'équation; la seconde, due à Hill lui-même, par le calcul d'un déterminant infini.

**2. Première méthode.** Un théorème de Korteweg [16] est à l'origine du procédé, le résultat a été donné sous une autre forme par Moulton [11] puis étendue par lui [12] au cas d'un système de deux équations du second ordre, donnant les orbites infiniment voisines d'une orbite périodique pour un problème de dynamique; l'application visée avait comme particularité que les fonctions périodiques dans les équations différentielles étaient paires, c'est aussi le cas de l'équation de Hill. On pourrait donc déduire du cas plus général de Moulton, la formule pour l'exposant caractéristique d'une équation de Hill, donnée récemment par Brillouin [2].

Reçu le 27 janvier, 1950.

Nous reprendrons plutôt le raisonnement de façon indépendante, car nous voulons également déterminer la fonction  $\varphi(\sigma)$ . Supposons déterminées par calcul numérique, deux solutions indépendantes  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , telles que

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \eta_1(0) &= 1, \dot{\eta}_1(0) = 0: \text{ solution paire en } \sigma, \\ \eta_2(0) &= 0, \dot{\eta}_2(0) = 1: \text{ solution impaire en } \sigma. \end{aligned}$$

Le Wronskien des deux solutions, qui est d'ailleurs invariant, a pour valeur l'unité.

La fonction périodique  $\varphi$  peut se décomposer en une fonction paire  $P$  et une fonction impaire  $I$ , donc,  $\alpha$  et  $\beta$  étant des constantes à déterminer

$$\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 = e^{\Omega\sigma}(P + I)$$

et en remplaçant  $\sigma$  par  $-\sigma$ ,

$$\alpha\eta_1 - \beta\eta_2 = e^{-\Omega\sigma}(P - I).$$

Si on fait passer l'exponentielle dans le premier membre, on aura en combinant les deux relations:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} P &= \alpha\eta_1 \cosh \Omega\sigma - \beta\eta_2 \sinh \Omega\sigma \\ I &= -\alpha\eta_1 \sinh \Omega\sigma + \beta\eta_2 \cosh \Omega\sigma. \end{aligned}$$

Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  seront déterminées par la condition de périodicité de  $P$  et  $I$ ; cependant pour que nos écritures soient réelles, nous changerons la définition de  $\Omega$  dans les cas précisés par la formule (2.4) ci-dessous et écrirons,  $j$  valant plus un ou moins un:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \alpha\eta_1(T) \cosh \Omega T - \beta\eta_2(T) \sinh \Omega T &= j\alpha\eta_1(0) = \alpha j \\ \beta\eta_2(T) \cosh \Omega T - \beta\eta_1(T) \sinh \Omega T &= j\beta\eta_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Ces équations permettent de déterminer l'exposant caractéristique et le rapport  $\beta/\alpha$  par

$$(2.4) \quad j \cosh \Omega T = \eta_1(T)$$

$$(2.5) \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\eta_1(T)}{\eta_2(T)} \tanh \Omega T.$$

Comme la fonction  $f(\sigma)$  reprend la même valeur pour des arguments  $\sigma$  et  $T - \sigma$ , nous pourrons utiliser cette symétrie pour limiter le calcul de  $\eta_1$  et  $\eta_2$  à une demi-période et nous pourrons déterminer les  $\eta_1(T)$  et  $\eta_2(T)$  au moyen des valeurs de ces fonctions pour l'argument  $T/2$ , que nous symbolisons par  $(\eta_1)$  et  $(\eta_2)$  et des valeurs des dérivées de ces quantités au même endroit:  $(\dot{\eta}_1)$  et  $(\dot{\eta}_2)$ .

On trouve en remplaçant dans (2.4) et (2.5):

$$(2.6) \quad j \cosh \Omega T = (\eta_1)(\dot{\eta}_2) + (\eta_2)(\dot{\eta}_1)$$

$$(2.7) \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{j \sinh \Omega T}{2(\eta_2)(\dot{\eta}_2)} = \frac{+j \{(\eta_1)(\dot{\eta}_1)(\eta_2)(\dot{\eta}_2)\}^{\frac{1}{2}}}{(\eta_2)(\dot{\eta}_2)};$$

cette dernière égalité parce que

$$(2.7') \quad \sinh \Omega T = + (\cosh^2 \Omega T - 1)^{\frac{1}{2}}$$

et que le "1" sous le radical peut s'écrire

$$(2.8) \quad [(\eta_1)(\dot{\eta}_2) - (\eta_2)(\dot{\eta}_1)]^2$$

ce qui représente en effet, le carré du Wronskien invariant à l'endroit de la demi-période.

Seules les valeurs relatives de  $\alpha$  et  $\beta$  ont de l'importance, nous décomposerons donc la formule (2.7) en

$$(2.9) \quad \alpha = (\eta_2)(\dot{\eta}_2) |(\eta_2)(\dot{\eta}_2)|^{-\frac{1}{2}} \quad \beta = j |(\eta_1)(\dot{\eta}_1)|^{\frac{1}{2}}.$$

Quand le Wronskien ne vaut pas l'unité, il faut employer, au lieu de (2.6)

$$(2.10) \quad \cosh \Omega T = \frac{(\eta_1)(\dot{\eta}_2) + (\eta_2)(\dot{\eta}_1)}{(\eta_1)(\dot{\eta}_2) - (\eta_2)(\dot{\eta}_1)}.$$

**3. Discussion des résultats.** La formule (2.4) nous montre que  $j \cosh \Omega T$  peut prendre toutes les valeurs positives et négatives, nous choisirons  $j = -1$  si la valeur de  $j \cosh \Omega T$  est inférieure à  $-1$ .

