Canad. J. Math. Vol. **53** (6), 2001 pp. 1141–1173

Sur le comportement, par torsion, des facteurs epsilon de paires

Colin J. Bushnell et Guy Henniart

Résumé. Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien et ψ un caractère additif non trivial de F. Soient n et n' deux entiers distincts, supérieurs à 1. Soient π et π' des représentations irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$, $\mathrm{GL}_{n'}(F)$ respectivement. Nous prouvons qu'il existe un élément $c = c(\pi, \pi', \psi)$ de $F^\times$ tel que pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$ on ait $\varepsilon(\chi\pi \times \pi', s, \psi) = \chi(c)^{-1}\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)$. Nous examinons aussi certains cas où $n = n'$, $\pi' = \pi^\vee$. Les résultats obtenus forment une étape vers une démonstration de la conjecture de Langlands pour F, qui ne fasse pas appel à la géométrie des variétés modulaires, de Shimura ou de Drinfeld.

Abstract. Let F be a non-Archimedean local field, and ψ a non-trivial additive character of F. Let n and n' be distinct positive integers. Let π, π' be irreducible supercuspidal representations of $\mathrm{GL}_n(F)$, $\mathrm{GL}_{n'}(F)$ respectively. We prove that there is $c = c(\pi, \pi', \psi) \in F^\times$ such that for every tame quasicharacter χ of $F^\times$ we have $\varepsilon(\chi\pi \times \pi', s, \psi) = \chi(c)^{-1}\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)$. We also treat some cases where $n = n'$ and $\pi' = \pi^\vee$. These results are steps towards a proof of the Langlands conjecture for F, which would not use the geometry of modular—Shimura or Drinfeld—varieties.

1 Introduction

1.1

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p. Fixons un caractère additif non trivial ψ de F, et une clôture séparable algébrique $\bar{F}$ de F; notons $\mathcal{W}_F$ le groupe de Weil de $\bar{F}$ sur F.

Soit σ une représentation complexe continue semisimple de $\mathcal{W}_F$, *sans constituant modéré*, c'est-à-dire que σ ne contient pas le caractère trivial du sous-groupe d'inertie sauvage de $\mathcal{W}_F$. Un des résultats principaux de [14] est qu'il existe un élément $c = c(\sigma, \psi)$ de $F^\times$, bien défini modulo le groupe $\mathbf{U}_F^1$ des unités principales de F, tel qu'on ait

$$\varepsilon(\chi\sigma, s, \psi) = \chi(c)^{-1}\varepsilon(\sigma, s, \psi)$$

pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$. Dans cette formule, les facteurs epsilon sont ceux de Langlands-Deligne [13], [26]. Nous avons écrit $\chi\sigma$ pour la représentation $g \mapsto \chi\big(\tau_F(g)\big)\,\sigma(g)$, où $\tau_F\colon \mathcal{W}_F \to F^\times$ est l'application de réciprocité de la théorie locale du corps de classes, normalisée de façon que les substitutions de Frobenius géométriques correspondent aux uniformisantes de F.

Reçu par les éditeurs le April 11, 2000; revisée le May 11, 2001.

Ce travail a été en partie subventionné par le réseau européen TMR "Arithmetical Algebraic Geometry".

Classification (AMS) par sujet: 22E50.

Mots clés: corps local, correspondance de Langlands locale, facteurs epsilon de paires.

On sait [14] que $c(\sigma,\psi)$ est *invariant par extension modérée*: si K est une extension finie modérée de F dans $\bar{F}$, on a

$$c(\sigma|\mathcal{W}_K, \psi\circ \mathrm{Tr}_{K/F}) \equiv c(\sigma,\psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

Au section 2 de cet article, nous étendrons ces résultats aux représentations du groupe de Weil-Deligne de $\bar{F}$ sur F.

1.2

Les conjectures de Langlands pour GL_n sur F sont maintenant établies: voir Laumon, Rapoport et Stuhler [23] pour F de caractéristique non nulle, et Harris et Taylor [16], Henniart [19] si F est un corps p-adique. La correspondance ainsi obtenue donne, pour chaque entier $n \geqslant 1$, une bijection canonique $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de l'ensemble $\mathbf{G}_F(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations complexes Φ-semisimples, de dimension n, du groupe de Weil-Deligne de F, sur l'ensemble $\mathbf{A}_F(n)$ des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$. La propriété la plus importante de ces bijections est la préservation des facteurs epsilon de paires: pour $\sigma\in\mathbf{G}_F(n)$, $\sigma'\in\mathbf{G}_F(n')$, on a

$$\varepsilon\Big(\pi(\sigma)\times\pi(\sigma'), s, \psi\Big) = \varepsilon(\sigma\otimes\sigma', s, \psi).$$

Ici, le facteur epsilon de gauche est celui défini par Jacquet, Piatetskii-Shapiro et Shalika [22] (voir aussi Shahidi [25]). D'autre part, ces bijections sont compatibles à la torsion par les quasicaractères de $F^\times$: pour χ un tel quasicaractère et $\sigma\in\mathbf{G}_F(n)$, on a $\pi(\chi\sigma) = \chi\pi(\sigma)$, où pour $\pi\in\mathbf{A}_F(n)$, $\chi\pi$ désigne la représentation $g\mapsto \chi(\det g)\sigma(g)$.

Il est alors clair qu'on peut traduire les résultats de 1.1 en des propriétés analogues du facteur $\varepsilon(\pi,s,\psi)$, où $\pi\in\mathbf{A}_F(n)$ correspond à σ. Nous le ferons dans le section 3.

1.3

Cependant nous avons décrit dans [9] une stratégie pour une preuve des conjectures de Langlands sur F (pour les représentations de dimension une puissance de p), qui ne fait pas appel à la géométrie des variétés de Shimura ou de Drinfeld. Une telle preuve fournirait d'ailleurs de nombreux renseignements explicites sur la correspondance de Langlands, que les démonstrations actuelles ne donnent pas. Une étape importante dans la stratégie est une démonstration directe des propriétés du section 3 pour les facteurs $\varepsilon(\pi\times\pi', s, \psi)$. C'est ce que nous obtenons, dans le section 4 et les suivants, dans un certain nombre de cas cruciaux. La plupart de ces résultats ont été annoncés dans [9] 2.2 Known Cases).

1.4

Au section 4, nous traitons d'abord le cas des facteurs epsilon $\varepsilon(\pi,s,\psi)$ définis dans [15]: autrement dit, nous nous restreignons au cas où $n'=1$.

On sait qu'une représentation irréductible de $\mathcal{W}_F$ est sans constituant modéré si et seulement si son exposant d'Artin est strictement supérieur à sa dimension. On dit, en parallèle, qu'une représentation irréductible supercuspidale π de $\mathrm{GL}_n(F)$ est *sans constituant modéré* si son exposant d'Artin (dont la définition est rappelée au section 3) est strictement supérieur à n; on dit qu'une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$ est sans constituant modéré si chaque facteur π_i de son support supercuspidal $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ l'est.

Soit π une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$ sans constituant modéré. Nous prouvons qu'il existe alors $c = c(\pi, \psi) \in F^\times$ tel que, pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$, on ait

$$\varepsilon(\chi\pi, s, \psi) = \chi(c)^{-1}\varepsilon(\pi, s, \psi).$$

Supposons un instant F de caractéristique nulle. Si K est une extension finie cyclique modérément ramifiée de F, alors le changement de base π_K de π [1] Chapter I est sans constituant modéré et on a

$$c(\pi_K, \psi_K) \equiv c(\pi, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1},$$

où ψ_K désigne le caractère additif $x \mapsto \psi(\mathrm{Tr}_{K/F}\, x)$ de K. Ce résultat s'étend au cas d'une extension finie galoisienne modérément ramifiée K/F, par empilement de deux changements de base cycliques.

1.5

Au section 5, nous fixons deux entiers n, n' tels que $n > n' > 1$. Soit π une représentation irréductible supercuspidale de $\mathrm{GL}_n(F)$, totalement ramifiée au sens où $\chi\pi$ n'est équivalente à π pour aucun quasicaractère non ramifié χ de $F^\times$. Pour $\pi' \in \mathbf{A}_F(n')$, nous montrons qu'il existe $c = c(\pi, \pi', \psi) \in F^\times$ tel que pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$ on ait

$$\varepsilon(\chi\pi \times \pi', s, \psi) = \chi(c)^{-1}\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi).$$

Pour la démonstration, on se ramène d'abord aisément au cas où $n' = n-1$ et où π' est générique. On utilise alors directement la définition de [22] pour les facteurs $\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)$, en termes d'intégrales faisant intervenir les fonctions de Whittaker pour π et π'. On dispose [6] pour π de fonctions de Whittaker bien adaptées à la construction de π donnée par Bushnell et Kutzko [12]. Des considérations de support pour les intégrales de [22] donnant le facteur $\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)$ permettent alors d'obtenir le résultat.

Notons que cette approche est trop élémentaire pour donner l'invariance de $c(\pi, \pi', \psi) \in F^\times/\mathbf{U}_F^1$ par changement de base modéré.

1.6

Elle donne cependant des résultats satisfaisants dans le cas où $n = n'$ est une puissance de p, où $\pi' = \check{\pi}$ (contragrédiente de π) et où π est totalement ramifiée. Au section 6, nous montrons qu'en ce cas il existe $c = c(\pi, \pi', \psi)$ tel qu'on ait

$$\frac{\varepsilon(\chi\pi \times \pi', s, \psi)}{\varepsilon(\chi, s, \psi)} = \chi(c)^{-1} \frac{\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)}{\varepsilon(1_F, s, \psi)}.$$

(En fait nous traitons aussi les cas plus généraux où π' diffère légèrement,"en niveau 0", de $\check{\pi}$).

En outre, nous déterminons $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ en termes d'un caractère simple (au sens de [12]) intervenant dans π; cette formule permet de voir que $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ est invariant par changement de base cyclique modéré.

2 Représentations du groupe de Weil-Deligne

2.1

Soit $\sigma = (\rho, N)$ une représentation complexe Φ-semisimple du groupe de Weil-Deligne de F [26] 4.1.2, 4.1.3. Rappelons qu'en particulier cela signifie que ρ est une représentation complexe continue semisimple de $\mathcal{W}_F$. Nous dirons que σ est *sans constituant modéré* s'il en est de même pour ρ, c'est-à-dire si la restriction de ρ au sous-groupe de ramification sauvage $\mathcal{P}_F$ de $\mathcal{W}_F$ ne contient pas le caractère trivial. Si χ est un quasicaractère de $F^\times$, nous notons $\chi\sigma$ la représentation $(\chi\rho, N)$.

Théorème *Soit σ une représentation complexe Φ-semisimple du groupe de Weil-Deligne de F, sans constituant modéré. Il existe un élément $c = c(\sigma, \psi) \in F^\times$ tel que, pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$, on ait*

$$\varepsilon(\chi\sigma, s, \psi) = \chi(c)^{-1} \varepsilon(\sigma, s, \psi).$$

Démonstration En effet, ρ n'a pas de constituant modéré donc *a fortiori* aucun constituant non ramifié. Il découle alors de [26] 4.1.6 qu'on a $\varepsilon(\sigma, s, \psi) = \varepsilon(\rho, s, \psi)$ et de même $\varepsilon(\chi\sigma, s, \psi) = \varepsilon(\chi\rho, s, \psi)$. Le théorème découle alors de [14] 4.6. ∎

Corollaire 2.2 *Soit K une extension finie modérée de F dans $\bar{F}$, et soit σ_K la restriction de σ au groupe de Weil-Deligne de K. Alors σ_K est sans constituant modéré, et on a*

$$c(\sigma_K, \psi_K) \equiv c(\sigma, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1},$$

où ψ_K désigne le caractère $x \mapsto \psi(\mathrm{Tr}_{K/F}\, x)$ de K.

De même que pour le théorème, le résultat découle du résultat analogue pour ρ, établi dans *loc. cit.* (4.21.3).

3 Torsion pour les facteurs epsilon de paires, via la correspondance

3.1

Dans ce section 3, nous utilisons les correspondances de Langlands établies dans [23], [16], [19] et nous traduisons en termes de facteurs epsilon de paires les propriétés du section 2.

Fixons quelques notations. Soient $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers dans F et $\mathfrak{p}$ son idéal maximal. Notons $q = q_F = (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})$, le cardinal du corps résiduel de F.

Si ψ est un caractère additif non trivial de F, le *niveau* $n(\psi)$ de ψ est le plus petit entier k tel que $\mathfrak{p}^k \subset \operatorname{Ker}\psi$.

Soit π une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$. Le facteur epsilon $\varepsilon(\pi, s, \psi)$ de π, au sens de [15], est de la forme

$$\varepsilon(\pi, s, \psi) = q^{f(\pi,\psi)(\frac{1}{2}-s)}\varepsilon\left(\pi, \frac{1}{2}, \psi\right),$$

pour un entier $f(\pi, \psi)$ qui ne dépend que de π et du niveau de ψ. *L'exposant d'Artin* $a(\pi)$ de π est

$$a(\pi) = f(\pi, \psi_0),$$

pour un caractère ψ_0 quelconque de F de niveau 0.

Proposition *Soit π une représentation irréductible supercuspidale du groupe $\mathrm{GL}_n(F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) On a $a(\pi) > n$.
(2) La représentation π n'admet aucun vecteur non nul fixe pour le groupe $1 + \mathfrak{p}\mathrm{M}_n(\mathfrak{o})$.
(3) Il existe un caractère simple, attaché à une strate simple dans $\mathrm{M}_n(F)$, qui intervient dans π.

Démonstration L'équivalence de (2) et (3) est [12] 8.4.1, et celle de (1) et (2) découle des calculs de facteurs epsilon dans [2], [3]. ■

Une représentation irréductible supercuspidale π de $\mathrm{GL}_n(F)$ est dite *sans constituant modéré* si elle satisfait aux conditions de la proposition. Une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$ est dite sans constituant modéré si chaque facteur π_i de son support supercuspidal $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ est sans constituant modéré.

