Can. J. Math., Vol. XXXVI, No. 1, 1984, pp. 1-8

APPROXIMATION HARMONIQUE SUR LES SURFACES DE RIEMANN

A. BOIVIN ET P. M. GAUTHIER

1. Introduction. Dans le présent article, *surface de Riemann* ou plus simplement *surface* désignera une variété analytique complexe R, connexe, sans bord et de dimension 1. En terme d'une variable locale, une fonction harmonique h, définie sur R, possédant une singularité isolée au point z_0, peut s'écrire comme la somme d'une fonction harmonique

$$u(z) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n\right),$$

et d'une partie singulière

$$s(z) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^{-n}\right) + \gamma \log|z - z_0|,$$

avec $\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{C}$, $\gamma \in \mathbf{R}$; les deux séries sont supposées convergentes, la première pour $|z - z_0|$ suffisamment petit, la seconde pour tout $z \neq z_0$. Alors $h(z) = u(z) + s(z)$. Nous dirons que la singularité de h est *non-essentielle* si $s(z)$ est de la forme

$$s(z) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} \beta_n (z - z_0)^{-n}\right) + \gamma \log|z - z_0|,$$

et *newtonienne* ou *logarithmique* si elle s'écrit

$$s(z) = \gamma \log|z - z_0|.$$

h sera dite *fonction essentiellement harmonique* (respectivement *fonction newtonienne*) sur un ouvert Ω de R si h est une fonction harmonique sur Ω sauf possiblement pour des singularités non-essentielles (respectivement logarithmiques). On dira qu'une fonction est essentiellement harmonique (newtonienne) sur un ensemble quelconque $W \subset R$ si elle est essentiellement harmonique (newtonienne) sur un ouvert contenant W. Nous

Reçu le 5 janvier 1982 et sous forme revisée le 19 novembre 1982. Étude subventionnée par le C.R.S.N.G. du Canada et le Ministère de l'Éducation du Québec.

noterons alors $h \in \text{EssHarm}(W)$ et $h \in N(W)$ respectivement. De la même manière Harm (W), Hol (W) et Mer (W) désigneront les fonctions harmoniques, holomorphes et méromorphes sur W. Si u est une fonction sur W, alors

$$|u|_W = \sup_{P \in W} |u(P)|.$$

Nous dirons que $h \in \text{EssHarm}(W)$ est limite uniforme de fonctions essentiellement harmoniques sur R si $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, h_\epsilon \in \text{EssHarm}(R)$ telle que $|h - h_\epsilon|_W < \epsilon$. Remarquons que h_ϵ possède donc les mêmes singularités que h sur W. En d'autres termes $(h - h_\epsilon) \in \text{Harm}(W)$. W sera dit *borné* s'il existe un sous-ensemble compact de R contenant W.

Nous nous proposons de démontrer:

THÉORÈME 1. *Soit R une surface de Riemann, K un sous-ensemble compact de R et E un sous-ensemble ouvert de $R \setminus K$. Si E contient un point dans chacune des composantes bornées de $R \setminus K$, alors toute fonction harmonique (respectivement essentiellement harmonique) sur K est limite uniforme de fonctions essentiellement harmoniques sur R dont toutes les singularités sont sur E (respectivement $E \cup K$).*

De même pour les fonctions newtoniennes, nous obtenons

THÉORÈME 2. *Soit R une surface de Riemann, K un sous-ensemble compact de R et E un sous-ensemble de $R \setminus K$. Si E rencontre chacune des composantes bornées de $R \setminus K$, alors toute fonction harmonique (respectivement newtonienne) sur K est limite uniforme de fonctions newtoniennes sur R dont toutes les singularités sont sur E (respectivement $E \cup K$).*

Remarques. i) Si R est une surface de Riemann non compacte, alors notons par R^* la compactifiée de R par un point (point d'Alexandroff). Si $R^* \setminus K$ est connexe, Pfluger [**6**], [**7**, p. 192] a déjà démontré que les fonctions harmoniques sur K peuvent être approchées uniformément sur K par des fonctions harmoniques sans singularité sur R.

ii) À la différence du Théorème 1, nous devons dans le Théorème 2, supposer que E est un ensemble ouvert. Un seul point ne pourrait plus suffire (c.f. Lemmes 1 et 3).

iii) À la fin de cet article, nous serons alors en mesure de compléter la preuve d'un résultat de Gauthier-Goldstein-Ow [**3**, Théorème 1] qui généralise certains de nos travaux aux ensembles non bornés.