Si le  $\cosh \Omega T$  est plus grand que un en module, on peut trouver des solutions réelles pour  $\Omega$  et il existe par (1.2) des solutions correspondantes à des orbites voisines de l'orbite périodique considérée, qui s'en éloignent de plus en plus, on dit alors que l'orbite est instable; si  $j = +1$  l'instabilité est dite paire [12], expression justifiée par le fait que l'orbite voisine rencontre un nombre pair de fois l'orbite périodique au cours d'une période à cause de (2.2); si  $j = -1$ , l'instabilité est dite impaire, pour une raison analogue. Dans ce cas les fonctions  $P$  et  $I$  se développeront en cosinus et sinus impairs de  $\omega\sigma/2$ ; dans chaque cas la solution (1.2) peut se mettre sous la forme

$$(3.1) \quad A(P \cosh \Omega\sigma + I \sinh \Omega\sigma) + B(P \sinh \Omega\sigma + I \cosh \Omega\sigma).$$

Si le  $\cosh \Omega T$  est en module inférieur à un, il existe des solutions de (2.4) qui sont des imaginaires purs, nous écrirons donc  $\Omega = \Omega' i$ ; les formules ci-dessus seront rendues réelles, si on pose même temps,  $P = P'$ ,  $I = I' i$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  ayant la même définition qu'en (2.9); on aurait alors

$$\begin{aligned} P' &= \alpha\eta_1 \cos \Omega'\sigma + \beta\eta_2 \sin \Omega'\sigma \\ I' &= -\alpha\eta_1 \sin \Omega'\sigma + \beta\eta_2 \cos \Omega'\sigma. \end{aligned}$$

On peut prendre cette fois à son gré l'une ou l'autre détermination pour  $\Omega'$  par

$$j \cos \Omega' T = (\eta_1)(\dot{\eta}_2) + (\eta_2)(\dot{\eta}_1),$$

les développements se faisant en sinus et cosinus soit pairs soit impairs de  $\omega\sigma/2$  et la solution générale peut cette fois se mettre sous une forme équivalente à (1.2):

(3.2)  $A'(P' \cos \Omega'\sigma - I' \sin \Omega'\sigma) + B'(P' \sin \Omega'\sigma + I' \cos \Omega'\sigma).$

Nous donnons une application de ces formules au N° 11.

4. Examen des cas limites. Il nous reste à examiner maintenant ce qui se passe lorsque le  $\cosh \Omega T = \pm 1$ .

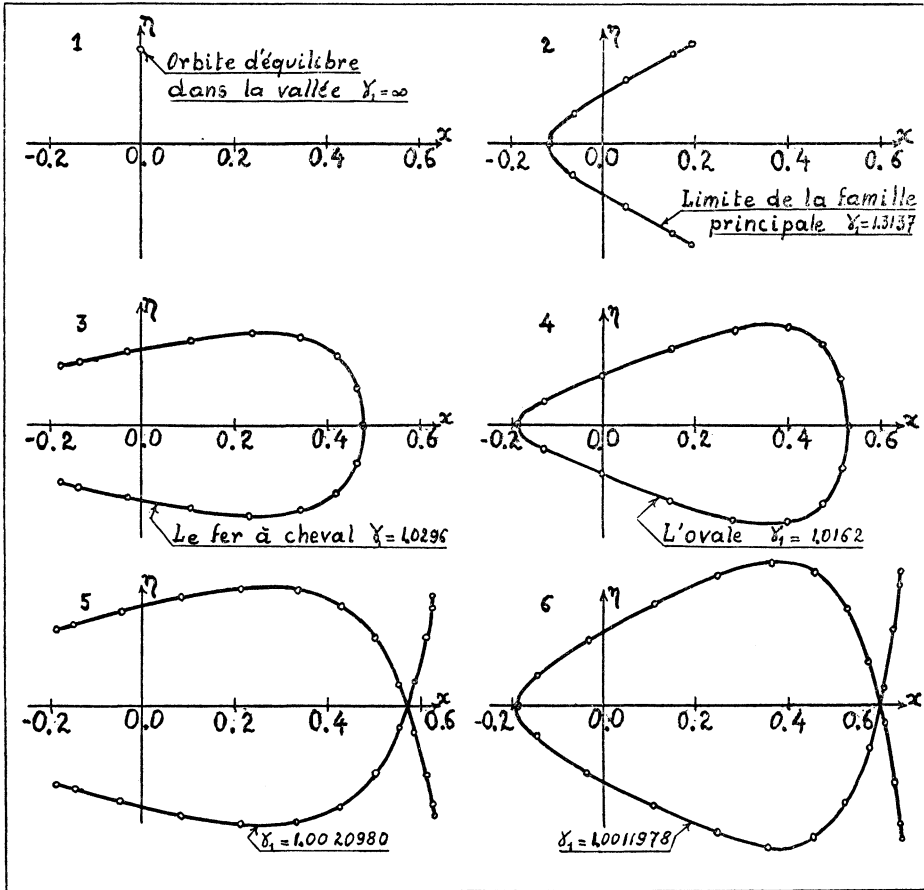


FIGURE 1. Orbites périodiques infiniment voisines de l'équateur. (L'échelle des  $\eta$  est arbitraire.)

(i):  $\cosh \Omega T = +1$ . En comparant (2.6) et (2.8) on voit que  $(\eta_2)(\dot{\eta}_1) = 0$ .

Si  $(\eta_2) = 0, \alpha = 0$  seule la solution impaire  $I$  subsiste; on a une orbite qui rencontre  $\lambda = 0$  en ses deux extrémités comme l'orbite 4 de la figure 1, en supposant  $\sigma = 0$  pour  $x$  minimum.

Si  $(\dot{\eta}_1) = 0, \beta = 0$ , seule la solution paire subsiste; on a une orbite dont la vitesse s'annule aux deux extrémités comme l'orbite 5 de la figure 1.

(ii):  $\cosh \Omega T = -1$ . Cette fois on a  $(\eta_1)(\dot{\eta}_2) = 0$ .

Si  $(\eta_1) = 0$ ,  $\beta = 0$ , on a une orbite comme celle 3 de la figure 1.

Si  $(\dot{\eta}_2) = 0$ ,  $\alpha = 0$ , on a une orbite comme celle 2 de la figure 1.

**5. Deuxième méthode, généralités.** La méthode de Hill consiste à développer en séries, la fonction périodique  $f(\sigma)$  et la fonction inconnue  $\varphi(\sigma)$  intervenant dans la solution; en remplaçant dans l'équation (1.1), on obtient une infinité de relations entre les coefficients de la série  $\varphi(\sigma)$ ; la compatibilité de ces relations s'exprime au moyen d'un déterminant infini égalé à zéro, ce qui permet de déterminer l'exposant caractéristique  $\Omega$ , soit par approximations successives [3] et [8], soit par un développement en série [3, pp. 35-37].

Nous n'utiliserons la méthode de Hill que pour améliorer une première approximation de la solution et cela dans le seul cas des orbites limites.

**6. Amélioration des orbites limites.** Nous avons vu que pour les orbites limites, l'exposant caractéristique est nul et la fonction  $\varphi(\sigma)$  se réduit à sa partie paire ou impaire; nous exposerons la méthode d'amélioration dans le cas où  $\varphi(\sigma)$  se développe en sinus de multiples impairs de  $\omega\sigma/2$ ; les autres se traiteront par analogie.