Une représentation complexe continue *irréductible* de $\mathcal{W}_F$ de dimension n est sans constituant modéré si et seulement si son exposant d'Artin est strictement plus grand que n [17] Theorem 1. Puisque la correspondance de Langlands préserve les exposants d'Artin, on voit qu'une représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}_n(F)$ est sans constituant modéré si et seulement si la représentation correspondante du groupe de Weil-Deligne l'est.

3.2

Du section 2 on déduit immédiatement les résultats suivants concernant les facteurs $\varepsilon(\pi, s, \psi)$ de [15]: le premier découle de la préservation des facteurs epsilon par la correspondance, le deuxième de la compatibilité de la correspondance au changement de base cyclique.

Théorème *Soit π une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, sans constituant modéré. Il existe un élément $c = c(\pi, \psi)$ de $F^\times$ tel que, pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$, on ait*

$$\varepsilon(\chi\pi, s, \psi) = \chi(c)^{-1}\varepsilon(\pi, s, \psi).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-043-0 Published online by Cambridge University Press

Corollaire *Supposons F de caractéristique nulle. Soient K une extension cyclique modérée de F, et π_K la représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ obtenue par changement de base de F à K. Alors π_K est sans constituant modéré, et on a*

$$c(\pi_K, \psi_K) \equiv c(\pi, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

Remarque La restriction $\mathrm{car}(F) = 0$ n'est là que parce que la théorie du changement de base n'est écrite qu'en caractéristique nulle. Au section 4, nous prouvons le théorème et son corollaire directement, ainsi qu'une version du corollaire pour le changement de base modéré défini dans [4], [5], qui, lui, existe également en caractéristique non nulle: voir 4.6.

3.3

Soient π, π' des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$, $\mathrm{GL}_{n'}(F)$ respectivement, et σ, σ' les représentations correspondantes du groupe de Weil-Deligne. On peut dire que le couple (π, π') est sans constituant modéré si la représentation $\sigma \otimes \sigma'$ est sans constituant modéré. Il est possible, mais peu commode dans le cas général, d'exprimer cette propriété directement en termes de π et π'. Nous nous contenterons (voir 3.7 ci-dessous) des cas particuliers les plus importants pour notre propos, *cf.* [9].

3.4

Supposons d'abord $n > n'$ et π supercuspidale totalement ramifiée. Alors la représentation σ du groupe de Weil-Deligne correspondant à π est irréductible et totalement ramifiée, *i.e.*, sa restriction au sous-groupe d'inertie $\mathcal{I}_F$ de $\mathcal{W}_F$ est irréductible. Un point important (exercice de la théorie de Clifford) est que la restriction de σ au sous-groupe de ramification sauvage $\mathcal{P}_F$ de $\mathcal{W}_F$ est sans multiplicité; comme σ est irréductible, les composants irréductibles de cette restriction forment bien sûr une seule orbite sous l'action de $\mathcal{W}_F$. On en déduit le lemme suivant.

Lemme *Soit σ une représentation complexe continue de $\mathcal{W}_F$. Supposons que la restriction de σ à $\mathcal{I}_F$ soit irréductible. Soit σ' une représentation complexe continue de $\mathcal{W}_F$ dont la restriction au sous-groupe de ramification sauvage $\mathcal{P}_F$ ait un constituant commun avec celle de σ. Alors on a $\dim \sigma' \geqslant \dim \sigma$.*

Si σ' est la représentation du groupe de Weil-Deligne qui correspond à π', on a $\dim \sigma' < \dim \sigma$ par hypothèse, et par le lemme $\sigma \otimes \sigma'$ est sans constituant modéré. Par la correspondance, on déduit le théorème suivant.

Théorème *Soit π une représentation irréductible supercuspidale totalement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F)$, et soit π' une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_{n'}(F)$, avec $n' < n$. Alors il existe un élément $c = c(\pi, \pi', \psi)$ de $F^\times$ tel que pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$ on ait*

$$\varepsilon(\chi\pi \times \pi', s, \psi) = \chi(c)^{-1} \varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi).$$

Au section 5, nous donnerons une preuve directe de ce théorème.

3.5

Supposons $n = n'$, et explorons le cas où π et π' sont des représentations irréductibles supercuspidales totalement ramifiées de $\mathrm{GL}_n(F)$. Le cas que nous pouvons traiter par les méthodes présentes est celui où les représentations correspondantes σ et σ' de $\mathcal{W}_F$ sont telles que les restrictions à $\mathcal{P}_F$ de $\check{\sigma}'$ et σ aient un constituant commun.

Si ρ est un tel constituant, et $\mathcal{W}_K$ le stabilisateur de ρ dans $\mathcal{W}_F$, alors σ est induite de la représentation $\tilde{\rho}$ de $\mathcal{W}_K$ sur le composant ρ de $\sigma|\mathcal{P}_F$. L'extension finie K/F est modérée. De même, σ' est induite, de $\mathcal{W}_K$ à $\mathcal{W}_F$, d'une représentation irréductible $\tilde{\rho}'$ qui a $\check{\rho}$ comme restriction à $\mathcal{P}_K = \mathcal{P}_F$; par suite $\tilde{\rho}' = \chi\tilde{\rho}^\vee$, où χ est un quasicaractère modéré de $\mathcal{W}_K$. On a alors

$$\sigma \otimes \sigma' = \mathrm{Ind}_{\mathcal{W}_K}^{\mathcal{W}_F}\big(\chi\tilde{\rho} \otimes (\mathrm{Res}_{\mathcal{W}_K}^{\mathcal{W}_F} \mathrm{Ind}_{\mathcal{W}_K}^{\mathcal{W}_F} \tilde{\rho}^\vee)\big)\,.$$

On peut écrire, en omettant les indices évidents,

$$\mathrm{Res}\ \mathrm{Ind}\ \tilde{\rho}^\vee = \tilde{\rho}^\vee \oplus \tau,$$

où la restriction de τ à $\mathcal{P}_K$ est disjointe de $\check{\rho}$, d'où

$$\sigma \otimes \sigma' = \mathrm{Ind}\big((\chi\tilde{\rho} \otimes \tilde{\rho}^\vee) \oplus (\chi\tilde{\rho} \otimes \tau)\big)\,.$$

La représentation $\tilde{\rho} \otimes \tau$ a tous ses composants irréductibles sauvagement ramifiés, tandis que le seul composant irréductible modéré de $\tilde{\rho} \otimes \tilde{\rho}^\vee$ est la représentation triviale 1_K de $\mathcal{W}_K$ qui intervient avec multiplicité 1 [8] 2.1. Écrivons

$$\tilde{\rho} \otimes \tilde{\rho}^\vee = 1 \oplus A(\tilde{\rho}).$$

Il existe des éléments $c = c(\tilde{\rho} \otimes \tau, \psi_K)$ et $c' = c\big(A(\tilde{\rho}), \psi_K\big)$ de $K^\times$ tels que pour tout quasicaractère modéré η de $K^\times$, on ait

$$\begin{aligned}\varepsilon(\eta\tilde{\rho} \otimes \tau, s, \psi_K) &= \eta(c)^{-1}\varepsilon(\tilde{\rho} \otimes \tau, s, \psi_K),\\ \varepsilon\big(\eta A(\tilde{\rho}), s, \psi_K\big) &= \eta(c')^{-1}\varepsilon\big(A(\tilde{\rho}), s, \psi_K\big)\,.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}&\varepsilon\big((\chi\tilde{\rho} \otimes \tilde{\rho}^\vee)\oplus(\chi\tilde{\rho} \otimes \tau), s, \psi_K\big)\\ &\qquad= \chi(cc')^{-1}\frac{\varepsilon(\chi, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)}\varepsilon\big((\tilde{\rho} \otimes \tilde{\rho}^\vee) \oplus (\tilde{\rho} \otimes \tau), s, \psi_K\big)\,.\end{aligned}$$

Par l'inductivité en degré 0 des facteurs epsilon, on en tire

$$\frac{\varepsilon(\sigma \otimes \sigma', s, \psi)}{\varepsilon(\sigma \otimes \check{\sigma}, s, \psi)} = \chi(cc')^{-1}\frac{\varepsilon(\chi, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)}.$$

3.6

Via la correspondance de Langlands, l'identité précédente se traduit aussitôt en termes des facteurs epsilon $\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)$.

Théorème *Soient π une représentation irréductible supercuspidale totalement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F)$, et σ la représentation du groupe de Weil correspondant à π. Soient ρ un composant irréductible de la restriction de σ à $\mathcal{P}_F$, $\mathcal{W}_K$ le stabilisateur de ρ dans $\mathcal{W}_F$, et $\tilde{\rho}$ l'extension de ρ à $\mathcal{W}_K$ qui donne σ par induction. Alors il existe un élément $c_K = c_K(\pi, \check{\pi}, \psi)$ de $K^\times$ qui vérifie la condition suivante: si χ est un quasicaractère modéré de $\mathcal{W}_K$, σ' l'induite à $\mathcal{W}_F$ de $\chi\tilde{\rho}^\vee$, et π' la représentation irréductible supercuspidale de $\mathrm{GL}_n(F)$ correspondant à σ', alors on a*

$$\frac{\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \chi(c_K)^{-1} \frac{\varepsilon(\chi, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)}.$$

Corollaire 1 *Soit χ un quasicaractère modéré de $F^\times$. On a*

$$\frac{\varepsilon(\chi\pi \times \check{\pi}, s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \chi\big(\mathrm{N}_{K/F}(c_K)\big)^{-1} \frac{\varepsilon(\chi \circ \mathrm{N}_{K/F}, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)}.$$

Ce corollaire est immédiat. Le cas le plus important d'application est celui où n est une puissance de p, auquel cas $K = F$; autrement dit, c'est celui où π est sauvagement ramifiée au sens de [5]. On obtient alors:

Corollaire 2 *Soit π une représentation irréductible supercuspidale sauvagement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F)$ (où n est une puissance de p). Il existe un élément $c = c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ de $F^\times$ tel que, pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$, on ait*

$$\frac{\varepsilon(\chi\pi \times \check{\pi}, s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \chi(c)^{-1} \frac{\varepsilon(\chi, s, \psi)}{\varepsilon(1_F, s, \psi)}.$$

3.7

Le lecteur aura remarqué que, hormis le cas du corollaire 2, les conditions du théorème 3.6 ne sont pas exprimées directement en termes de π et π'. Il est cependant possible de le faire. Nous montrerons à une autre occasion que si θ est un caractère simple intervenant dans π, attaché à une strate simple $[\mathfrak{A}, r, 0, \beta]$, où $E = F[\beta]$ est totalement ramifiée de degré n sur F (ce qui traduit le fait que π est totalement ramifiée), alors l'extension K/F est isomorphe à la sous-extension modérée maximale de E/F, qui ne dépend donc pas, à isomorphisme près, du choix de la strate. Si nous identifions ces deux extensions et que nous choisissons une représentation irréductible Λ de $E^\times J^1(\beta, \mathfrak{A})$ (avec les notations de [12] section 3), contenant θ, qui induise π, alors la condition imposée à π' dans le théorème 3.6 équivaut à dire que π' est l'induite compact de la représentation $\tilde{\chi} \otimes \lambda^\vee$ de $E^\times J^1(\beta, \mathfrak{A})$, où $\tilde{\chi}$ est le quasicaractère de $E^\times J^1(\beta, \mathfrak{A})$ trivial sur $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ et donné par $\chi \circ \mathrm{N}_{E/F}$ sur $E^\times$. Traduisant le théorème 3.6 en ces termes, nous obtenons une variante énoncée et démontrée directement au section 6. Nous y montrons en fait comment $c_K(\pi, \check{\pi}, \psi)$ est déterminé à partir de β et θ. Cela donne *ipso facto* une démonstration directe des corollaires, et en particulier du corollaire 2.

3.8

Dans le cas où π est sauvagement ramifiée, l'élément $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ est invariant par extension modérée.

Proposition *Soient π une représentation irréductible supercuspidale sauvagement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F)$ (où n est une puissance de p), et soit σ la représentation correspondante du groupe de Weil-Deligne. Soient K une extension finie modérée de F dans $\bar{F}$, σ_K la restriction de σ à $\mathcal{W}_K$ et π_K la représentation correspondante de $\mathrm{GL}_n(K)$. Alors π_K est supercuspidale sauvagement ramifiée et on a*

$$c(\pi_K, \check{\pi}_K, \psi_K) \equiv c(\pi, \check{\pi}, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

En effet, on a alors $\sigma \otimes \check{\sigma} = 1_F \oplus A(\sigma)$, où $A(\sigma)$ est sans constituant modéré, d'où $\sigma_K \otimes \check{\sigma}_K = 1_K \oplus A(\sigma)_K$, $A(\sigma)_K$ étant également sans constituant modéré. Par le corollaire 2.2, on a donc

$$c\big(A(\sigma)_K, \psi_K\big) \equiv c\big(A(\sigma), \psi\big) \pmod{\mathbf{U}_K^1},$$

ce qui donne le résultat.

Au section 7, nous donnons une démonstration directe d'un résultat analogue, où π_K désigne la représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ obtenue par le changement de base modéré de [5]. Si F est de caractéristique nulle, et K cyclique sur F, cette représentation ne peut différer de celle de la proposition que par torsion par un caractère non ramifié, de sorte que le résultat du section 7 équivaut à celui de la proposition. En toute caractéristique, nous comptons utiliser le résultat direct du section 7 pour obtenir une nouvelle preuve de la correspondance de Langlands [9].

3.9

Avant de procéder aux démonstrations directes des théorèmes 3.2, 3.4, 3.6 et de la proposition 3.8, il est commode de régler ici la dépendance en ψ des quantités $c(\pi, \pi', \psi)$.