2. Préliminaires. Soit R une surface de Riemann et soit Π un ensemble de points sans point limite sur R. Une *fonction singulière* s associée à l'ensemble discret Π, c'est une fonction définie dans

$$\bigcup_{P \in \Pi} D_P \setminus \{P\}$$

où D_P est un disque paramétrique centré en P et dans la coordonée locale pour D_P, s a la représentation

$$s(z) = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(P) z^{-n} + \gamma(P) \log |z|, \quad P \in \Pi.$$

Si R est compacte, alors Π est fini et dans ce cas, on dit que la fonction singulière est *admissible* si

$$\sum_{P \in \Pi} \gamma(P) = 0.$$

Une fonction p, harmonique sur $R \setminus \Pi$ et telle que $p - s$ soit harmonique en chaque point $P \in \Pi$ est dite une *fonction principale* associée à la fonction singulière s.

LEMME 1. ([**1**, pp. 148-157]). *Soit R une surface de Riemann compacte et s une fonction singulière associée à un ensemble fini de points sur R. Alors, il existe une fonction principale p associée à s sur R si et seulement si s est admissible.*

Soient s et s_i, $i = 1, 2, \ldots$, des fonctions singulières sur une surface de Riemann compacte R et soit s définie dans $\cup_{j=1}^{k} (D_j \setminus P_j)$, où P_j sont les points singuliers de s et D_j des disques paramétriques en P_j. Nous disons que la suite $\{s_i\}$ converge vers s si les singularités des s_i sont éventuellement dans $\cup_{j=1}^{k} D_j$ et si les s_i convergent uniformément vers s sur toute partie compacte de $\cup_{j=1}^{k} (D_j \setminus P_j)$. De façon analogue, nous définissons la convergence d'une suite p_i de fonctions principales vers une fonction principale p. Notons que dans ce cas, le principe du maximum entraîne que les p_i convergent vers p uniformément sur tout compact de R ne rencontrant pas les points singuliers de p. Donc cette convergence que nous venons de définir diffère de la convergence uniforme dont parle nos deux théorèmes.

LEMME 2. ([**8**] [**9**, p. 52]). *Soit R une surface de Riemann compacte. Si la suite $\{s_i\}$ de fonctions singulières admissibles converge vers une fonction* *singulière admissible s, alors il existe une suite* $\{p_i\}$ *de fonctions principales associées à* $\{s_i\}$ *qui converge vers une fonction principale p associée à s.*

Nous savons qu'un potentiel complexe de la forme

$$V = \frac{\alpha}{z^n}$$

peut être engendré en combinant linéairement des singularités logarithmiques et en passant à la limite. En effet prenons une source à l'origine de force β

$$\beta \log |z|$$

et n puits distribués symmétriquement à une distance a de l'origine

$$-\frac{\beta}{n} \log |z - ae^{2k\pi i/n}|, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Laissons la distance décroître vers zéro et la force croître de façon à ce que le produit βa^n tende vers une limite α. Il en résulte, à la limite, le potentiel V. Comme application de ce résultat et des deux lemmes précédents, nous avons

LEMME 3. *Soit R une surface de Riemann compacte. Alors toute fonction essentiellement harmonique sur R est limite de fonctions newtoniennes sur R.*

Dans ce lemme, il s'agit encore de convergence uniforme sur tout compact ne rencontrant pas les points singuliers de la fonction limite.

Nous aurons encore besoin d'un lemme de type Mittag-Leffler, cette fois-ci sur les surfaces non compactes.

LEMME 4. ([**6**] [**7**, p. 194]). *Soit R une surface de Riemann ouverte et s une fonction singulière associée à un ensemble discret de points sur R. Alors, il existe une fonction principale associée à s sur R.*

3. Preuves. Nous sommes maintenant en mesure de présenter:

Preuve du Théorème 1. Soit $u \in$ Harm (K). Soit V un voisinage de K borné par un nombre fini de courbes de Jordan et tel que $u \in$ Harm (V). Soit $\widetilde{K}$ la réunion de K et des composantes de $R \setminus K$ qui ne rencontrent pas $R \setminus V$. Notons que $R \setminus \widetilde{K}$ ne possède qu'un nombre fini de composantes bornées $G_1, G_2, \dots, G_n$, car une telle composante rencontre et donc contient une composante de $R \setminus V$. Choisissons un point $P_i \in E$