Nous traitons donc le cas où  $f(x)$  dépend aussi d'un paramètre, disons  $\gamma$ ; nous supposons connaître une valeur  $\gamma_0$  de  $\gamma$ , où l'exposant caractéristique est presque nul et cherchons à améliorer cette valeur; nous nous y prenons comme suit: nous faisons correspondre à l'équation de Hill (1.1), l'équation

$$(6.1) \quad A \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} + f(\sigma)\eta = 0;$$

celle-ci admet pour certaines valeurs de  $A$  une solution périodique, pour une orbite limite vérifiant (1.1),  $A = 1$  est une telle valeur; nous devons donc nous attendre que pour une valeur de  $\gamma$  donnant un exposant caractéristique de (1.1) presque nul, on aura une solution périodique pour  $A$  voisin de un.

Nous écrivons d'abord,  $2\pi/\omega$  étant la période de  $f(\sigma)$ :

$$(6.2) \quad 4f(\sigma)/\omega^2 = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2 B_m \cos m\omega\sigma,$$

puis la solution périodique de (6.1)

$$(6.3) \quad \eta = \sum_{p=1}^{\infty} S_p \sin (2p - 1) \omega\sigma/2.$$

En remplaçant dans (6.1) nous avons le système suivant à résoudre:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} (B_0 - B_1)S_1 + (B_1 - B_2)S_2 + (B_2 - B_3)S_3 + \dots &= AS_1, \\ (B_1 - B_2)S_1 + (B_0 - B_3)S_2 + (B_1 - B_4)S_3 + \dots &= AS_2, \\ (B_2 - B_3)S_1 + (B_1 - B_4)S_2 + (B_0 - B_5)S_3 + \dots &= AS_3, \end{aligned}$$

dont nous sommes supposés connaître une approximation pour  $S_p$  et pour  $A$  (un).  $\eta$  n'est déterminé qu'à une constante multiplicative près, nous devons donc fixer la valeur d'une des harmoniques par exemple  $S_1$ .

Un tel système peut se résoudre par itération en portant les approximations des  $S_p$  dans le premier membre; la première équation donne  $A$ , les suivantes une nouvelle approximation des  $S_p$ .

Cette méthode n'est cependant efficace que si la première harmonique prédomine; (les exemples du N° 11 sont dans ce cas) dans les cas contraires on pourra procéder comme suit, si les  $q$  premières harmoniques prédominent: décomposons le système (6.4) en deux systèmes partiels, (a) constitué par les  $q$  premières équations et (b) pas les dernières; on commence par résoudre (b) par itération en supposant  $A = 1$  et en se donnant pour les  $q$  premières harmoniques leur première approximation; les autres harmoniques ont leurs valeurs qui convergent rapidement vers une deuxième approximation qu'on porte dans le système (a), celui-ci se résout par la formule de Cramer en prenant comme inconnues les corrections des  $S$  et  $A$ , d'où une deuxième approximation des  $q$  premières harmoniques; on recommence alors à traiter (b) puis (a). Le calcul des mineurs normés de (a) ne doit se faire qu'une fois, car la correction en passant d'une approximation à la suivante est petite, ceci est un sérieux avantage du procédé.

Nous allons maintenant donner des applications de ce deuxième procédé au problème de Störmer (N°s 11 et 17).

#### ORBITES EQUATORIALES DU PROBLÈME DE STÖRMER

**7. Généralités.** L'étude du mouvement d'une particule électrisée dans le champ d'un dipôle ou problème de Störmer, se réduit [7] et [15] à celle du mouvement dans le plan méridien qui suit la particule et à celle du mouvement du plan méridien.

Prenant comme coordonnées  $x = \log 2 \gamma_1 r$  et  $\lambda$ , où  $r$  est la distance au dipôle,  $\lambda$  la latitude et  $\gamma_1$  un paramètre lié au mouvement du plan méridien et qu'on remplace aussi par  $a = 1/(16 \gamma_1^4)$ , on trouve

$$(7.1) \quad \ddot{x} = ae^{2x} - e^{-x} + e^{-2x} \cos^2 \lambda$$

$$(7.2) \quad \ddot{\lambda} = -(1 + \operatorname{tg}^2 \lambda - e^{-2x} \cos^2 \lambda) \operatorname{tg} \lambda$$

équations admettant comme intégrale première

$$(7.3) \quad \dot{x}^2 + \dot{\lambda}^2 = ae^{2x} - 1 - \operatorname{tg}^2 \lambda + 2e^{-x} - e^{-2x} \cos^2 \lambda.$$

Parmi les trajectoires satisfaisant à ces équations, celles qui sont périodiques méritent une étude spéciale, soit pour augmenter notre connaissance de la théorie des orbites dans les problèmes non intégrables de la dynamique, soit pour préparer le calcul des cônes du rayonnement cosmiques.

Diverses familles d'orbites périodiques ont été découvertes et calculées [10], [13] et [15]; nous nous proposons de résumer ici ce qui a été fait pour les orbites sur l'équateur  $\lambda = 0$  et de compléter cette étude par le calcul des exposants caractéristiques de ces orbites.

**8. Résultats connus.** Résumons d'abord pour clarifier les idées comment se présentent ces orbites périodiques. Tout d'abord, elles n'existent que pour des valeurs de  $\gamma_1$  variant de un à l'infini; pour des valeurs infiniment grandes, les orbites se réduisent au point  $x = 0$ ; lorsque  $\gamma_1$  diminue, les orbites oscillent entre des points qui s'éloignent de part et d'autre de  $x = 0$ , jusqu'à atteindre pour  $\gamma_1 = 1$  les limites  $x = \log 2 (2^{\frac{1}{2}} - 1)$  et  $x = \log 2$ , mais cette dernière orbite ne peut plus être strictement dite périodique car sa période devient infinie.

Une première étude de ces orbites pour des valeurs de  $\gamma_1$  voisines de un a été faite par G. Lemaître [6]; il y est prouvé une relation approchée existant entre le paramètre  $\alpha = 16a - 1$  et la demi-période  $\sigma_m$ :

$$(8.1) \quad \sigma_m = - 2^{-\frac{1}{2}} \log (- \alpha/64).$$

Nous y reviendrons dans la suite.

Dans une autre étude faite par C. Graef et S. Kusaka, [4] on a déterminé le mouvement dans l'espace correspondant à ces orbites.

Mais l'étude la plus intéressante est certes celle de la manière dont se présente le voisinage de ces orbites périodiques si on ne reste plus sur l'équateur  $\lambda = 0$ . G. Lemaître a résolu le problème pour des valeurs de  $\gamma_1$  voisines de un dans un travail non publié qu'il nous a permis de reprendre ici. Il a été amorcé aussi par J. Lifshitz [9].

Nous avons nous-mêmes, en annexe à notre thèse de doctorat, fait certaines déterminations et nous venons d'épuiser le problème.