Pour $a \in F^\times$, notons ψ^a le caractère additif $x \mapsto \psi(ax)$ de F. On prouve alors aisément (*cf.* [22] 2.12) que si π est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$ et π' une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_{n'}(F)$, on a

$$\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi^a) = \omega_\pi^{n'} \omega_{\pi'}^{n}(a) \|a\|^{nn'(s-\frac{1}{2})} \varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi),$$

ω_π étant le quasicaractère central de π, $\omega_{\pi'}$ celui de π'. Si le résultat à démontrer est vrai pour un choix de ψ, il le sera pour tous, et l'on connait la dépendance en ψ des quantités $c(\pi, \pi', \psi)$. Par exemple, dans le théorème 3.4, on obtient

$$c(\pi, \pi', \psi^a) \equiv a^{-nn'} c(\pi, \pi', \psi) \pmod{\mathbf{U}_F^1},$$

et dans le théorème 3.6

$$c_K(\pi, \check{\pi}, \psi^a) \equiv a^{1-n^2} c_K(\pi, \check{\pi}, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-043-0 Published online by Cambridge University Press

Dans toute la suite, nous pouvons donc choisir un caractère additif ψ particulier. Il sera commode alors de le choisir, comme dans [12], de niveau 1; si tel est le cas, alors pour toute extension finie modérée K de F, le caractère additif $\psi_K = \psi \circ \mathrm{Tr}_{K/F}$ est de niveau 1.

4 Facteurs epsilon de Godement-Jacquet

4.1

Dans ce paragraphe nous donnons une démonstration directe du théorème 3.2, qui apporte une précision supplémentaire.

Théorème *Soit π une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, sans constituant modéré. Il existe un élément $c = c(\pi,\psi)$ de $F^\times$ tel que, pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$, on ait*

$$\varepsilon(\chi\pi, s, \psi) = \chi(c)^{-1}\varepsilon(\pi, s, \psi).$$

Supposons ψ de niveau 1. Si π est supercuspidale et si θ est un caractère simple intervenant dans π, attaché à une strate simple $[\mathfrak{A}, r, 0, \beta]$, alors on peut prendre $c = \det\beta$.

Nous obtenons aussi une version plus précise du corollaire au théorème 3.2; voir ci-dessous Théorème 4.3.

4.2

Prouvons d'abord le théorème. Comme les facteurs epsilon de Godement-Jacquet [15] sont multiplicatifs pour l'induction parabolique [21] 2.7.2, ou lorsqu'on prend un quotient de Langlands *loc. cit.* Theorem 3.4, on se ramène au cas où π est essentiellement tempérée. Comme π est alors induite parabolique d'une représentation essentiellement de carré intégrable, on peut supposer que π elle-même est essentiellement de carré intégrable. Comme π est sans constituant modéré, le facteur epsilon de π est le même de celui de son support supercuspidal *loc. cit.* Proposition 3.1.3, et il en est de même de $\chi\pi$, de sorte qu'on peut supposer π supercuspidale. Par 3.9 on peut également supposer ψ de niveau 1. Il nous suffit donc de prouver la dernière assertion du théorème 4.1.

Supposons donc que π soit supercuspidale. Puisque π est sans constituant modéré, il existe une strate simple $[\mathfrak{A}, r, 0, \beta]$ dans $\mathrm{M}_n(F)$, avec $r > 0$, et un type central $\Lambda \in \mathfrak{CC}(\mathfrak{A}, \beta)$ (voir [5] section 3.1 pour cette notion) qui apparaît dans π. Notant $\mathfrak{P}$ le radical de Jacobson de l'ordre principal $\mathfrak{A}$, on a alors [5] 6.1 Lemma 2

$$\varepsilon(\pi, s, \psi) = (\mathfrak{P}^{-r} : \mathfrak{A})^{(\frac{1}{2}-s)/n} \frac{\tau(\Lambda, \beta, \psi)}{(\mathfrak{A} : \mathfrak{P}^{r+1})^{\frac{1}{2}}},$$

où τ est la somme de Gauss suivante *loc. cit.* 6.1.1

$$\tau(\Lambda, \beta, \psi) = c \sum_{x \in 1+\mathfrak{P}^{r'}/1+\mathfrak{P}^{r''}} \mathrm{tr}\, \Lambda^\vee(\beta x)\psi(\mathrm{tr}\, \beta x),$$

où on a posé

$$r' = \left[\frac{r+1}{2}\right], \quad r'' = \left[\frac{r}{2}\right] + 1,$$
$$c = \frac{(\mathfrak{P}^{r''} : \mathfrak{P}^{r+1})}{\dim \Lambda}.$$

Si χ est un quasicaractère modéré de $F^\times$, alors $\chi\pi$ contient le type central $\chi\Lambda\colon g \mapsto \chi(\det g)\Lambda(g)$ de $\mathcal{CC}(\mathfrak{A}, \beta)$, et on a

$$\tau(\chi\Lambda, \beta, \psi) = c \sum_x \operatorname{tr}(\chi\Lambda)^\vee(\beta x)\psi(\operatorname{tr} \beta x).$$

Comme $\chi(\det x)$ vaut 1 pour $x \in 1+\mathfrak{P}^{r'}$, on obtient bien

$$\tau(\chi\Lambda, \beta, \psi) = \chi(\det \beta)^{-1}\tau(\Lambda, \beta, \psi),$$

d'où le résultat avec $c(\pi, \psi) = \det \beta$.

Théorème 4.3 *Supposons F de caractéristique nulle. Soit π une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$, sans constituant modéré. Soit K une extension modérée cyclique de F; notons π_K la représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ obtenue par changement de base de F à K. Alors π_K est sans constituant modéré et on a*

$$c(\pi_K, \psi_K) \equiv c(\pi, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

Prouvons d'abord la première assertion. Comme le changement de base est compatible aux quotients de Langlands, à l'induction parabolique irréductible et à la construction de séries discrètes à partir de représentations supercuspidales [1] I section 6, on se ramène aussitôt au cas où π est supercuspidale. Dire que π est sans constituant modéré signifie alors que l'exposant d'Artin $a(\pi)$ de π est strictement plus grand que n. Grâce au comportement des facteurs epsilon lors d'un changement de base on a [1] I Proposition 6.9

$$\sum_\chi a(\chi\pi) = f(K|F)\Big(a(\pi_K) + n\big(e(K|F) - 1\big)\Big), \tag{4.3.1}$$

où χ parcourt les caractères de $F^\times$ triviaux sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$, et où $f(K|F)$, $e(K|F)$ désignent le degré d'inertie et l'indice de ramification de l'extension K/F. La formule (4.3.1) peut encore s'écrire

$$\sum_\chi \big(a(\chi\pi) - n\big) = f(K|F)\big(a(\pi_K) - n\big).$$

On a $a(\pi) > n$ par hypothèse et, de toutes façons, $a(\chi\pi) \geqslant n$ pour tout χ, puisque π est supercuspidale. On obtient donc $a(\pi_K) > n$. Si π_K est supercuspidale, π_K est donc sans constituant modéré.

Supposons donc que π_K ne soit pas supercuspidale. Sans restreindre la généralité, on peut supposer, par transitivité, que K est de degré premier sur F. Alors π est induite automorphe, de K à F, d'une représentation irréductible supercuspidale τ de $\mathrm{GL}_m(K)$ où $n = m[K : F]$ (*cf.* [11] 2.6). On a alors [20] 5.6 Corollary 4(i):

$$a(\pi) = f(K|F)\Big(a(\tau) + m\big(e(K|F) - 1\big)\Big),$$

ce qui s'écrit encore

$$a(\pi) - n = f(K|F)\big(a(\tau) - m\big).$$

Comme on a $a(\pi) > n$, on obtient $a(\tau) > m$. Mais π_K est, par [11] 2.6, l'induite parabolique de la représentation $\bigotimes_g \tau^g$, où g parcourt $\mathrm{Gal}(K/F)$, et on a $a(\tau^g) = a(\tau) > m$ pour tout g. Par suite, π_K est sans constituant modéré.

4.4

Prouvons maintenant la seconde assertion du théorème 4.3. Sachant que π_K est sans constituant modéré, on se ramène aussitôt, comme pour le théorème 4.1, au cas où π est supercuspidale. Bien sûr on peut supposer, comme précédemment, que le degré d de K sur F est premier.

Supposons dans un premier temps que π soit induite automorphe d'une représentation irréductible supercuspidale τ de $\mathrm{GL}_m(K)$, où $n = md$; on a alors (*cf.* [20] 5.6 Corollary 4(i))

$$\frac{\varepsilon(\chi\pi, s, \psi)}{\varepsilon(\pi, s, \psi)} = \frac{\varepsilon\big((\chi \circ \mathrm{N}_{K/F})\tau, s, \psi_K\big)}{\varepsilon(\tau, s, \psi_K)}.$$

On peut donc prendre

$$c(\pi, \psi) = \mathrm{N}_{K/F}\big(c(\tau, \psi_K)\big)$$

(d'après 4.3, τ est sans constituant modéré, d'où l'existence de $c(\tau, \psi_K)$).

Mais d'autre part π_K est l'induite parabolique de $\bigotimes_g \tau^g$, g parcourant $\mathrm{Gal}(K/F)$ et on peut donc prendre

$$\begin{aligned} c(\pi_K, \psi_K) &= \prod_g c(\tau^g, \psi_K) = \prod_g c(\tau, \psi_K)^g \\ &= \mathrm{N}_{K/F}\big(c(\tau, \psi_K)\big), \end{aligned}$$

d'où la congruence $c(\pi_K, \psi_K) \equiv c(\pi, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}$.

4.5

Traitons maintenant le cas complémentaire où π_K est supercuspidale. On suppose (3.9) que ψ est de niveau 1.

Supposons dans un premier temps que π soit totalement ramifiée. Si θ est un caractère simple, attaché à une strate simple $[\mathfrak{A}, r, 0, \beta]$, qui intervient dans π, on a vu plus haut qu'on peut prendre $c(\pi, \psi) = \det \beta$. Mais d'après [4] 14.21, π_K contient le caractère simple θ_K obtenu par changement de base de θ, caractère qui est attaché à une strate simple $[\mathfrak{A}_K, r_K, 0, \beta]$, où β est vu cette fois comme un élément de $\mathrm{GL}_n(K)$. On peut donc prendre $c(\pi_K, \psi_K) = \det\beta$ d'où la congruence

$$c(\pi_K, \psi_K) \equiv c(\pi, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

Si π n'est pas nécessairement totalement ramifiée, il existe une extension finie non ramifiée L de F et une représentation irréductible supercuspidale totalement ramifiée τ de $\mathrm{GL}_m(L)$ (où $m[L : F] = n$) telle que π soit l'induite automorphe de τ. Comme en 4.4, on peut prendre $c(\pi, \psi) = \mathrm{N}_{L/F}\big(c(\tau, \psi_L)\big)$.

Puisque par hypothèse π_K est supercuspidale, les extensions L et K de F sont linéairement disjointes. Si τ_{LK} est le changement de base de τ à LK, alors τ_{LK} est supercuspidale et π_K est induite automorphe de τ_{LK}, dans l'extension cyclique LK/K. On peut donc prendre $c(\pi_K, \psi_K) = \mathrm{N}_{LK/K}\big(c(\tau_{LK}, \psi_{LK})\big)$. Mais, par le cas totalement ramifié déjà traité, on peut prendre $c(\tau_{LK}, \psi_{LK}) = c(\tau, \psi_L)$, d'où la congruence

$$c(\pi_K, \psi_K) \equiv c(\pi, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

4.6

Revenons pour un instant au cas où F n'est pas nécessairement de caractéristique nulle, mais où l'on suppose que π est une représentation irréductible supercuspidale *sauvagement ramifiée* de $\mathrm{GL}_n(F)$ (de sorte que n est une puissance de la caractéristique résiduelle p de F).

Soit K une extension finie modéré de F, pas nécessairement galoisienne. Nous avons défini dans [5] le changement de base modéré π_K de π, qui est une classe de représentations irréductibles supercuspidales sauvagement ramifiées de $\mathrm{GL}_n(K)$. Si F est de caractéristique nulle et K cyclique de degré premier ℓ sur F, π_K coïncide avec le changement de base donné par [1] si ℓ est distinct de p, tandis que pour $\ell = p$, elle n'en diffère que par la torsion par un caractère non ramifié.

En tout cas, le raisonnement de 4.5 s'applique directement en toute caractéristique, quand π est sauvagement ramifiée. En effet, fixons un caractère simple θ, attaché à une strate simple $[\mathfrak{A}, r, 0, \beta]$ de $\mathrm{GL}_n(F)$, apparaissant dans π. Alors, si K est une extension finie modérée de F, la représentation obtenue par changement de base de π contient par construction un caractère simple θ_K attaché à une strate simple $[\mathfrak{A}_K, r_K, 0, \beta]$ faisant intervenir le même élément β, vu dans $\mathrm{GL}_n(K)$. On a donc obtenu:

Théorème *Soit π une représentation irréductible supercuspidale sauvagement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F)$ (où n est une puissance de p). Soit K une extension finie modérée de F, et soit π_K la représentation irréductible supercuspidale sauvagement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(K)$ obtenue à partir de π, par changement de base modéré. Alors on a*

$$c(\pi_K, \psi_K) \equiv c(\pi, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

5 Facteurs epsilon de paires, I

5.1

Dans ce paragraphe, nous donnons une démonstration directe du théorème 3.4. Rappelons-en l'énoncé.

Théorème *Soit π une représentation irréductible supercuspidale totalement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F)$, et soit π' une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_{n'}(F)$, avec $n' < n$. Il existe un élément $c = c(\pi, \pi', \psi)$ de $F^\times$ tel que, pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$, on ait*

$$\varepsilon(\chi\pi \times \pi', s, \psi) = \chi(c)^{-1}\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi).$$

Remarques (1) Si l'on prend $n' = 1$, π' la représentation triviale de $F^\times$, on retrouve un cas particulier du théorème 4.1, dont il serait facile de déduire le cas général; mais le théorème 4.1 est *utilisé* dans la preuve qui suit, parce qu'on se ramène à $n' = n-1$.