$\cap\, G_i$, $i = 1, \dots, n$ et posons $E_u = \{P_1, \dots, P_n\}$. Fixons $\epsilon > 0$. Par un théorème de Pfluger ([**6**], [**7**, p. 192] et Remarque i)), nous savons qu'il existe une fonction $v_1 \in \operatorname{Harm}(R \setminus E_u)$ telle que

$$|v_1 - u|_{\tilde{K}} < \epsilon/2.$$

Localement, pour chaque point $P_i \in E_u$, nous pouvons écrire

$$v_1(z) = \gamma^{(i)} \log |z| + \operatorname{Re}(f_i(z))$$

où f_i est holomorphe dans un voisinage épointé de P_i, et $\gamma^{(i)} \in \mathbf{R}$. Puisque E_u ne contient qu'un nombre fini de points, nous pouvons trouver une fonction $g \in \operatorname{Mer}(R/E_u)$ telle que $(g - f_i)$ soit méromorphe au voisinage de P_i, $i = 1, \dots, n$ (voir par exemple [**5**, pp. 648-649, 680]). Appelons K_1 l'ensemble des points où g possède un pôle. Suivant Scheinberg [**10**, Corollary 2], il existe une fonction $l \in \operatorname{Mer}(R)$ dont tous les pôles sont sur $E_u \cup K_1$ et telle que

$$|l - g|_{K \cup K_1} < \epsilon/2.$$

Posons

$$v = v_1 - \operatorname{Re} g + \operatorname{Re} l.$$

Alors $v \in \operatorname{EssHarm}(R) \cap \operatorname{Harm}(R \setminus E_u)$ et

$$|v - u|_K \leqq |v_1 - u|_K + |\operatorname{Re} l - \operatorname{Re} g|_K < \epsilon.$$

Pour compléter la preuve, il reste à considérer le cas où $u \in \operatorname{EssHarm}(K)$. Prenons alors $u_1 \in \operatorname{EssHarm}(R)$ dont toutes les singularités sont sur $E \cup K$ et telle que $(u - u_1)$ soit harmonique sur K (pour l'existence de u_1, voir les Lemmes 1 et 4). Il suffit alors d'appliquer le raisonnement précédent à la fonction $u_0 = u - u_1$.

Remarque. iv) Si la surface de Riemann est non compacte, nous pouvons, dans la preuve du Théorème 1, choisir la fonction g telle que $g \in \operatorname{Hol}(R \setminus E_u)$ et $(g - f_i)$ soit holomorphe au voisinage de P_i. Cela évite l'introduction de l'ensemble K_1.

Preuve du Théorème 2. Si R est une surface de Riemann compacte, alors la preuve découle facilement du Théorème 1 et du Lemme 3.

Si R est non compacte, soit $u \in N(K)$ et $\epsilon > 0$. Soit R^* la compactification d'Alexandroff de R par un point. Et soit G un voisinage de K borné par un nombre fini de courbes de Jordan disjointes tel que $\overline{G}$ soit compact et $R^* \setminus G$ soit connexe. Si $\hat{G}$ est la surface compacte obtenu en doublant G, alors par le cas déjà traité du Théorème 2, il existe $u_1 \in$

$N(\hat{G})$, dont toutes les singularités sont sur $E \cup K \cup (\hat{G} \setminus \bar{G})$, et tel que

$$|u_1 - u|_K < \epsilon/2.$$

Soit $\tilde{K}$ la réunion de K et des composantes bornées de $R \setminus K$. Alors $\tilde{K}$ est une partie compacte de G et $R^* \setminus \tilde{K}$ est connexe. Soit

$$p \in N(R) \cap \text{Harm}\,(R \setminus \tilde{K})$$

telle que $(p - u_1)$ soit harmonique dans $\tilde{K}$ (c.f. Lemme 4). Alors, par le Théorème 1, il existe v harmonique sur R telle que

$$|(p - u_1) - v|_{\tilde{K}} < \epsilon/2.$$

La fonction $p - v$ est l'approximation désirée, ce qui achève la preuve du Théorème 2.

Considérons maintenant l'approximation sur les parties non bornées d'une surface de Riemann ouverte R. Une partie fermée F d'une surface R est dite *essentiellement de genre fini* si F admet un recouvrement par une famille localement finie d'ouverts disjoints, chacun de genre fini. Dans ce contexte, il y a le

THÉORÈME 3. *Soit F une partie fermée essentiellement de genre fini sur une surface de Riemann ouverte R. Alors toute fonction essentiellement harmonique (respectivement newtonienne) sur F peut être approchée uniformément sur F par des fonctions essentiellement harmonique (respectivement newtonienne) sur R.*

Remarque. v) On retrouve la version essentiellement harmonique du Théorème 3 dans [**4**, p. 83, remarques 2.3.10]. La version newtonienne est dans [**3**] mais malheureusement la preuve qu'on y retrouve est incomplète.