**9. Equations aux variations.** Les orbites infiniment voisines de l'équateur de coordonnées  $x + \xi$  et  $\eta$  se détermineront au moyen des solutions des équations aux variations déduites de (7.1 à 7.3), ce sont

$$(9.1) \quad \ddot{\xi} = (2ae^{2x} - 2e^{-2x} + e^{-x}) \xi,$$

$$(9.2) \quad \ddot{\eta} = (e^{-2x} - 1) \eta,$$

$$(9.3) \quad \dot{x}\dot{\xi} = \ddot{x}\xi.$$

On remarque que les variables  $\xi$  et  $\eta$  sont indépendantes; de plus, l'équation (9.3) s'intègre immédiatement et donne  $\xi = C\dot{x}$ , où  $C$  est arbitraire; mais cette solution est banale car  $x + C\dot{x}$ , représente simplement l'orbite sur l'équateur parcourue un peu plus tard. On voit donc, qu'en première approximation, il ne faut pas considérer les variations de  $x$ , contrairement à ce qui est fait dans l'article [9].

Le problème revient donc à résoudre les équations (7.1) et (9.2); c'est ce que nous ferons d'abord pour  $\gamma_1$  suffisamment différent de un, puis nous verrons comment utiliser un travail de Tchang Yong-Li [14] pour les valeurs de  $\gamma_1$  voisines de un, enfin nous verrons comment améliorer cette approximation quand cela est nécessaire.

VALEURS DE  $\gamma_1$  NON VOISINES DE UN

**10. Calcul de l'orbite sur l'équateur.** Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre l'équation (7.1) ou l'équation équivalente (7.3) quand  $\lambda = 0$ . Dans chacune on utilise les propriétés des fonctions elliptiques. Nous emploierons d'abord la suivante utilisée depuis longtemps au département de mathématiques de l'Université de Louvain.

En posant

$$(10.1) \quad a_1^2 = \frac{1}{4} (1 + \gamma_1^{-2})$$

$$(10.2) \quad b_1^2 = \frac{1}{4} (1 - \gamma_1^{-2})$$

l'équation (7.3) peut s'écrire

$$(10.3) \quad \left( \frac{de^{-x}}{d\sigma} \right)^2 = [a_1^2 - (e^{-x} - \frac{1}{2})^2] [(e^{-x} - \frac{1}{2})^2 - b_1^2]$$

et la fonction dn d'Abel et de Jacobi permet d'écrire immédiatement la solution

$$(10.4) \quad e^{-x} = \frac{1}{2} + a_1 \operatorname{dn} a_1 \sigma = \frac{1}{2} + a_1 \operatorname{dn} u.$$

Ceci peut se calculer au moyen des fonctions de Jacobi:

$$\operatorname{dn} u = \frac{\theta_3(u) \theta_2(0)}{\theta_2(u) \theta_3(0)}$$

où on a avec  $2 \omega_1 s = \pi u$

$$\theta_2(u) = 1 - 2q \cos 2s + 2q^4 \cos 4s - 2q^9 \cos 6s + \dots$$

$$\theta_3(u) = 1 + 2q \cos 2s + 2q^4 \cos 4s + 2q^9 \cos 6s + \dots$$

En vertu des relations (10.1) et (10.2) et de

$$\frac{b_1}{a_1} = \left[ \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} \right]^2$$

l'arbitraire "q" est liée à la constante  $\gamma_1$  par la relation

$$\gamma_1^2 = \frac{\theta_3^4(0) + \theta_2^4(0)}{\theta_3^4(0) - \theta_2^4(0)},$$

on trouve aussi pour la vitesse moyenne

$$\omega = 2 \pi / T = 2^{\frac{1}{2}} \{ \theta_3^4(0) + \theta_2^4(0) \}^{-\frac{1}{2}},$$

tandis que

$$2a_1^2 = \frac{\theta_3^4(0)}{\theta_3^4(0) + \theta_2^4(0)}.$$

**11. Calculs et résultats.** Nous avons calculé par les formules précédentes un certain nombre d'orbites sur l'équateur; les résultats sont condensés au



TABLEAU I  
ORBITES ÉQUATORIALES, LEURS EXPOSANTS CARACTÉRISTIQUES, LEURS VARIATIONS

$\gamma_1$	$\infty$	1.7957	1.4939	1.3166	1.3137	1.1394	1.0882	1.0304	1.0236
$\omega$	1.0000	0.9813	0.9593	0.9284	0.9275	0.8509	0.8024	0.6933	0.6698
$g$	0.0000	0.04000	0.06000	0.08147	0.08197	0.12500	0.15000	0.20700	0.22000
$\cosh \Omega T$	1.0000	0.4529	-0.1679	-0.9800	-1.0000	-2.4833	-2.8193	-1.0794	-0.2655
$\alpha$	1.7725	1.9483	1.9590	1.9116	1.9100	1.6152	1.3122	0.1373	-0.3178
$\beta$	0.0000	0.2288	0.1402	0.0052	0.0000	-0.7037	-1.0045	-1.4764	-1.5116
$x_0$	0.0000	0.01097	0.02400	0.04262	0.04307	0.09039	0.12127	0.1933	0.20929
$x_1$	-0.03989	-0.07912	-0.11707	-0.15581	-0.15667	-0.22596	-0.26044	-0.3222	-0.33310
$x_2$	-0.00040	-0.00161	-0.00362	-0.00671	-0.00679	-0.01592	-0.02298	-0.0436	-0.04904
$x_3$		-0.00004	-0.00014	-0.00037	-0.00037	-0.00131	-0.00227	-0.0059	-0.00722
$x_4$			-0.00014	-0.00002	-0.00003	-0.00012	-0.00025	-0.0009	-0.00118
$x_5$						-0.00001	-0.00003	-0.0002	-0.00020
$x_6$								-0.00004	-0.00004
$x_7$								-0.00001	-0.00001
		st.	st.	st.	st.	imp.	imp.	imp.	st.
$P_0$	3.5449	3.2978	2.9381	1.9641	1.7894				1.3077
$P_2$		0.5938	0.9611	1.7603	1.9118				-1.3734
$P_4$		0.0050	0.0192	0.1004	0.1206				-0.5809
$P_6$			-0.0003	-0.0017	-0.0018				0.0112
$P_8$									-0.0002
$I_2$	0.0000	-0.2065	-0.5196	-1.4737	-1.6669				3.4186
$I_4$		-0.0051	-0.0209	-0.1045	-0.1245				0.6775
$I_6$			0.0004	0.0018	0.0019				-0.0219
$I_8$									0.0010
$P_1$	3.5449	3.6981	3.6786	3.5811	3.5787	3.1105	2.6403	0.3788	-1.0883
$P_3$		0.1988	0.2408	0.2458	0.2450	0.1328	0.0048	-0.0909	0.3634
$P_5$			-0.0014	-0.0038	-0.0038	-0.0138	-0.0224	-0.0147	0.0648
$P_7$				0.0001	0.0001	0.0009	0.0017	0.0014	-0.0063
$P_9$									0.0008
$I_1$	-3.5449	-2.8976	-2.1978	-0.3470	0.0000	-3.2614	-3.9857	-4.0984	-3.7036
$I_3$		-0.1889	-0.2008	-0.0409		-0.5637	-0.8383	-1.4881	-1.6518
$I_5$			0.0004	0.0003		0.0087	0.0155	0.0009	-0.0318
$I_7$							-0.0003	0.0020	-0.0044
$I_9$									-0.0007