(2) L'identité du théorème détermine $c(\pi, \pi', \psi)$ modulo $\mathbf{U}^1_F$.

(3) Si η est un quasicaractère modéré de $F^\times$, on obtient aussitôt

$$c(\eta\pi, \pi', \psi) \equiv c(\pi, \eta\pi', \psi) \equiv c(\pi, \pi', \psi) \pmod{\mathbf{U}^1_F}.$$

(4) Si $\tau\colon F' \to F$ est un isomorphisme topologique de corps locaux non archimédiens, et si pour chaque entier $n \geqslant 1$ on note aussi τ, par abus, l'isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(F')$ sur $\mathrm{GL}_n(F)$ qu'on en déduit, alors on a

$$c(\pi \circ \tau, \pi' \circ \tau, \psi \circ \tau) \equiv \tau^{-1}c(\pi, \pi', \psi) \pmod{\mathbf{U}^1_{F'}}.$$

En particulier, si F est une extension galoisienne finie d'un sous-corps F_0 et que ψ et les classes d'isomorphisme de π et π' sont invariants par $\mathrm{Gal}(F/F_0)$ alors $c(\pi, \pi', \psi)$, vu comme élément de $F^\times/\mathbf{U}^1_F$, est invariant par $\mathrm{Gal}(F/F_0)$. Si l'extension F/F_0 est modérée, $c(\pi, \pi', \psi)$ appartient donc à $F_0^\times/\mathbf{U}^1_{F_0}$; dans le cas général $c(\pi, \pi', \psi)^{p^\alpha}$ appartient à $F_0^\times/\mathbf{U}^1_{F_0}$ pour α entier assez grand (*cf.* [18]).

5.2

On peut préciser la remarque précédente, quand F est de caractéristique nulle et que K est une extension cyclique modérée de F. Prenons pour π une représentation irréductible supercuspidale totalement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F)$, telle que la représentation π_K obtenue par changement de base cyclique de F à K soit encore supercuspidale totalement ramifiée; c'est le cas, *e.g.*, si K est non ramifiée sur F ou si π est sauvagement ramifiée. Si π' est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_{n'}(F)$, avec $n' < n$, et π'_K le changement de base de π', on a $c(\pi_K, \pi'_K, \psi_K) \in F^\times/\mathbf{U}^1_F$ d'après la remarque ci-dessus. Mais si χ est un quasicaractère modéré de $F^\times$ et qu'on note χ_K le quasicaractère $\chi \circ \mathrm{N}_{K/F}$ de $K^\times$, on a ([20] 5.6 Corollary 4(ii))

$$\frac{\varepsilon(\chi_K\pi_K \times \pi'_K, s, \psi_K)}{\varepsilon(\pi_K \times \pi'_K, s, \psi_K)} = \prod_\eta \frac{\varepsilon(\chi\eta\pi \times \pi', s, \psi)}{\varepsilon(\eta\pi \times \pi', s, \psi)},$$

où η parcourt le groupe des caractères de $F^\times$ triviaux sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$; en particulier, on a

$$\chi_K\big(c(\pi_K,\pi'_K,\psi_K)\big) = \chi\big(c(\pi,\pi',\psi)\big)^d,$$

avec $d = [K:F]$, d'où

$$c(\pi_K,\pi'_K,\psi_K) \equiv c(\pi,\pi',\psi)\xi \pmod{\mathbf{U}_F^1},$$

où ξ est une racine d-ème de l'unité dans F. Si d est une puissance de p, de sorte que K est non ramifiée sur F, on a donc

$$c(\pi_K,\pi'_K,\psi_K) \equiv c(\pi,\pi',\psi) \pmod{\mathbf{U}_F^1}.$$

Si π et π' sont des représentations supercuspidales sauvagement ramifiées, on peut remplacer π_K, π'_K, dans les considérations précédentes, par les représentations obtenues par changement de base modéré de F à K [5]: en effet ces dernières représentations ne diffèrent de π_K, π'_K que par torsion par des caractères non ramifiés.

5.3

Passons à la démonstration du théorème 5.1. Considérons donc les représentations π et π' du théorème. Par multiplicativité des facteurs epsilon de paires lorsqu'on prend des quotients de Langlands [22] 3.1 and 9.5, on se ramène aussitôt au cas où π' est essentiellement tempérée, et en particulier générique, ce que nous supposerons désormais.

On peut alors se ramener au cas où $n' = n-1$. En effet, choisissons des caractères non ramifiés $\chi'_{n'+1},\dots,\chi'_{n-1}$ de $F^\times$ et notons π'' la représentation lisse de $\mathrm{GL}_{n-1}(F)$ obtenue par induction parabolique de $\pi' \otimes \chi'_{n'+1} \otimes \cdots \otimes \chi'_{n-1}$. Pour un choix des χ'_i, cette induite est irréductible [24] Theorem 3.2, donc générique, et on a

$$\varepsilon(\chi\pi\times\pi'',s,\psi) = \varepsilon(\chi\pi\times\pi',s,\psi)\prod_{i=n'+1}^{n-1}\varepsilon(\chi\chi'_i\pi,s,\psi)$$

pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$.

Grâce aux résultats du section 4, établir le théorème pour $\pi\times\pi'$ revient à l'établir pour $\pi\times\pi''$.

5.4

Nous supposons donc maintenant que π' est une représentation lisse irréductible générique de $\mathrm{GL}_{n-1}(F)$. Il nous faut rappeler l'équation fonctionnelle qui permet de définir le facteur epsilon $\varepsilon(\pi\times\pi',s,\psi)$.

Pour l'instant, nous supposons simplement que π est une représentation lisse irréductible générique de $\mathrm{GL}_n(F)$.

Pour W dans le modèle de Whittaker $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ de π, et W' dans le modèle de Whittaker $\mathcal{W}(\pi',\bar\psi)$, on pose

$$\Psi(s,W,W') = \int W\left(\begin{smallmatrix} g & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) W'(g)\|\det g\|^{s-\frac12}\,dg.$$

L'intégrale porte sur $U_{n-1} \setminus G_{n-1}$, où G_{n-1} est le groupe $\mathrm{GL}_{n-1}(F)$, U_{n-1} son sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes, et où dg est une mesure G_{n-1}-invariante sur $U_{n-1} \setminus G_{n-1}$. Par [22] Theorem 2.1, chacune des intégrales Ψ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand, et définit une fonction rationnelle de q^{-s}. Il sera commode d'avoir un point de vue légèrement différent. Notons υ la valuation normalisée de F et pour $m \in \mathbb{Z}$ posons $G_{n-1}(m) = \{g \in G_{n-1} : \upsilon(\det g) = m\}$. Notons $Z(W, W')$ la série formelle

$$Z(W, W') = \sum_{m\in\mathbb{Z}} T^m q^{\frac{m}{2}} \int_{U_{n-1}\setminus G_{n-1}(m)} W \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W'(g)\, dg.$$

Le résultat précédent sur $\Psi(s, W, W')$ se traduit en disant que $Z(W, W')$ est une série de Laurent formelle en T, qui est en fait le développement d'une fraction rationnelle en T. Quand W et W' varient, ces fractions rationnelles $Z(W, W')$ engendrent un idéal fractionnaire de $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$, qui possède un générateur unique de la forme $P(T)^{-1}$ avec $P = P_{\pi\times\pi'} \in \mathbb{C}[T]$, $P(0) = 1$. On a *loc. cit.*

$$L(\pi \times \pi', s) = P_{\pi\times\pi'}(q^{-s})^{-1}.$$

Soit w_t, $t \geqslant 1$, la matrice anti-diagonale de taille t, c'est-à-dire que $(w_t)_{ij}$ vaut 1 si $i+j = t+1$ et vaut 0 sinon. Pour $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, on pose

$$\tilde{W}(g) = W(w_n {}^t g^{-1}), \quad g \in \mathrm{GL}_n(F).$$

Pour $W' \in \mathcal{W}(\pi', \bar{\psi})$, on pose

$$\tilde{W}'(h) = W'(w_{n-1} {}^t h^{-1}), \quad h \in \mathrm{GL}_{n-1}(F).$$

On a $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\check{\pi}, \bar{\psi})$ et $\tilde{W}' \in \mathcal{W}(\check{\pi}', \psi)$.

L'équation fonctionnelle *loc. cit.* peut s'énoncer en disant qu'il existe un monôme $\varepsilon(T) = \alpha T^{\beta}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}^{\times}$ et $\beta \in \mathbb{Z}$, tel qu'on ait

$$\bigl(Z(\tilde{W}, \tilde{W}')P_{\check{\pi}\times\check{\pi}'}\bigr)(1/qT) = \omega_{\pi'}(-1)^{n-1}\varepsilon(T)\bigl(Z(W, W')\, P_{\pi\times\pi'}\bigr)(T),$$
$$W \in \mathcal{W}(\pi, \psi),\ W' \in \mathcal{W}(\pi', \bar{\psi}),$$

où $\omega_{\pi'}$ est le quasicaractère central de π'. On a

$$\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi) = \varepsilon(q^{-s}).$$

5.5

Supposons maintenant, comme dans le théorème 5.1, que π soit en outre supercuspidale et totalement ramifiée. Nous supposons aussi, ce qui est loisible d'après 3.9, que le caractère additif ψ est de niveau 1. Soit θ un caractère simple apparaissant dans π, attaché à une strate simple $[\mathfrak{A}, r, 0, \beta]$ où $E = F[\beta]$ est une extension totalement ramifiée de degré n de F. Posons $H^1 = H^1(\beta,\mathfrak{A})$, $J^1 = J^1(\beta,\mathfrak{A})$, $\mathbf{J} = E^\times J^1(\beta,\mathfrak{A})$, avec les notations de [12] Chapter 3.

Il existe un sous-groupe unipotent maximal U de $G = \mathrm{GL}_n(F)$ tel que $\psi_\beta\colon x \mapsto \psi\circ \mathrm{tr}\big(\beta(x-1)\big)$ définisse un caractère non dégénéré de U [6] 2.1. Par [6] 2.9, il existe un caractère θ_β de $\mathcal{U} = H^1(J\cap U)$ qui vaut θ sur H^1 et ψ_β sur $U\cap \mathbf{J} = U\cap J^1$. On sait [6] Corollary 3.5 qu'il existe une unique fonction $W_\pi \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ telle que $W_\pi(1) = 1$ et $W_\pi(gh) = W_\pi(g)\theta_\beta(h)$, pour $g\in G$ et $h\in\mathcal{U}$. Le support de W_π est l'union des doubles classes $U\mathcal{U}x\mathcal{U}$, où $\mathcal{U}x\mathcal{U}$ parcourt les doubles classes de $\mathcal{U}$ dans $\mathbf{J}$ qui entrelacent le caractère θ_β de $\mathcal{U}$.

Quitte à conjuguer β à l'intérieur de G, nous supposerons que U est le sous-groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures et que ψ_β est le caractère standard ψ_{st} de U:

$$\psi_{\mathrm{st}}(u_{ij}) = \psi(u_{12}+u_{23}+\cdots+u_{n-1,n}).$$

5.6

Les translatés $\pi(h)W_\pi$, quand h parcourt $G = \mathrm{GL}_n(F)$, engendrent $\mathcal{W}(\pi,\psi)$; par suite, il existe $h\in G$ et $W'\in\mathcal{W}(\pi',\bar\psi)$ tels que $Z(\pi(h)W_\pi, W')$ soit non nul. Regardons les intégrales définissant les coefficients de la série $Z(\pi(h)W_\pi, W')$; le coefficient de T^m est

$$q^{\frac{m}{2}} z_m = q^{\frac{m}{2}} \int_{U_{n-1}\backslash G_{n-1}(m)} W_\pi\left(\begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} h\right) W'(g)\,dg.$$

Lemme *Soient g_1 et g_2 des éléments de $G_{n-1}(m)$ dans le support de l'intégrale définissant z_m. Alors*

$$\det g_1 \equiv \det g_2 \pmod{\mathbf{U}_F^1}.$$

Démonstration Le support S de W_π est inclus dans $U\mathbf{J} = UE^\times J^1$. Si ϖ_E est une uniformisante de E, on a donc $S\cap G_{n-1}(m)\subset U\varpi_E^m \mathbf{U}_F J^1$. Pour $i = 1,2$, on peut écrire $\begin{pmatrix} g_i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} h = u_i\varpi_E^m\zeta_i j_i$, où $u_i\in U$, $j_i\in J^1$ et ζ_i est une racine de l'unité dans F d'ordre premier à p. Multipliant à gauche par la matrice ligne $\eta = (0,0,\dots,0,1)$, on obtient

$$\eta\varpi_E^m\zeta_1 j_1 = \eta\varpi_E^m\zeta_2 j_2 = \eta h.$$

La matrice $x = \varpi_E^m\zeta_1 j_1 j_2^{-1}\zeta_2^{-1}\varpi_E^{-m} = \zeta_1\zeta_2^{-1}\varpi_E^m j_1 j_2^{-1}\varpi_E^{-m}$ a donc 1 pour valeur propre. Mais la matrice $j = \varpi_E^m j_1 j_2^{-1}\varpi_E^{-m}$, qui appartient à J^1, est topologiquement nilpotente: on a $j^{q^\alpha}\to 1$ pour $\alpha\to+\infty$. Comme elle a $\zeta_2\zeta_1^{-1}$ comme valeur propre, on en déduit $\zeta_1 = \zeta_2$, d'où le lemme. ■

Examinons maintenant ce qui se passe quand on tord π, où π', ce qui revient au même, par un quasicaractère modéré χ de $F^\times$. Cela revient à remplacer W' par la fonction $\chi W'\colon g\mapsto \chi(\det g)W'(g)$. Notons $z_m(\chi)$ le coefficient analogue à z_m pour la série $Z(W_\pi,\chi W')$. D'après ce qui précède, on voit qu'on a $z_m(\chi) = 0$ si $z_m = 0$, et $z_m(\chi) = \chi(\det g)z_m$ si $z_m\neq 0$, g étant un élément quelconque du support de l'intégrale z_m.