Preuve du Théorème 3. Si nous remplaçons le Lemme 6 de [**3**] par nos Théorèmes 1 ou 2, la preuve dans [**3**] devient valable pour le cas où $R \setminus F$ est non borné puisque alors, suivant la notation et la terminologie de [**3**], chaque ouvert

$$R_n \cup \bigcup_{j=1}^{n} M_j$$

a une extention essentielle dans laquelle

$$\bar{R}_{n-2} \cup \{F \cap \bigcup_{j=1}^{n-1} M_j\}$$

est borné.

Supposons donc que $R \setminus F$ soit borné. Soit $u \in N(F)$. Fixons $\epsilon > 0$, choisissons $a \in R \setminus F$ et posons $R_a = R \setminus \{a\}$. $R_a \setminus F$ étant non borné, il existe, par le paragraphe précédent, $u_a \in N(R_a)$ telle que

$$|u_a - u|_F < \epsilon/2.$$

Mais u_a peut avoir une singularité essentielle non isolée au point a.

Étant donné que $R \setminus F$ est borné et que F est essentiellement de genre fini, nous pouvons écrire R comme étant la réunion d'un compact et d'une famille au plus dénombrable d'ouverts disjoints deux à deux et chacun de genre fini. Sous ces hypothèses, Scheinberg [**11**] a démontré qu'une telle surface est obligatoirement de genre fini. Donc R admet une extension compacte $\widetilde{R}$ (cf. [**2**]).

Puisque $\widetilde{R} \setminus \{a\}$ et ouverte, il existe, par le Lemme 4, une fonction $v_a \in N(\widetilde{R} \setminus \{a\})$ telle que $v_a - u_a$ soit harmonique dans un voisinage épointé de a. Par le Lemme 1, il existe une fonction $w_a \in N(\widetilde{R} \setminus \{a\})$ telle que w_a ait la même singularité que $v_a - u_a$ au point a. Soit $\widetilde{F}$ la fermeture de F dans $\widetilde{R}$. Alors par le Théorème 2, il y a une fonction $g \in N(\widetilde{R})$ telle que

$$|(w_a - v_a) - g|_{\widetilde{F}} < \epsilon/2.$$

Posons $v = u_a - v_a + w_a - g$. Alors $v \in N(R)$ et

$$|v - u|_F < \epsilon$$

ce qui achève la preuve de la version newtonienne du Théorème 3.

Pour démontrer la version essentiellement harmonique, on n'a qu'à imiter la preuve newtonienne en faisant appel au Théorème 1 plutôt qu'au Théorème 2. Mais l'on remarque aussi que c'est une conséquence directe du Lemme 4 et de la version newtonienne.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. V. Ahlfors et L. Sario, *Riemann surfaces* (Princeton University Press, 1960).

2. S. Bochner, *Fortsetzung Riemannscher Flächen*, Math. Ann. *98* (1928), 406-421.

3. P. M. Gauthier, M. Goldstein et W. H. Ow, *Uniform approximation on unbounded sets by harmonic functions with logarithmic singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. *261* (1980), 169-183.

4. P. M. Gauthier et W. Hengartner, *Approximation qualitative sur des ensembles non bornés*. Sém. Math. Sup. 1981 (Les Presses de l'Université de Montréal, 1982).

5. A. Hurwitz, *Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen. Mit einem Abschnitt von R. Courant. Mit einem Anhang von H. Röhrl, 4* Aufl. (Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, 1964).

6. A. Pfluger, *Ein Approximationsatz für harmonische Funktionen auf Riemannschen Flächen*, Ann. Acad. Sci. fenn., Ser. A, *1, 216* (1956).

7. ——— *Theorie der Riemannschen Flächen* (Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957).

8. B. Rodin et L. Sario, *Convergence of normal operators*, Ködai Math. Sem. Rep. *19* (1967), 165-175.

9. ——— *Principal functions* (D. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1968).

10. S. Scheinberg, *Uniform approximation by meromorphic functions having prescribed poles*, Math. Ann. *243* (1979), 83-93.

11. ——— *Gauthier's localization theorem on meromorphic uniform approximation*, Pacific J. Math *107* (1983), 223-228.

Université de Montréal,
Montréal, Québec