Tableau I où toutes les quantités sont indiquées en unités de la quatrième décimale. On y voit les analyses harmoniques des orbites données par

$$x = \sum_{k=0}^n x_k \cos k\omega\sigma.$$

La solution des équations aux variations a été faite par le procédé des N<sup>os</sup> 2 et 3 en prenant comme point de départ le point de l'orbite ayant un  $x$  maximum, contrairement à ce qui est fait dans le reste du travail. Nous avons

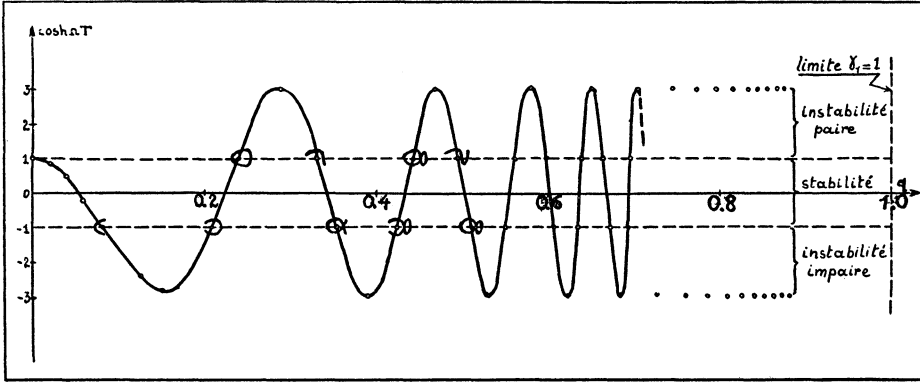


FIGURE 2. Exposants caractéristiques des orbites périodiques sur l'équateur.

indiqué si les orbites sont stables (st.) ou instables impaires (imp.), ainsi que les analyses en série de Fourier des fonctions  $P$  et  $I$  des solutions (3.1) et (3.2) par

$$P = \sum_{k=0}^n P_k \cos \frac{k\omega\sigma}{2} \text{ et } I = \sum_{k=0}^n I_k \sin \frac{k\omega\sigma}{2}.$$

Dans le cas d'orbites stables, nous avons donné d'abord le résultat avec  $j = 1$  (harmoniques paires), puis avec  $j = -1$  (harmoniques impaires), une seule forme suffit évidemment; dans le cas d'orbites instables impaires, on doit poser (N<sup>o</sup> 3)  $j = -1$  et les résultats se développent avec des harmoniques impaires de  $\omega\sigma/2$ .

Nous avons aussi donné les valeurs limites pour  $q$  tendant vers zéro ( $2\pi^{\frac{1}{2}} = 3.5449$ ) qui peuvent servir pour trouver par interpolation toute orbite dans l'intervalle du Tableau I.

On peut constater par les valeurs du  $\cosh \Omega T$  que si  $q$  augmente à partir de zéro, les orbites de l'équateur sont successivement stables, instables impaires et stables; la première partie de la figure 2 a été construite au moyen de ces résultats.

Il existe donc des orbites limites que nous avons déterminées par approximations successives avec la méthode du N<sup>o</sup> 6. La forme des orbites limites pouvait cependant être prévue pas l'examen du Tableau I, grâce à la discussion

TABLEAU II

QUELQUES ORBITES LIMITES

 $(\sigma = 0$  pour le point de l'orbite dont l'abscisse  $x$  est minimum)

$q$	0.08198063	0.20835	0.2388
$\gamma_1$	1.3135943	1.0296	1.0162
$\omega^2$	0.8602794	0.4772	0.4057
$x_0$	0.04307791	0.1949	0.2319
$x_1$	-0.15669039	-0.3234	-0.3468
$x_2$	-0.00679391	-0.0441	-0.0574
$x_3$	-0.00036765	-0.0061	-0.0092
$x_4$	-0.00002259	-0.0010	-0.0016
$x_5$	-0.00000149	-0.0002	-0.0003
$x_6$	-0.00000010	-0.0001	-0.0001
	$\eta = I$	$\eta = P$	$\eta = I$
$I_1$	1.00000000	$P_1$ 1.0000	$I_2$ 1.0000
$I_3$	-0.06860992	$P_3$ -0.3700	$I_4$ -0.1645
$I_5$	-0.00109447	$P_5$ 0.0002	$I_6$ -0.0104
$I_7$	-0.00003392	$P_7$ 0.0004	$I_8$ -0.0011
$I_9$	-0.00000121	$P_9$ 0.0001	$I_{10}$ -0.0002
$I_{11}$	-0.00000004		

du N° 4. Nous donnons ces résultats au Tableau II et à la figure 1 (orbites 1 à 4.)

Nous n'avons pas continué au-delà de  $q = 0.2200$ ; d'abord les calculs deviennent plus long, car les séries de Fourier ont une convergence pratique moins bonne, ensuite une approximation suffisante peut être obtenue plus aisément par le procédé que nous indiquons maintenant.

VALEURS DE  $\gamma_1$  VOISINES DE UN

**12. Généralités.** La solution des équations au voisinage de l'équateur et pour des valeurs de  $\gamma_1$  suffisamment rapprochées de un a été calculée par L. Bouckaert [1] et T. Yong-Li [14]. Une première approximation s'écrit avec  $\alpha = 1/\gamma_1^4 - 1$ :

$$(12.1) \quad x = \log 2 - \log (1 + 2^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech} \Omega \sigma) + U_\alpha$$

$$(12.2) \quad \eta = A_1 \sin (\omega \sigma + \varphi_0) + A_2 \cos (\omega \sigma + \varphi_0) = A \sin (\omega \sigma + \varphi_0 + a)$$

où  $\omega = \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}}$ ,  $\Omega = \frac{1}{2} 2^{\frac{1}{2}}$  et  $U_\alpha$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A$  et  $a$  sont des fonctions tabulées pour les valeurs négatives de  $\sigma$ , telles que  $\sigma = 0$  pour le point de l'orbite le plus proche du dipôle (rejeté dans cette représentation à l'infini négatif) et telles que  $A(-\infty) = 1$  et  $a(-\infty) = 0$ .