5.7

On peut effectuer le même genre de raisonnement pour l'autre côté de l'équation fonctionnelle. Pour $g \in G$, on a $\big(\pi(h)W_\pi\big)\check{}(g) = W_\pi(w_n{}^t g^{-1} h)$. Le coefficient de T^m dans $Z\big((\pi(h)W_\pi)\check{}, \tilde{W}'\big)$ est

$$q^{\frac{m}{2}} \tilde{z}_m = q^{\frac{m}{2}} \int_{U_{n-1}\backslash G_{n-1}(m)} W_\pi\left(w_n \begin{pmatrix} {}^t g^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h\right) W'(w_{n-1}{}^t g^{-1})\, dg.$$

Lemme *Soient g_1, g_2 des éléments de $G_{n-1}(m)$ dans le support de l'intégrale $\tilde{z}_m$. Alors* $\det g_1 \equiv \det g_2 \pmod{\mathbf{U}_F^1}$.

Démonstration Pour $i = 1, 2$, on peut écrire $w_n \begin{pmatrix} {}^t g_i^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h = u_i j_i \varpi_E^m \zeta_i$ avec $u_i \in U$, $j_i \in J^1$, ζ_i une racine de l'unité dans F d'ordre premier à p. Cela s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w_{n-1}{}^t g_i w_{n-1} \end{pmatrix} u_i j_i \zeta_i = w_n h \varpi_E^{-m},$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w_{n-1}{}^t g_1 w_{n-1} \end{pmatrix} u_1 j_1 \zeta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w_{n-1}{}^t g_2 w_{n-1} \end{pmatrix} u_2 j_2 \zeta_2.$$

La matrice $j_1 \zeta_1 \zeta_2^{-1} j_2^{-1}$ a donc pour première colonne ${}^t(1, 0, \dots, 0)$. Comme en 5.6, ce n'est possible que $\zeta_1 = \zeta_2$, d'où le lemme. ■

On voit aussi que si on tord π ou π' par un quasicaractère modéré χ de $F^\times$, la série $Z\Big(\big(\pi(h)W_\pi\big)\check{}, \tilde{W}'\Big)$ est remplacée par la série $Z\Big(\big(\pi(h)W_\pi\big)\check{}, (\chi W')\check{}\Big)$ dont les coefficients $\tilde{z}_m(\chi)$, analogues à $\tilde{z}_m$, vérifient

$$\tilde{z}_m(\chi) = 0 \quad \text{si} \quad \tilde{z}_m = 0,$$
$$\tilde{z}_m(\chi) = \chi(\det g)^{-1} \tilde{z}_m \quad \text{si} \quad \tilde{z}_m \neq 0,$$

g étant un élément quelconque du support de l'intégrale définissant $\tilde{z}_m$.

L'existence de $c = c(\pi, \pi', \psi)$ découle immédiatement de l'équation fonctionnelle, sachant qu'en notre cas les fonctions $\mathrm{L}(\pi \times \pi', s)$ et $\mathrm{L}(\check{\pi} \times \check{\pi}', s)$ sont nécessairement triviales [22] Proposition 8.1.

6 Facteurs epsilon de paires, II

6.1

Nous prouvons ici les résultats annoncés en 3.6. Soient π une représentation irréductible supercuspidale totalement ramifiée de $G = \mathrm{GL}_n(F)$ et θ un caractère simple, attaché à une strate simple $[\mathfrak{A}, r, 0, \beta]$, qui intervient dans π. Posons $E = F[\beta]$; alors

E/F est totalement ramifiée de degré n. Nous utilisons à nouveau les notations $H^1 = H^1(\beta, \mathfrak{A})$, $J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A})$ et $\mathbf{J} = E^\times J^1$. Il existe une représentation lisse irréductible Λ de $\mathbf{J}$, dont la restriction à H^1 est isotypique de type θ, qui intervient dans π. Avec les notations de [5], on a $\Lambda \in \mathcal{CC}(\mathfrak{A}, \beta)$ et

$$\pi \cong c\text{-}\mathrm{Ind}_{\mathbf{J}}^{G} \Lambda.$$

Soient K la sous-extension modérée maximale de F dans E, et χ un quasicaractère modéré de $K^\times$. On peut définir, à partir de χ, un quasicaractère $\tilde{\chi}$ de $\mathbf{J}$ par

$$\tilde{\chi}|E^\times = \chi \circ \mathrm{N}_{E/K}, \quad \tilde{\chi}|J^1 = 1.$$

Définissons une représentation $\pi' = \check{\pi}_\chi$ irréductible supercuspidale totalement ramifiée de G par

$$\pi' = \check{\pi}_\chi = c\text{-}\mathrm{Ind}_{\mathbf{J}}^{G}(\tilde{\chi} \otimes \Lambda^\vee).$$

Le résultat à prouver est le suivant.

Théorème *Il existe un élément $c_K = c_K(\pi, \check{\pi}, \psi)$ de $K^\times$ tel que, pour tout quasicaractère modéré χ de $K^\times$, on ait*

$$\frac{\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \chi(c_K)^{-1} \frac{\varepsilon(\chi, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)},$$

où $\pi' = \check{\pi}_\chi$.

Comme en 3.6, on a les conséquences immédiates suivantes.

Corollaire 1 *Pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$, on a*

$$\frac{\varepsilon(\chi\pi \times \check{\pi}, s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \chi\big(\mathrm{N}_{K/F}(c_K)\big)^{-1} \frac{\varepsilon(\chi \circ \mathrm{N}_{K/F}, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)}.$$

Corollaire 2 *Soit π une représentation irréductible supercuspidale sauvagement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F)$ (où n est une puissance de p). Il existe un élément $c = c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ de $F^\times$ tel que, pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$, on ait*

$$\frac{\varepsilon(\chi\pi \times \check{\pi}, s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \chi(c)^{-1} \frac{\varepsilon(\chi, s, \psi)}{\varepsilon(1_F, s, \psi)}.$$

6.2

Pour $n = 1$, le théorème n'est qu'une trivialité. On suppose $n > 1$ dans la suite. Les remarques de 5.1 et 5.2 s'appliquent aussi à la situation présente, *mutatis mutandis*:

(1) Dans le théorème, $c_K(\pi, \check{\pi}, \psi)$ est bien déterminé modulo $\mathbf{U}_K^1$; dans le corollaire 2, où $K = F$, $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ est bien déterminé modulo $\mathbf{U}_F^1$.

(2) Il découle du corollaire 1 que $c_K(\pi, \check{\pi}, \psi)$ ne change pas si on remplace π par $\eta\pi$, où η est un quasicaractère modéré de $F^\times$. On peut même en fait tordre Λ par un quasicaractère modéré de $K^\times$ sans changer $c_K(\pi, \check{\pi}, \psi)$. Voir pour cela 6.12.

(3) Comme en 5.2, la quantité $c_K(\pi, \check{\pi}, \psi) \in K^\times/\mathbf{U}_K^1$ se comporte bien par transport de structure. Énonçons le résultat dans le cas le plus important du corollaire 2, où π est sauvagement ramifiée (et où $K = F$). Si τ est un isomorphisme topologique d'un corps local F' sur F, alors $\pi \circ \tau$ est une représentation irréductible supercuspidale sauvagement ramifiée, et on a

$$c(\pi \circ \tau, (\pi \circ \tau)^\vee, \psi \circ \tau) \equiv \tau^{-1} c(\pi, \check{\pi}, \psi) \pmod{\mathbf{U}_{F'}^1}.$$

En particulier, si F est une extension galoisienne finie d'un corps local F_0, et que ψ et la classe de π sont invariantes par $\mathrm{Gal}(F/F_0)$, alors $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$, vu comme élément de $F^\times/\mathbf{U}_F^1$, est lui aussi invariant. Si F/F_0 est modérée, il appartient à $F_0^\times/\mathbf{U}_{F_0}^1$.

(4) Supposons π sauvagement ramifiée, et donc $K = F$. Si la caractéristique de F est nulle, on montre comme en 5.2 que $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ est presque préservé par changement de base (à la [1]) selon une extension cyclique modérée. Mais en fait nous verrons au section 7 que si K est une extension finie modérée quelconque de F, et π_K la représentation de $\mathrm{GL}_n(K)$ obtenue par le changement de base modéré de [5], alors on a, en toute caractéristique (sauf, peut-être, dans le cas $\mathrm{car}(F) = [K : F] = p$),

$$c(\pi_K, \check{\pi}_K, \psi_K) \equiv c(\pi, \check{\pi}, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

L'invariance par le changement de base cyclique modéré à la [1], en caractéristique nulle, en découle.

6.3

Comme au section 5, la démonstration du théorème 6.1 repose sur la comparaison des équations fonctionnelles des fonctions zêta pour $\pi \times \pi'$ et $\pi \times \check{\pi}$. Il est bon de noter d'abord les facteurs L de paires, qui se calculent par [22] 8.1: on a $\mathrm{L}(\pi \times \pi', s) = 1$ si χ est ramifié; si χ est non ramifié, il s'écrit $\chi(x) = \|x\|^{s_0}$ pour un nombre complexe s_0 et $\mathrm{L}(\pi \times \pi', s)$ vaut $(1 - q^{-(s+s_0)})^{-1}$.

L'exposant d'Artin $a(\pi \times \pi')$ du couple (π, π') est défini par la relation

$$\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi_0) = q^{a(\pi\times\pi')(\frac{1}{2}-s)} \varepsilon\Big(\pi \times \pi', \frac{1}{2}, \psi_0\Big),$$

où ψ_0 est un caractère de F de niveau 0. Les calculs de [10] donnent la valeur de $a(\pi \times \pi')$, ce qui détermine la valuation de $c_K(\pi, \check{\pi}, \psi)$. On a

$$a(\pi \times \pi') = a(\pi \times \check{\pi}) \quad \text{si } \chi \text{ est non ramifié,}$$
$$a(\pi \times \pi') = a(\pi \times \check{\pi}) + 1 \quad \text{si } \chi \text{ est ramifié.}$$

6.4

Rappelons maintenant la forme exacte des équations fonctionnelles définissant les facteurs epsilon de paires. Pour l'instant, if suffit que π et π' soient des représentations lisses irréductibles génériques de $G = \mathrm{GL}_n(F)$. Plus loin nous supposerons π supercuspidale totalement ramifiée.

Sur l'espace vectoriel $\mathcal{S}(F^n)$ des applications de F^n dans $\mathbb{C}$, localement constantes et à support compact, on dispose de la transformée de Fourier $\Phi \mapsto \hat{\Phi}$ donnée par la formule

$$\hat{\Phi}(x) = \int_{F^n} \Phi(y)\psi(x^t y)\, dy, \quad x \in F^n,$$

où la mesure de Haar dy sur F^n est prise autoduale pour ψ, de sorte que l'on ait $\hat{\hat{\Phi}}(x) = \Phi(-x)$, pour $x \in F^n$.

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$, $W' \in \mathcal{W}(\pi', \bar{\psi})$ et $\Phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on pose

$$\Psi(s, W, W'; \Phi) = \int W(g)W'(g)\Phi(\eta g)\| \det g\|^s\, dg,$$

où η est le vecteur ligne $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ et où l'intégration porte sur $U\backslash G$, U désignant le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes dans $G = \mathrm{GL}_n(F)$, et dg une mesure G-invariante sur $U \backslash G$. Comme au paragraphe précédent cette intégrale converge pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand et définit une série de Laurent formelle $Z(W, W'; \Phi)$ donnée par la formule

$$Z(W, W'; \Phi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} T^m \int_{U\backslash G(m)} W(g)W'(g)\Phi(\eta g)\, dg,$$

$G(m)$ étant comme plus haut formé des $g \in G$ tels que $v(\det g) = m$.

La série $Z(W, W'; \Phi)$ est en fait le développement d'une fraction rationnelle en T. Quand W, W' et Φ varient, ces fractions rationnelles engendrent un idéal fractionnaire de $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ qui a un unique générateur de la forme $P_{\pi\times\pi'}^{-1}$, avec $P_{\pi\times\pi'} \in \mathbb{C}[T]$, $P_{\pi\times\pi'}(0) = 1$. On a $\mathrm{L}(\pi \times \pi', s) = P_{\pi\times\pi'}(q^{-s})^{-1}$.

Comme au section 5, on définit les fonctions $\tilde{W} \in \mathcal{W}(\check{\pi}, \bar{\psi})$ et $\tilde{W}' \in \mathcal{W}(\check{\pi}', \psi)$. Il existe alors un monôme $\varepsilon(T) = \alpha T^\beta$, $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, $\beta \in \mathbb{Z}$, tel que, quels que soient W, W', Φ comme plus haut, on ait

$$Z(\tilde{W}, \tilde{W}'; \hat{\Phi})(1/qT)P_{\check{\pi}\times\check{\pi}'}(1/qT) = \omega_{\pi'}(-1)^{n-1}\varepsilon(T)Z(W, W'; \Phi)(T)P_{\pi\times\pi'}(T).$$

On a

$$\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi) = \varepsilon(q^{-s}).$$

6.5

Nous supposons maintenant que nous sommes dans le contexte du théorème 6.1, dont nous adoptons les hypothèses et notations. Ainsi π est supposée supercuspidale et totalement ramifiée, et $\pi' = \check{\pi}_\chi$. Il est clair que pour prouver le théorème, on peut tordre π par un quasicaractère non ramifié; cela nous ramène aussitôt au cas où π est unitaire, ce que nous supposons désormais.

Nous supposons aussi (*cf.* 3.9) que ψ est de niveau 1. Comme en 5.5, on peut alors construire la fonction W_π dans $\mathcal{W}(\pi, \psi)$, adaptée au caractère simple θ: son support est contenu dans $UE^\times J^1$. Dans l'espace $\mathcal{W}(\check{\pi}, \bar{\psi})$ nous choisissons la fonction $\bar{W}_\pi \colon g \mapsto \overline{W_\pi(g)}$. Dans l'espace $\mathcal{W}(\pi', \bar{\psi})$ nous prendrons la fonction W' qui a

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-043-0 Published online by Cambridge University Press

même support que $\bar{W}_\pi$ et qui vaut, pour $g = uxj$ ($u \in U$, $x \in E^\times$, $j \in J^1$) dans ce support, $W'(g) = \chi \circ \mathrm{N}_{E/K}(g)\bar{W}_\pi(g)$. Il faut enfin faire un choix convenable de la fonction $\Phi \in \mathcal{S}(F^n)$.

Pour $j \in \mathbb{Z}$, nous noterons Φ_j la fonction caractéristique de $\eta + L_j$, $L_j = (\mathfrak{p}^j, \dots, \mathfrak{p}^j)$. Le support de $\hat{\Phi}_j$ est alors L_{1-j} et sur ce support, $\hat{\Phi}_j$ est, à une constante strictement positive près, la fonction $(y_1, \dots, y_n) \mapsto \psi(y_n)$.

Lemme *Pour j assez grand, la série $Z(W_\pi, \bar{W}_\pi; \Phi_j)$ est une constante strictement positive.*

Démonstration Remarquons que la matrice identité 1_n appartient au support de W_π, et qu'on a $\Phi_j(\eta 1_n) = 1$. Le coefficient d'indice 0 de la série $Z(W_\pi, \bar{W}_\pi; \Phi_j)$ est donc toujours strictement positif.

Supposons que pour une infinité d'entiers positifs j, il existe g_j tel que $W_\pi(g_j) \neq 0$, $v(\det g_j) \neq 0$ et $\eta g_j \equiv \eta \pmod{L_j}$. On peut supposer, et nous le supposons, que g_j appartient à $E^\times J^1 = \mathbf{J}$. L'ensemble des $v(\det g_j)$ est alors borné: sinon, on peut en extraire une sous-suite qui tende vers ∞ ou $-\infty$, ce qui entraîne soit $g_j \to 0$, soit $g_j^{-1} \to 0$, deux situations incompatibles avec $\eta g_j \equiv \eta \pmod{L_j}$ pour j assez grand. Il existe donc une infinité d'entiers j tels que les entiers $v(g_j)$ soient égaux. On peut alors supposer que la suite des g_j converge vers un élément g; bien sûr on a $v(\det g) \neq 0$, mais g appartient à $E^\times J^1$ et vérifie $\eta g = \eta$. Comme on a alors $g^r \to 0$ ou $g^{-r} \to 0$ quand $r \to +\infty$, on obtient une contradiction. Par suite si j est assez grand, les conditions $g \in \operatorname{supp}(W_\pi)$ et $\eta g \equiv \eta \pmod{L_j}$ impliquent $v(\det g) = 0$, d'où le résultat. ■

6.6

On peut même raffiner le résultat obtenu.

Lemme *Pour j assez grand, les conditions*

$$g \in \operatorname{supp} W_\pi \quad \textit{et} \quad \eta g \equiv \eta \pmod{L_j}$$

impliquent $g \in UJ^1$.

Démonstration En effet, écrivons $g = uxy$ avec $u \in U$, $x \in E^\times$, $y \in J^1$. Par le lemme précédent, on a $x \in \mathbf{U}_E$ et on peut donc supposer, puisque E est totalement ramifiée sur F et $\mathbf{U}_E^1 \subset J^1$, que x est une racine de l'unité dans F d'ordre premier à p. On a alors $(xy)^{q^r} \to x$ quand r tend vers $+\infty$, mais aussi $\eta g \equiv \eta xy \equiv \eta \pmod{L_j}$ d'où $\eta x \equiv \eta \pmod{L_j}$. Pour $j > 1$ cela implique $x = 1$. ■

Comme conséquence de ce lemme, nous obtenons que pour j assez grand les deux séries $Z(W_\pi, \bar{W}_\pi; \Phi_j)$ et $Z(W_\pi, W'; \Phi_j)$ sont égales à une même constante strictement positive, que nous notons z_0.

6.7

Il nous faut maintenant examiner l'autre membre de l'équation fonctionnelle. Posons $\tilde{Z}(T) = Z(\tilde{W}_\pi, \tilde{\bar{W}}_\pi; \hat{\check{\Phi}}_j)$ (pour j assez grand pour que les conditions des lemmes précédents tiennent), et notons $\tilde{z}_i$ les coefficients de $\tilde{Z}(T) = \sum_{i=i_0}^{+\infty} \tilde{z}_i T^i$.

Remarquons tout d'abord que (*cf.* 6.3) $P_{\pi\times\check{\pi}}(T)$ vaut $1 - T$. Écrivant $\varepsilon_{\pi\times\check{\pi}}(T) = \alpha T^m$ et posant $\omega = \omega_\pi(-1)^{n-1}$, on obtient, par l'équation fonctionnelle

$$(1 - T)\tilde{Z}(T) = \omega\alpha\Big(\frac{1}{qT}\Big)^m\Big(1 - \frac{1}{qT}\Big)z_0$$

d'où

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(T) &= \omega\alpha(qT)^{-1-m}\frac{qT-1}{1-T}z_0\\ &= (-\omega\alpha z_0)(qT)^{-1-m}\frac{1-qT}{1-T}\\ &= (-\omega\alpha z_0)(qT)^{-1-m}\left(1 - \frac{(q-1)T}{1-T}\right).\end{aligned}$$

Le premier coefficient non nul de $\tilde{Z}(T)$ est donc $-\omega\alpha q^{-1-m}z_0$, d'indice $\mu = -1-m$. D'autre part, on a vu [7] qu'on a $\alpha q^{-m/2} = \omega$ d'où $\omega\alpha = q^{m/2}$. Le premier coefficient non nul de $\tilde{Z}(T)$ est donc strictement négatif, tandis que les suivants sont strictement positifs.

6.8

Si l'on remplace $\check{\pi}$ par π' et $\bar{W}_\pi$ par W', on obtient une nouvelle série

$$\tilde{Z}_\chi(T) = Z(\tilde{W}_\pi, \tilde{W}'; \hat{\check{\Phi}}_j) = \sum_{i\gg-\infty} \tilde{z}_{\chi,i}T^i.$$

Comme on a $a(\pi\times\pi') = a(\pi\times\check{\pi})$ si χ est non ramifié, et $a(\pi\times\pi') = a(\pi\times\check{\pi})+1$ sinon, le facteur epsilon de $\pi\times\pi'$ est toujours donné en regardant le coefficient d'indice μ de $\tilde{Z}_\chi(T)$. Plus précisément, si χ est ramifié, on a $\varepsilon_{\pi\times\pi'}(T) = \beta T^{m+1}$ et, comme $P_{\pi\times\pi'}(T) = P_{\check{\pi}\times\check{\pi}'}(T) = 1$, l'équation fonctionnelle s'écrit

$$\tilde{Z}_\chi(T) = \omega\beta\Big(\frac{1}{qT}\Big)^{m+1}z_0$$

d'où

$$\frac{\varepsilon(\pi\times\pi', s, \psi)}{\varepsilon(\pi\times\check{\pi}, s, \psi)} = \frac{\beta}{\alpha}q^{-s} = -\frac{\tilde{z}_{\chi,\mu}}{\tilde{z}_\mu}q^{-s}.$$

Si χ est non ramifié, on a $\varepsilon_{\pi\times\pi'_\chi}(T) = \beta T^m$, mais $P_{\pi\times\pi'}(T) = \big(1-\chi(\varpi_K)T\big)$, où ϖ_K est une uniformisante quelconque de K, ainsi que $P_{\check{\pi}\times\check{\pi}'}(T) = \big(1-\chi(\varpi_K)^{-1}T\big)$. On obtient alors

$$\frac{\varepsilon(\pi\times\pi', s, \psi)}{\varepsilon(\pi\times\check{\pi}, s, \psi)} = \frac{\tilde{z}_{\chi,\mu}}{\tilde{z}_\mu}\chi(\varpi_K)^{-1}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-043-0 Published online by Cambridge University Press

6.9

Choisissons l'entier j assez grand pour que, pour tout $g \in \mathrm{supp}(\tilde{W}_\pi) \cap G(\mu)$, on ait $\hat{\Phi}_j(\eta g) \neq 0$: c'est bien sûr possible puisque $\mathrm{supp}(\tilde{W}_\pi) \cap G(\mu)$ est compact modulo U.

Déterminons d'abord l'ensemble $\mathrm{supp}(\tilde{W}_\pi) \cap G(\mu)$. Il est de la forme $\{w_n^{-1t}g^{-1} : g \in \mathrm{supp}(W_\pi) \cap G(-\mu)\}$. D'après [6] 3.4 chaque classe de $\mathbf{J}/J^1$ contient une unique double classe $\mathcal{U}x\mathcal{U}$ qui entrelace θ_β. En fait, on a $\mathcal{U}x\mathcal{U} = (U \cap J^1)x\mathcal{U}$, et le support de W_π intersecte xJ^1 en $\mathcal{U}x\mathcal{U}$ *loc. cit.* Fixons

$$x \in \mathrm{supp}(W_\pi) \cap \mathbf{J} \cap G(-\mu).$$

Désignant par C le groupe des racines de l'unité de F d'ordre premier à p, cette propriété détermine la classe $\mathcal{U}xC\mathcal{U}$ uniquement. On a donc

$$\mathrm{supp}(W_\pi) \cap G(-\mu) = U\mathcal{U}xC\mathcal{U} = UxC(x^{-1}\mathcal{U}x)\mathcal{U}.$$

Posant

$$y = w_n^{-1t}x^{-1},$$

on obtient l'égalité

$$\mathrm{supp}(\tilde{W}_\pi) \cap G(-\mu) = UyC^tV$$

où V est le groupe $x^{-1}\mathcal{U}x\mathcal{U}$.

Lemme *Le groupe V est de la forme $1 + \mathfrak{V}$, où $\mathfrak{V}$ est un $\mathfrak{o}$-réseau de $\mathrm{M}_n(F)$.*

Démonstration On sait que $J^1 = 1 + \mathfrak{J}^1$ et $H^1 = 1 + \mathfrak{H}^1$, où $\mathfrak{J}^1$ et $\mathfrak{H}^1$ sont des $\mathfrak{o}$-sous-modules de $\mathrm{M}_n(F)$, et même des $\mathfrak{o}$-réseaux dans $\mathrm{M}_n(F)$. Par suite $U \cap J^1 = 1 + \mathrm{Lie}(U) \cap \mathfrak{J}^1$, où $\mathrm{Lie}(U) \cap \mathfrak{J}^1$ est un $\mathfrak{o}$-réseau dans $\mathrm{Lie}(U)$. On sait aussi que $\mathfrak{J}^1 \cdot \mathfrak{J}^1 \subset \mathfrak{H}^1$, de sorte que $\mathcal{U} = 1 + \mathfrak{U}$ où $\mathfrak{U} = \mathrm{Lie}(U) \cap \mathfrak{J}^1 + \mathfrak{H}^1$ est un $\mathfrak{o}$-réseau. De même $x^{-1}\mathcal{U}x = 1 + x^{-1}\mathfrak{U}x$ et ainsi $(x^{-1}\mathcal{U}x) \cdot \mathcal{U} = 1 + \mathfrak{U} + x^{-1}\mathfrak{U}x$, d'où le résultat. ■

6.10

Comme U est unimodulaire, on voit que $\tilde{z}_\mu$ est, à une constante strictement positive près, donnée par la formule

$$\tilde{z}_\mu = \sum_{\zeta \in C} \int_V \rho(y\zeta^t v)\, dv,$$

où dv est une mesure de Haar sur V et où ρ désigne le caractère additif non trivial de $\mathrm{M}_n(F)$ donné par $(m_{ij}) \mapsto \psi(m_{nn})$. Puisque $\tilde{z}_\mu$ n'est pas nul, on voit que $y\zeta$ est orthogonal (pour la dualité définie par ρ) à ${}^t\mathfrak{V}$, pour au moins un choix de $\zeta \in C$. Puisque $\mathfrak{V}$ est un $\mathfrak{o}$-module, on en déduit que $y\mathfrak{o}$ est orthogonal à ${}^t\mathfrak{V}$. L'application $a \mapsto \rho(ya)$ de F dans $\mathbb{C}^\times$ est un caractère additif de F, trivial sur $\mathfrak{p}$ puisque $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{V}$, et $\tilde{z}_\mu$ vaut, à une constante strictement positive près, $\sum_{\zeta \in C} \rho(y\zeta)$. Comme on sait que $\tilde{z}_\mu$ est strictement négatif, on en déduit que $a \mapsto \rho(ya)$ n'est pas trivial sur $\mathfrak{o}$.