Nous reprendrons dans les deux numéros suivants le travail de G. Lemaître, qui permet de déterminer une approximation de l'exposant caractéristique des orbites et aussi une approximation des orbites limites; nous commencerons par ces dernières. Nous ne chercherons pas à ajouter de la précision en considérant les termes suivants du développement de Tchang Yong-Li, car l'approximation

TABLEAU III  
COMPARAISON DES RÉSULTATS APPROCHÉS ET EXACTS  
POUR QUELQUES ORBITES ÉQUATORIALES REMARQUABLES

$\delta = -\alpha/4$	$\epsilon = \gamma_1 - 1$		$q$ exact	$\cosh \Omega T$
	approché	exact		
		$\infty$	0.00000	+1
0.02014	0.2531	0.3136	0.08198	-1
0.0738	0.0913			min
0.0270	0.0290	0.0296	0.29835	-1
0.0155	0.0161	0.0162	0.2388	+1
0.005674	0.005755			max
0.002078	0.002089	0.0020980	0.33152	+1
0.0011914	0.0011950	0.0011978	0.35382	-1
0.00043636	0.00043684			min
0.00015982	0.00015988		0.4244*	-1
0.00009163	0.00009165		0.4415	+1
0.000033561	0.000033564		0.4701	max
0.000012292	0.000012292		0.49612	+1
0.000007047	0.000007047		0.50949	-1
0.0000025812	0.0000025812		0.53203	min
0.0000009454	0.0000009454		0.55268	-1
0.0000005420	0.0000005420		0.56348	+1

\* à partir de cet endroit  $q$  a été calculé par la formule (16.6).

est suffisante et les calculs deviennent sinon beaucoup plus compliqué, tandis que l'amélioration pourra se faire aisément comme nous l'indiquerons plus loin (N° 16).

**13. Orbites limites.** Pour qu'une orbite infiniment voisine de l'équateur soit périodique il suffit:

1°) Qu'au départ ( $\sigma = 0$ ) la fonction  $\lambda$  soit paire ou impaire;

- paire si  $\dot{\lambda} = 0$ , ce qui implique  $\varphi_0 = \varphi_i = -a(0)$ ;
- impaire si  $\lambda = 0$ , ce qui implique  $\varphi_0 = \varphi_p = -a(0) - 2\chi$ ;

les quantités  $a(0) = -63^\circ 30' 10''$  et  $\chi = 9^\circ 45' 31''$  ont été déterminées avec cette précision par T. Yong-Li [14].

2°) Il faut qu'il en soit de même à l'autre extremum de  $x$ ,  $\sigma = -\sigma_m$ ; à cet endroit nous supposons que  $\sigma_m$  est suffisamment grand pour que  $A = 1$  et  $a = 0$ , donc

$$\eta = \sin(-\omega\sigma_m + \varphi_0) \text{ et } \dot{\eta} = \omega \cos(-\omega\sigma_m + \varphi_0);$$

il suffira donc que

$$\omega\sigma_m - \varphi_0 = k\pi/2,$$

si  $k$  est pair  $\eta = 0$  et si  $k$  est impair  $\dot{\eta} = 0$ .

TABLEAU IV  
RÉSUMÉ DES DIFFÉRENTS STADES D'APPROXIMATION POUR  
 $\epsilon = 0.0011960$

$B_m$	approxim. de départ	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
7.53329	$A$ 1.00000		1.00048		1.00044	
-4.31112	$S_1$ -0.25000		-0.25000		-0.25000	
-2.07372	$S_2$ -1.40564		-1.38768		-1.38762	
-0.91168	$S_3$ 0.32424		0.32214		0.32232	
-0.38352	$S_4$ 0.03617	0.03423		0.03361		0.03359
-0.15856	$S_5$ 0.00440	0.00587		0.00574		0.00575
-0.06396	$S_6$ 0.00239	0.00123		0.00120		0.00120
-0.02540	$S_7$ -0.00077	0.00028		0.00027		0.00027
-0.00996	$S_8$ 0.00097	0.00007		0.00007		0.00007
-0.00388	$S_9$ 0.00000	0.00002		0.00002		0.00002
-0.00152						
-0.00056						
-0.00024						
-0.00008						

Ceci peut être combiné avec l'expression de  $\varphi_0$  d'après le 1° et avec celle de  $\sigma_m$  tirée de (8.1). Ceci donne les deux formules

$$(13.1) \quad \delta = -a/4 = 16e^{4a(0)/6^{1/2}} e^{-2k\pi/6^{1/2}} = 2.6187(0.076911)^k$$

$$(13.2) \quad \delta = -a/4 = 16e^{4a(0)/6^{1/2}} e^{-2k\pi/6^{1/2}} e^{8\chi/6^{1/2}} = 4.5674(0.076911)^k$$

en comparant ce qui vient d'être écrit avec le N° 4 on verra que pour (13.1) et  $k$  pair on a une orbite du type  $c$  du N° 4, si  $k$  est impair c'est une orbite du type  $b$ ; pour (13.2) on aura pour  $k$  pair le type  $a$  et  $k$  impair le type  $d$ .

Nous avons résumé dans le Tableau III les valeurs  $\delta$  ainsi obtenues, d'ailleurs comme

$$(13.3) \quad \gamma_1 = (1 - 4\delta)^{-1/2} = 1 + \delta + \frac{5}{2} \delta^2 + \frac{15}{2} \delta^3 + \dots$$

on peut dire qu'au premier ordre, et c'est à cet ordre que nous avons limité les développements de Tchang Yong-Li,  $\gamma_1 - 1 = \delta$ ; cependant si nous calculons  $\gamma_1$  avec la formule exacte (13.3), il se fait que ces valeurs sont toujours plus proches des valeurs réelles calculées d'après le N° 11 et que nous comparons dans le même tableau.

Nous proposons donc cette variante. Il nous reste maintenant à calculer les exposants caractéristiques aux points intermédiaires.