6.11

Remplaçons maintenant $\bar{W}_\pi$ par W'. On obtient

$$\tilde{z}_{\chi,\mu} = -\tilde{z}_\mu \sum_{\zeta\in C} \chi \circ \mathrm{N}_{E/K}(e)\chi^{-[E:K]}(\zeta)\rho(y\zeta),$$

où on a posé $x = ej$, $e \in F^\times$, $j \in J^1$. Si χ est non ramifié, on obtient

$$\tilde{z}_{\chi,\mu} = -\tilde{z}_\mu \chi\big(\mathrm{N}_{E/K}(e)\big)\,,$$

d'où

$$\frac{\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \chi\big(\mathrm{N}_{E/K}(e)\varpi_K^{-1}\big)\,.$$

Si χ est ramifié, on obtient

$$\tilde{z}_{\chi,\mu} = -\tilde{z}_\mu \chi\big(\mathrm{N}_{E/K}(e)\big)\, q^{\frac{1}{2}} G(\chi^{[E:K]}, \rho),$$

où $G(\chi^{[E:K]}, \rho)$ est la somme de Gauss

$$G(\chi^{[E:K]}, \rho) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\zeta\in C} \chi^{-[E:K]}(\zeta)\rho(x\zeta),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \chi\big(\mathrm{N}_{E/K}(e)\big)\, q^{-(s-\frac{1}{2})} G(\chi, \rho).$$

Soit $\alpha \in \mathbf{U}_K$ tel que $\rho(x\zeta) = \psi_K(\alpha\zeta^{[E:K]})$ pour $\zeta \in C$ (en notant que $[E : K]$ est une puissance de p). Si χ est ramifié, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon(\chi, s, \psi) &= \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\zeta\in C} \chi^{-1}(\zeta)\psi_K(\zeta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{\zeta\in C} \chi^{-[E:K]}(\zeta)\psi_K(\zeta^{[E:K]}) \\ &= \chi^{-[E:K]}(\alpha) G(\chi^{[E:K]}, \rho),\end{aligned}$$

et $\varepsilon(1_K, s, \psi_K) = q^{s-\frac{1}{2}}$, d'où

$$\frac{\varepsilon(\chi, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)} = q^{\frac{1}{2}-s}\chi^{-[E:K]}(\alpha) G(\chi^{[E:K]}, \rho),$$

$$\frac{\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \chi \circ \mathrm{N}_{E/K}(e/\alpha)\frac{\varepsilon(\chi, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-043-0 Published online by Cambridge University Press

Si χ est non ramifié, on a

$$\varepsilon(\chi, s, \psi_K) = q^{s-\frac{1}{2}}\chi(\varpi_K)^{-1},$$
$$\frac{\varepsilon(\chi, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)} = \chi(\varpi_K)^{-1},$$
$$\frac{\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \chi \circ \mathrm{N}_{E/K}(e)\frac{\varepsilon(\chi, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)}$$
$$= \chi \circ \mathrm{N}_{E/K}(e/\alpha)\frac{\varepsilon(\chi, s, \psi_K)}{\varepsilon(1_K, s, \psi_K)},$$

puisque α est une unité.

Formulaire Explicitons la construction des éléments $c_K(\pi, \check{\pi}, \psi)$, $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ de 6.1. Nous supposons que ψ soit de niveau 1. On commence par un élément $x \in \mathbf{J}$ de valuation

$$\upsilon(\det x) = -\mu = f(\pi \times \check{\pi}, \psi) + 1,$$

et qui entrelace le caractère θ_β. On pose $x = ej$, pour $e \in E^\times$ et $j \in J^1$. On note $y = w_n{}^t x^{-1}$.

Soit ρ le caractère additif $\big(m_{ij}\big) \mapsto \psi(m_{nn})$. Le caractère $a \mapsto \rho(ay)$ de F est trivial sur $\mathfrak{p}$, non sur $\mathfrak{o}$. Il existe donc $\alpha \in \mathbf{U}_F = C\mathbf{U}_F^1$ tel que $\rho(zy) = \psi_K(\alpha z^{[E:K]})$ pour $z \in \mathfrak{o}$. On a

$$c_K(\pi, \check{\pi}, \psi) \equiv \mathrm{N}_{E/K}(e\alpha^{-1}) \pmod{\mathbf{U}_K^1}, \tag{6.11.1}$$
$$c(\pi, \check{\pi}, \psi) \equiv \mathrm{N}_{E/F}(e\alpha^{-1}) \pmod{\mathbf{U}_F^1}.$$

6.12

Terminons en justifiant la remarque 2 de 6.2. Soit η un quasicaractère modéré de $K^\times$, et remplaçons Λ par $\tilde{\eta}\Lambda$, où $\tilde{\eta}$ est le caractère de $\mathbf{J} = E^\times J^1$ défini, à partir de η, dans le théorème. Notons π_η la représentation de $\mathrm{GL}_n(F)$ induite compacte de $\tilde{\eta}\Lambda$. Alors on a

$$c_K(\pi_\eta, (\pi_\eta)^\vee, \psi) \equiv c_K(\pi, \check{\pi}, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

En effet on constate aussitôt en reprenant les raisonnements précédents que les facteurs $\varepsilon_{\pi\times\pi'}$ et $\varepsilon_{\pi_\eta\times\pi''}$ où π'' est l'induite compacte de $(\chi\eta^{-1})\tilde{}\,\Lambda^\vee$ sont calculés par les mêmes intégrales, donc sont égaux, quel que soit le quasicaractère modéré η de $K^\times$. On a donc

$$\frac{\varepsilon(\pi \times \pi', s, \psi)}{\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, s, \psi)} = \frac{\varepsilon(\pi_\eta \times \pi'', s, \psi)}{\varepsilon(\pi_\eta \times \check{\pi}_\eta, s, \psi)}$$
$$c_K(\pi, \check{\pi}, \psi) \equiv c_K(\pi_\eta, \check{\pi}_\eta, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

7 Facteurs epsilon de paires et changement de base modéré

7.1

Dans ce paragraphe, nous prouvons que la quantité $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ est invariante par changement de base modéré, comme annoncé en 6.2.

Théorème *Soit π une représentation irréductible supercuspidale sauvagement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(F)$ (où n est une puissance de p). Soient K une extension finie modérée de F, galoisienne ou non, et π_K la représentation irréductible supercuspidale sauvagement ramifiée de $\mathrm{GL}_n(K)$ obtenue à partir de π, par le changement de base modéré.*

Supposons, quand F est de caractéristique p, que $p \nmid [K{:}F]$. Alors on a

$$c(\pi_K, \check{\pi}_K, \psi_K) \equiv c(\pi, \check{\pi}, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

Corollaire *Supposons F de caractéristique nulle, et K cyclique sur F. Si π_K' est la représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(K)$ obtenue à partir de π par le changement de base cyclique, alors π_K' est supercuspidale sauvagement ramifiée et on a*

$$c(\pi_K', \check{\pi}_K', \psi_K) \equiv c(\pi, \check{\pi}, \psi) \pmod{\mathbf{U}_K^1}.$$

En effet on sait [5] 1.8 Lemma qu'on a $\pi_K' = \chi\pi_K$ pour un caractère non ramifié χ de $K^\times$. Le corollaire découle alors du théorème et de 6.12.

Pour la démonstration du théorème, on peut supposer par transitivité que l'extension K/F est de premier degré ℓ. Considérons le cas où $\ell = p$. L'extension K/F est donc non ramifiée; d'après 6.2(2), on peut remplacer π_K par la représentation obtenue, à partir de π, par changement de base cyclique. Le résultat découle alors des raisonnements de 5.2.

Nous supposons désormais ℓ différent de p. Nous supposons aussi que ψ est de niveau 1, ce qui est loisible d'après 3.9.

7.2

Comme en 5.3 choisissons un caractère simple θ apparaissant dans π, attaché à une strate simple $[\mathfrak{A}, r, 0, \beta]$, où $E = F[\beta]$ est une extension totalement ramifiée de degré n de F. Comme la quantité $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ ne change pas si l'on tord π par un quasi-caractère modéré de $F^\times$, on voit que $c(\pi_K, \check{\pi}_K, \psi_K)$ ne dépend de π_K qu'à travers le changement de base θ_K du caractère simple θ (qui, par les constructions de [5], apparaît dans π_K); par suite, les constructions de [4] suffisent à notre propos.

7.3

La première étape est de vérifier que $c(\pi_K, \check{\pi}_K, \psi_K)$ et $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ ont même valuation dans K.

Lemme *On a $v_K\big(c(\pi_K, \check{\pi}_K, \psi_K)\big) = e(K|F)v_F\big(c(\pi, \check{\pi}, \psi)\big)$, où $e(K|F)$ désigne l'indice de ramification de l'extension K/F.*

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-043-0 Published online by Cambridge University Press

Démonstration D'après la preuve du théorème 6.1, et en particulier 6.11, on a

$$\upsilon_F\big(c(\pi, \check{\pi}, \psi)\big) = f(\pi \times \check{\pi}, \psi) + 1,$$

et le résultat découle de [5] Theorem 1.7(ii). ■

7.4

Pour aller plus loin, il nous faut maintenant rappeler de [4] section 11 la construction du caractère simple θ_K à partir de θ.

Notons L le corps $K \otimes_F E$, considéré comme F-espace vectoriel, et notons $\tilde{\mathfrak{A}}$ l'ordre principal de $\mathrm{End}_F(L)$ qui stabilise la chaîne de $\mathfrak{o}$-réseaux $\mathfrak{q}^i$ où $\mathfrak{q}$ est l'idéal maximal de l'anneau des entiers du corps L. On dispose alors des sous-groupes $\tilde{H}^1 = H^1(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})$ et $\tilde{J}^1 = J^1(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})$ de $\mathrm{Aut}_F(L)$. Le caractère simple θ se transfère en un caractère simple $\tilde{\theta}$ de $\tilde{H}^1$ attaché à la strate $[\tilde{\mathfrak{A}}, \mathrm{re}(K|F), 0, \beta]$ dans $\mathrm{End}_F(L)$. Posons $\mathfrak{C} = \tilde{\mathfrak{A}} \cap \mathrm{End}_K(L)$. L'objet $[\mathfrak{C}, \mathrm{re}(K|F), 0, \beta]$ est une strate simple sur K; en posant $H^1_K = H^1(\beta, \mathfrak{C})$, $J^1_K = J^1(\beta, \mathfrak{C})$, on a

$$H^1_K = \tilde{H}^1 \cap \mathrm{Aut}_K(L), \quad J^1_K = \tilde{J}^1 \cap \mathrm{Aut}_K(L),$$

et le changement de base θ_K de θ est donné par la restriction de $\tilde{\theta}$ à H^1_K.

En identifiant $\mathrm{End}_K(L) = K \otimes_F \mathrm{End}_F(E)$, on peut regarder $\mathrm{Aut}_F(E) = \mathrm{GL}_n(F)$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_K(L)$ (voir [4] sections 10, 11 pour les détails) de sorte que $H^1 = H^1_K \cap \mathrm{GL}_n(F)$, $J^1 = J^1_K \cap \mathrm{GL}_n(F)$ et $\theta_K | H^1 = \theta^\ell$. On remarque que la strate $[\mathfrak{A}, r, 0, \ell\beta]$ est simple, qu'on a $H^1(\ell\beta, \mathfrak{A}) = H^1$, et que le caractère θ^ℓ est simple, attaché à $[\mathfrak{A}, r, 0, \ell\beta]$.

L'ensemble $\{1, \beta, \ldots, \beta^{n-1}\}$ définit un sous-groupe unipotent maximal U_K de $\mathrm{Aut}_K(L)$ (*cf.* [6]), et on a $U_K \cap \mathrm{GL}_n(F) = U$. On peut comme en 5.5 former le groupe $\mathfrak{U}_K = (U_K \cap J^1_K) \cdot H^1_K$ et le caractère $\theta_{K,\beta}$ de $\mathfrak{U}_K$ donné par θ_K sur H^1_K et par $1{+}x \mapsto \psi_K \circ \mathrm{tr}(\beta x)$ pour $1{+}x \in U_K \cap J^1_K$.

Le point crucial est la propriété suivante, qui sera prouvée en 7.6 et au section 8.

Proposition *Soit $x \in E^\times J^1$ qui entrelace le caractère θ_β de $\mathfrak{U}$. Alors $1 \otimes x$, vu comme élément de $L^\times J^1_K$, entrelace le caractère $\theta_{K,\beta}$ de $\mathfrak{U}_K$.*

7.5

Admettons ce résultat pour l'instant. On calcule l'élément $c(\pi, \check{\pi}, \psi)$ en suivant le formulaire de 6.11, (en notant que, dans la notation du section 6, le corps K est devenu F). D'après le lemme 7.4, on peut commencer le calcul de $c(\pi_K, \check{\pi}_K, \psi_K)$ par le même élément x. On a donc des racines de l'unité α, α_K dans F, d'ordre premier à p, telles que

$$c(\pi, \check{\pi}, \psi) = \det(\alpha^{-1} e), \quad c(\pi_K, \check{\pi}_K, \psi_K) = \det(\alpha_K^{-1} e),$$

où $x = ej$ comme ci-dessus. On veut prouver $\alpha_K = \alpha$. Si ρ_K désigne le caractère $(m_{ij}) \mapsto \psi_K(m_{nn})$ de $\mathrm{M}_n(K)$ il suffit de vérifier que l'on a $\rho_K(x\zeta) = \psi_K(\alpha\zeta^n)$ pour toute racine de l'unité ζ d'ordre premier à p dans K. Mais on a

$$(\operatorname{Tr}_{K/F}\zeta)^n \equiv \operatorname{Tr}_{K/F}(\zeta^n) \pmod{\mathfrak{p}}$$

parce que n est une puissance de p, d'où

$$\psi_K(\alpha\zeta^n) = \psi\big(\alpha\operatorname{Tr}_{K/F}(\zeta^n)\big) = \psi\big(\alpha\operatorname{Tr}_{K/F}(\zeta)^n\big)$$

et cette dernière quantité vaut, par le choix de α,

$$\rho\big(x(\operatorname{Tr}_{K/F}\zeta)\big) = \rho_K(x\zeta).$$

On a donc bien $\alpha_K = \alpha$ et

$$c(\pi_K, \check{\pi}_K, \psi_K) = \mathrm{N}_{L/K}(\alpha/e) = c(\pi, \check{\pi}, \psi),$$

comme voulu. ■

7.6

Commençons la démonstration de la proposition 7.4. Rappelons que l'extension K/F est de degré premier $\ell \neq p$. Il y a deux cas, suivant que l'extension est cyclique ou non.

Dans le premier cas, nous supposons que K/F est cyclique, et posons $\Gamma = \operatorname{Gal}(K/F)$. (L'autre cas sera traité au section 8.) Le groupe Γ agit sur J^1_K et le groupe des points fixes est J^1 [4] 11.6. On a également $(H^1_K)^\Gamma = H^1$. De plus, Γ stabilise U_K et $U_K^\Gamma = U$.