**14. Exposants caractéristiques.** Nous avons vu au 1° et 2° du numéro précédent comment se calculent les solutions qui pour  $\sigma = 0$  sont paires ou impaires et comment se calculent les fonctions et leurs dérivées pour  $\sigma = -\sigma_m$ ; en remplaçant dans (2.10) et en réduisant on trouve la formule simple

$$(14.1) \quad \cosh \Omega T = \frac{-\sin [2 \omega \sigma_m + 2a(0) + 2\chi]}{\sin 2\chi}$$

TABLEAU V  
DEUX AUTRES ORBITES LIMITES

$\gamma_1$	1. 0011978	1. 0020980	
$q$	0. 35382	0. 33152	
$\omega$	0. 46718	0. 49622	
$B_m/4$	$\eta(S_p = I_{2p-1})$	$B_m/4$	$\eta$
1. 88247	$I_1$ -0. 25000	1. 58328	$P_0$ 0. 44212
-1. 07748	$I_3$ -1. 38803	-0. 97439	$P_2$ 1. 00000
-0. 51820	$I_5$ 0. 32247	-0. 44134	$P_4$ -0. 61869
-0. 22779	$I_7$ 0. 03358	-0. 18278	$P_6$ -0. 00758
-0. 09626	$I_9$ 0. 00575	-0. 07266	$P_8$ 0. 00079
-0. 03960	$I_{11}$ 0. 00120	-0. 02808	$P_{10}$ 0. 00042
-0. 01597	$I_{13}$ 0. 00028	-0. 01064	$P_{12}$ 0. 00014
-0. 00634	$I_{15}$ 0. 00007	-0. 00397	$P_{14}$ 0. 00005
-0. 00249	$I_{17}$ 0. 00002	-0. 00146	$P_{16}$ 0. 00001
-0. 00097		-0. 00053	
-0. 00038		-0. 00019	
-0. 00014		-0. 00007	
-0. 00006		-0. 00003	
-0. 00002		-0. 00001	

en égalant à  $\pm 1$ , on retrouve les orbites limites ci-dessus, avec pour  $a$  et  $b$ ,  $\cosh \Omega T = 1$  et pour  $c$  et  $d$ ,  $\cosh \Omega T = -1$ .

On voit d'autre part que pour  $\gamma_1$  suffisamment voisin de un le  $\cosh \Omega T$  varie sinusoidalement (voir figure 2) avec des maxima et minima valant en module  $1/\sin 2\chi = 2.9927$ . Ces extrema ont lieu pour

$$\delta = 16e^{4a(0)/6^{\frac{1}{2}}} e^{(2k-1)\pi/6^{\frac{1}{2}}} e^{4\chi/6^{\frac{1}{2}}} = 9.5913(0.076911)^k$$

ils sont aussi indiqués au Tableau III.

**15. Comparaisons des résultats.** La comparaison des résultats exacts du N° 11 et approchés du N° 13 montre que trois décimales sont déjà bonnes pour  $\gamma_1 = 1.0296$  et que cela s'améliore encore; on voit donc l'utilité de l'approximation de T. Yong-Li et comment se succèdent les zones de stabilité et d'instabilité; comme pratiquement seule une courbe approchée de l'exposant caractéristique est nécessaire dès qu'on connaît les orbites limites, il nous suffira de montrer qu'on peut améliorer comme on le désire toutes les orbites limites. On aura ainsi épuisé le problème posé par la famille équatoriale. Nous tenons cependant à remarquer ici que d'autres familles d'orbites périodiques existent au voisinage de l'équateur, lorsque l'orbite équatoriale est stable et que  $\Omega' = -i\Omega$  est commensurable avec  $\omega$ ; mais ceci est un autre problème.

#### AMELIORATION DES ORBITES LIMITES

**16. Variante du calcul de l'orbite.** Lorsque  $q$  augmente, le calcul de l'orbite par les fonctions  $\theta$  devient de moins en moins aisé. Il existe alors une autre méthode qui a été exposée en détail par Lifshitz [9] dont le principe est

de déterminer théoriquement les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction périodique  $e^{-2x} - 1$  de l'équation de Hill (9.2). Lifshitz utilisait une autre transformation que celle du N° 10 pour exprimer  $e^{-x}$ . Nous avons repris ses calculs avec la transformation (10.4).

On trouve dans Whittaker et Watson [17] aux N° 22.6 ex. 1 et 22.735 ex. 5, des formules qui peuvent s'écrire en posant à cause de (10.4).

$$\begin{aligned}
 (16.1) \quad x &= \frac{u\pi}{K} = \frac{a_1\pi}{K} \sigma = \omega\sigma \\
 \operatorname{dn} u &= \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m \cos m\omega\sigma}{1 + q^{2m}} \\
 \operatorname{dn}^2 u &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u = \frac{E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m \cos m\omega\sigma}{1 - q^{2m}}.
 \end{aligned}$$

On en déduit les coefficients  $a_m$  de la série de Fourier représentant  $f(\sigma)$ :

$$f(\sigma) = \left(\frac{1}{2} + a_1 \operatorname{dn} u\right)^2 - 1 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\omega\sigma$$

et donc les coefficients  $B_m$  qui y sont rattachés par (6.2):

$$(16.2) \quad B_0 = 3/\omega^2 - 2/\omega - 4EK/\pi^2$$

$$(16.3) \quad B_m = -\frac{4mq^m}{1 - q^{2m}} - \frac{4q^m}{\omega(1 + q^{2m})}.$$

(Le  $\omega$  qui intervient dans ces formules vaut le double de celui de Lifshitz.)

Remarquons incidemment que la transformation (10.4) pourrait se déduire de celle de Lifshitz par une transformation de Landen. On pourrait calculer les intégrales complètes  $K$ ,  $E$  et  $K'$  par une ou plusieurs transformations successives; mais lorsque  $\gamma_1$  est plus petit que 1.002, pour une précision de cinq décimales, les termes des développements suivants en  $\epsilon = 1 - \gamma_1$  sont négligeables à partir du second order en  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{5}{8} \epsilon^2 + \dots \right), \\
 k'^2 &= \epsilon - \frac{1}{2} \epsilon^2 + \dots, \\
 K' &= \frac{1}{2} \pi \left( 1 + \frac{1}{4} k'^2 + \frac{9}{64} k'^4 + \dots \right), \\
 (16.4) \quad K &= \left( 1 + \frac{1}{4} k'^2 + \frac{9}{64} k'^4 + \dots \right) \log \frac{4}{k'} - \frac{1}{4} k'^2 - \frac{21}{128} k'^4 - \dots, \\
 E &= \left( \frac{1}{2} k'^2 + \frac{3}{16} k'^4 + \dots \right) \log \frac{4}{k'} + 1 - \frac{1}{4} k'^2 - \frac{13}{64} k'^4 - \dots, \\
 q &= e^{-\pi K'/K}.
 \end{aligned}$$

On a donc, à cette approximation et en écrivant  $\epsilon_1 = \frac{1}{4} \epsilon$ :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2^{-\frac{1}{2}}(1 - 2\epsilon_1), \\
 k'^2 &= 4\epsilon_1, \\
 (16.5) \quad K' &= \frac{1}{2} \pi(1 + \epsilon_1), \\
 K &= (1 + \epsilon_1) \log(2\epsilon_1^{-\frac{1}{2}}) - \epsilon_1, \\
 E &= 2\epsilon_1 \log(2\epsilon_1^{-\frac{1}{2}}) + 1 - \epsilon_1.
 \end{aligned}$$

Enfin, si on se limite au premier terme de chaque développement on retrouve d'une part la formule (8.1):

$$\sigma_m = \frac{K}{a_1} = -2^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{k'}{4}\right)^2 = -2^{-\frac{1}{2}} \log\left(-\frac{a}{64}\right)$$

et d'autre part la formule

$$(16.6) \quad \log q \log(\epsilon/16) = \pi^2$$

qui nous permet de calculer  $q$  pour les valeurs de  $\epsilon$  suffisamment petites, afin de compléter la dernière partie de la figure 2.

**17. Calculs et résultats.** Nous avons cherché à améliorer les orbites limites dont une première approximation de  $\epsilon$  était donnée au Tableau III à savoir  $\epsilon = 0.002089$  et  $0.001195$ . Nous avons d'abord déterminé l'orbite sur l'équateur qui correspond à ces valeurs de  $\epsilon$  par la méthode du numéro précédent, en particulier les harmoniques  $B_m$  intervenant dans la formule (6.2) sont données par (16.2) et (16.3). Puis nous avons déterminé une première approximation de la solution au moyen de la formule (12.1) ci-dessus, de la formule (7) du travail de Tchang Yong-Li [14] et de son Tableau I transformé en série de puissances de  $\cos \theta$ .

Les approximations successives sont déterminées par la méthode du N° 6, avec  $q = 3$  et dont nous donnons un exemple pour  $\epsilon = 0.0011960$  au Tableau IV, la dernière approximation nous donne aussi la valeur de  $A$ : 1.00044. Nous avons recommencé pour  $\epsilon = 0.0011980$ ;  $A$  vaut alors 0.99995, par interpolation linéaire on trouvera qu'à cinq décimales l'orbite limite cherchée a lieu pour  $\gamma_1 = 1.0011978$ .

Nous avons résumé au Tableau V la solution pour cette orbite; celle qui correspond à  $\gamma_1 = 1.0020980$  a été obtenue de façon semblable.

**18. Conclusions.** Au sujet des problèmes où interviennent la résolution d'une équation de Hill, nous avons mis au point (N° 2 et 3) une méthode permettant de calculer par intégration numérique non seulement l'exposant caractéristique, mais aussi la solution de l'équation. Nous avons également montré (N° 6) comment trouver par approximations successives, une orbite limite (d'exposant caractéristique nul) dès qu'on connaît une première approximation.



Pour le problème de Störmer, nous avons calculé les exposants caractéristiques de la famille d'orbites périodiques sur l'équateur (fig. 2) ainsi que quelques orbites limites (fig. 1).

Ce travail montre comment une infinité d'orbites périodiques s'aplatissent sur l'équateur; nous nous sommes seulement intéressé ici à celles qui correspondent à des limites entre stabilité et instabilité, mais une infinité d'autres sont mises en évidence (N° 15); les orbites limites sont cependant les seules qui terminent des familles pour lesquelles la période de  $\lambda$  vaut la période de  $x$ ; nous retrouvons parmi ces orbites limites, la terminaison de la famille principale (orbite 19L du travail de Lifshitz [10]), une orbite en fer à cheval du même type que deux orbites données par Störmer [13] pour  $\gamma_1 = 0.97$ , une orbite ovale qui termine une famille du même nom que nous avons déterminée dans notre thèse de Doctorat et dont les résultats seront publiés plus tard.

Nous tenons à remercier encore le Chanoine G. Lemaître, pour ses précieux conseils et certaines remarques que nous avons reproduites au N° 16. Nous remercions aussi le Fonds National Belge de la Recherches Scientifique qui nous a permis de faire en 1947-48 une bonne partie de ces recherches.

## REFERENCES

- [1] L. P. Bouckaert, *Trajectoires voisines de l'équateur*, Ann. Soc. Sci. Brux., vol. 54 (1934), 174-193.
- [2] L. Brillouin, *A practical method for solving Hill's equation*, Quart. of Applied Math., vol. 6 (1948), 167-178.
- [3] O. Godart, *Détermination des exposants caractéristiques des trajectoires périodiques*, Ann. Soc. Sci. Brux., vol. 58 (1938), 27-41.
- [4] C. Graef et S. Kusaka, *On periodic orbits in the equatorial plane of a magnetic dipôle*, J. Math. and Phys., vol. 17 (1938), 43-54.
- [5] P. Humbert, *Fonctions de Lamé et Fonctions de Mathieu* (Paris, Gauthier-Villars, 1926).
- [6] G. Lemaître, *Trajectoires infiniment voisines de l'équateur*, Ann. Soc. Sci. Brux., vol. 54 (1934), 162-174.
- [7] ——— *Champ magnétique et rayons cosmiques*, Ciel et Terre, Brux., vol. 59 (1943), 1-16.
- [8] G. Lemaître et M. S. Vallarta, *Calcul d'une famille d'orbites asymptotiques*, Ann. Soc. Sci. Brux., vol. 56 (1936), 102-130.
- [9] J. Lifshitz, *On the Fourier analysis of orbits in the equatorial plane of a magnetic dipole*, J. Math. and Phys., vol. 21 (1942), 94-116.
- [10] ——— *On the stability of the principal periodic orbits in the theory of primary cosmic rays*, J. Math. and Phys., vol. 21 (1942), 284-292.
- [11] F. R. Moulton, *Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo*, vol. 32 (1908), 911.
- [12] ——— *Monthly Notices of the R.A.S.*, vol. 75 (1914), 40-57.
- [13] C. Störmer, *Periodische Elektronbahnen*, Zeits. für Astroph., vol. 1 (1930), 237-274.
- [14] T. Yong-Li, *Trajectoires voisines de l'équateur*, Ann. Soc. Sci. Brux., vol. 59 (1939), 301-345.
- [15] M. S. Vallarta, *An outline of the theory of the allowed cone of cosmic radiation* (Univ. of Toronto Press, 1938).
- [16] E. T. Whittaker, *Analytical dynamics* (Cambridge Univ. Press, 1917).
- [17] E. T. Whittaker et G. N. Watson, *Modern Analysis* (Cambridge Univ. Press, 1927), chapitre XI.

*Université Laval, Québec*