Lemme 1 *On a* $\mathfrak{U}_K^\Gamma = \mathfrak{U}$.

Démonstration Bien sûr on a $\mathfrak{U}_K^\Gamma = \mathfrak{U}_K \cap J^1 \supset \mathfrak{U}$. Le quotient J^1/H^1 est un p-groupe abélien élémentaire, muni de la forme alternée $(a, b) \mapsto \theta^\ell(aba^{-1}b^{-1})$, qui est non dégénérée [12] 3.4.1. Le sous-espace défini par $\mathfrak{U}_K \cap J^1$ est totalement isotrope, et contient celui défini par $\mathfrak{U}$. Mais le sous-espace défini par $\mathfrak{U}$ est totalement isotrope maximal [6] 3.4, donc $\mathfrak{U}_K \cap J^1 = \mathfrak{U}$. ■

Notons que la restriction à $\mathfrak{U}$ de $\theta_{K,\beta}$ est le caractère θ^ℓ_β qu'on obtient à partir du caractère simple θ^ℓ attaché à la strate simple $[\mathfrak{A}, r, 0, \ell\beta]$, en l'étendant par le caractère non dégénéré $\psi_{\ell\beta}$ de U.

Soit V_K un sous-groupe fermé de J^1_K, contenant H^1_K, stabilisé par Γ, et tel que $V_K/\operatorname{Ker}\theta_K$ soit abélien. Posons $V = V_K \cap J^1 = V_K^\Gamma$.

Lemme 2 *L'application* $\chi_K \mapsto \chi = \chi_K|V$ *donne une bijection entre les ensembles suivants:*

(1) l'ensemble S_K *des caractères* χ_K *de* V_K*, stabilisés par* Γ*, et tels que* $\chi_K|H^1_K = \theta_K$*;*
(2) l'ensemble S *des caractères* χ *de* V *tels que* $\chi|H^1 = \theta^\ell$*.*

Démonstration L'application canonique $H^1/\operatorname{Ker}\theta^\ell \to H^1_K/\operatorname{Ker}\theta_K$ est bijective (*cf.* [4] 11.8). Le quotient V_K/H^1_K est un p-groupe fini abélien, et p ne divise pas l'ordre ℓ de Γ, donc l'ensemble S_K n'est pas vide. De plus, l'application canonique $V/H^1 \to V_K/H^1_K$ induit des isomorphismes

$$V/H^1 \cong (V_K/H^1_K)^\Gamma, \quad V/H^1_K \cong (V_K/H^1_K)_\Gamma,$$

où $(V_K/H^1_K)_\Gamma$ est le plus grand quotient de V_K/H^1_K sur lequel Γ agit trivialement. L'application $S_K \to S$, $\chi_K \mapsto \chi_K|V$, est donc bijective. ■

Supposons que $x \in \mathbf{J}$ entrelace le caractère θ_β de $\mathcal{U}$. Il entrelace donc le caractère θ_β^ℓ, c'est-à-dire que les caractères θ_β^ℓ, $(\theta_\beta^\ell)^x$ ont la même restriction ϑ à $\mathcal{U}\cap x^{-1}\mathcal{U}x$. Le lemme 2 donne un caractère τ de $\mathcal{U}_K\cap x^{-1}\mathcal{U}_K$, stabilisé par Γ, tel que $\tau|\mathcal{U}\cap x^{-1}\mathcal{U}x = \vartheta$. Mais τ s'étend en le caractère Γ-stable $\theta_{K,\beta}$ de $\mathcal{U}_K$ et en $\theta^x_{K,\beta}$ sur $x^{-1}\mathcal{U}_K x$. Ces deux caractères coïncident sur $\mathcal{U}\cap x^{-1}\mathcal{U}x$, qui est égal à $\mathcal{U}_K\cap x^{-1}\mathcal{U}_K x\cap J^1$, par le lemme 1. D'aprés le lemme 2, ils sont égaux sur $\mathcal{U}_K\cap x^{-1}\mathcal{U}_K x$, et l'élément x entrelace donc $\theta_{K,\beta}$. ■

8 Entrelacement et changement de base

8.1

Nous prouvons maintenant la proposition 7.4 sous l'hypothèse que l'extension K/F est totalement ramifiée de degré $\ell \neq 2$: cela inclut tous les cas où K/F n'est pas cyclique.

Choisissons une représentation lisse irréductible $(\Lambda, \mathcal{W})$ de $\mathbf{J}$ qui contient θ_β. Alors Λ est un type central, $\Lambda \in \mathcal{CC}(\beta, \mathfrak{A})$. Le caractère θ_β intervient dans Λ avec multiplicité un [6] 3.1, et de même pour $(\Lambda^\vee, \theta_\beta^\vee)$. On en déduit:

Lemme *La représentation Λ admet un unique coefficient γ tel que*

$$\gamma(1) = 1,$$

$$\gamma(k_1gk_2) = \theta_\beta(k_1k_2)\gamma(g), \quad k_i \in \mathcal{U},\ g \in \mathbf{J}. \tag{8.1.1}$$

Soit $x \in \mathbf{J}$; si $\gamma(x) \neq 0$, alors x entrelace θ_β. Inversement:

Proposition *Supposons que l'élément x de $\mathbf{J}$ entrelace θ_β. Alors $\gamma(x) \neq 0$.*

Démonstration Soit $\mathcal{H}(G,\theta_\beta)$ l'algèbre des fonctions $f\colon G \to \mathbb{C}$, de support compact, telles que $f(k_1gk_2) = \theta_\beta(k_1k_2)^{-1}f(g)$, pour $g \in G$ et $k_i \in \mathcal{U}$. Un élément $x \in G$ entrelace θ_β si et seulement si il existe $f \in \mathcal{H}(G,\theta_\beta)$ telle que $f(x) \neq 0$. Donc le support de $\mathcal{H}(G,\theta_\beta)$ est contenu dans $\mathbf{J}$.

Soit η la représentation de J^1 induite par θ_β; elle est irréductible [6] 3.4 *et seq.*; en fait η est la seule représentation irréductible de J^1, à isomorphisme près, qui contient θ. Il existe un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{H}(G,\theta_\beta) \to \mathcal{H}(G,\eta),$$

$$f \mapsto f_*,$$

tel que $\mathrm{supp}(f_*) = \mathrm{supp}(f)J^1$ (*cf.* [12] Chapter 4). Puisque le support de l'algèbre $\mathcal{H}(G,\eta)$ est contenu dans $\mathbf{J}$ qui normalise J^1, on voit qu'une fonction $f \in \mathcal{H}(G,\eta)$ à support xJ^1 est inversible. Par suite, une fonction $f \in \mathcal{H}(G,\theta_\beta)$ de support $\mathcal{U}x\mathcal{U}$ est inversible.

L'espace isotypique $\mathcal{W}^{\theta_\beta}$ est de dimension 1, et est un $\mathcal{H}(G,\theta_\beta)$-module. L'algèbre $\mathcal{H}(G,\theta_\beta)$ agit donc sur l'espace Γ des coefficients qui satisfont à (8.1.1), par l'action $(f,\delta) \mapsto \bar{f} \star \delta$, $f \in \mathcal{H}(G,\theta_\beta)$, $\delta \in \Gamma$, où $\bar{f} \colon g \mapsto f(g^{-1})$. Par suite il existe un homomorphisme χ_Λ d'algèbres de $\mathcal{H}(G,\theta_\beta)$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\bar{f} \star \gamma = \chi_\Lambda(f)\gamma$.

Supposons que $x \in \mathbf{J}$ entrelace θ_β; alors x^{-1} l'entrelace aussi. Soit $f \in \mathcal{H}(G,\theta_\beta)$ de support $\mathcal{U}x^{-1}\mathcal{U}$. Puisque f est inversible, on a $\chi_\Lambda(f) \neq 0$. Considérons la convolution

$$\bar{f} \star \gamma(x) = \int_{\mathbf{J}} \bar{f}(xy^{-1})\gamma(y)\, dy.$$

Si l'élément $y \in \mathbf{J}$ contribue à l'intégrale, on a $xy^{-1} \in \mathcal{U}x\mathcal{U} \subset xJ^1$ d'où $y \in J^1$. De plus, il entrelace θ_β, donc $y \in \mathcal{U}$. On a alors $\bar{f} \star \gamma(x) = k\bar{f}(x)$, pour $k > 0$. On déduit

$$\gamma(x) = \chi_\Lambda(f)^{-1} k \bar{f}(x) \neq 0,$$

comme voulu. ∎

8.2

On peut former la représentation Λ^ℓ de $\mathbf{J}$. À isomorphisme près, elle est déterminée par la relation des caractères

$$\mathrm{tr}\ \Lambda^\ell(x) = \mathrm{tr}\ \Lambda(x^\ell), \quad x \in \mathbf{J}.$$

La restriction de Λ^ℓ à H^1 est un multiple de θ^ℓ; le caractère θ^ℓ est simple, attaché à la strate simple $[\mathfrak{A}, r, 0, \ell\beta]$. De plus, Λ^ℓ est irréductible, d'où $\Lambda^\ell \in \mathcal{CC}(\ell\beta,\mathfrak{A})$.

Comme en 8.1, la représentation Λ^ℓ admet un unique coefficient γ^ℓ tel que $\gamma^\ell(1) = 1$ et $\gamma^\ell(k_1xk_2) = \theta^\ell_\beta(k_1k_2)\gamma^\ell(x)$, pour $x \in \mathbf{J}$ et $k_i \in \mathcal{U}$. On a aisément:

Lemme *Soit $x \in \mathbf{J}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) x entrelace θ_β;
(2) x entrelace θ^ℓ_β;
(3) $\gamma^\ell(x) \neq 0$.

8.3

La représentation Λ ci-dessus est un type central, $\Lambda \in \mathcal{CC}(\beta,\mathfrak{A})$. En [5], on a défini le changement de base Λ_K de Λ. On a $\Lambda_K \in \mathcal{CC}(\beta,\mathfrak{C})$ (notation de 7.4). (Si π est l'induite à $\mathrm{GL}_n(F)$ de Λ, alors l'induite à $\mathrm{GL}_n(K)$ de Λ_K est le changement de base de π.) La représentation Λ_K admet un unique coefficient γ_K analogue à γ.

On a [5] Proposition 10.4:

$$\Lambda_K|\mathbf{J} = \Lambda^\ell.$$

Le caractère $\theta_{K,\beta}$ intervient dans Λ_K avec multiplicité 1, de même pour θ_β^ℓ dans Λ^ℓ. On a donc $\gamma^\ell = \gamma_K|\mathbf{J}$, et la proposition 7.4 découle du lemme 8.2. ∎

Références

[1] J. Arthur and L. Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*. Ann. of Math. Studies **120**, Princeton University Press, 1989.

[2] C. J. Bushnell *Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of* GL(n). J. Reine Angew. Math. **375/376**(1987), 184–210.

[3] ———, *Gauss sums and local constants for* GL(N). In: L-functions and Arithmetic, (eds., J. Coates, M. J. Taylor), London Math. Soc. Lecture Notes **153**, Cambridge University Press, 1991, 61–73.

[4] C. J. Bushnell and G. Henniart, *Local tame lifting for* GL(n) *I: simple characters*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. **83**(1996), 105–233.

[5] ———, *Local tame lifting for* GL(n) *II: wildly ramified supercuspidals*. Astérisque **254**(1999),

[6] ———, *Supercuspidal representations of* GL$_n$*: explicit Whittaker functions*. J. Algebra **209**(1998), 270–287.

[7] ———, *Calculs de facteurs epsilon de paires pour* GL$_n$ *sur un corps local I*. Bull. London Math. Soc. **31**(1999), 534–542.

[8] ———, *Davenport-Hasse relations and an explicit Langlands correspondence*. J. Reine Angew. Math. **519**(2000), 171–199.

[9] ———, *Davenport-Hasse relations and an explicit Langlands correspondence II: twisting conjectures*. J. Th. Nombres Bordeaux **12**(2000), 309–347.

[10] C. J. Bushnell, G. Henniart and P. C. Kutzko, *Local Rankin-Selberg convolutions for* GL$_n$*: explicit conductor formula*. J. Amer. Math. Soc. **11**(1998), 703–730.

[11] ———, *Correspondance de Langlands locale pour* GL$_n$ *et conducteurs de paires*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31**(1998), 537–560.

[12] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, *The admissible dual of* GL(N) *via compact open subgroups*. Ann. of Math. Studies **129**, Princeton University Press, 1993.

[13] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*. In: Modular forms of one variable II, Lecture Notes in Math. **349**, Springer, Berlin, 501–597, 1974.

[14] P. Deligne and G. Henniart, *Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles des fonctions L*. Invent. Math. **64**(1981), 89–118.

[15] R. Godement and H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*. Lecture Notes in Math. **260**, Springer, Berlin, 1972.

[16] M. Harris and R. Taylor, *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*. Prépublication, 1999.

[17] G. Henniart, *Représentations du groupe de Weil d'un corps local*. Enseign. Math. **26**(1980), 155–172.

[18] ———, *Galois ε-factors modulo roots of unity*. Invent. Math. **78**(1984), 117–126.

[19] ———, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL$_n$ *sur un corps p-adique*. Invent. Math. **139**(2000), 439–455.

[20] G. Henniart and R. Herb, *Automorphic induction for* GL(n) *(over local non-Archimedean fields)*. Duke Math. J. **78**(1995), 131–192.

[21] H. Jacquet, *Principal L-functions of the linear group*. In: Automorphic forms, representations and L-functions, (eds., A. Borel and W. Casselman), Proc. Symposia Pure Math. (2) **33**(1979), Amer. Math. Soc., 63–87.

[22] H. Jacquet, I. Piatetskii-Shapiro and J. Shalika, *Rankin-Selberg convolutions*. Amer. J. Math. **105**(1983), 367–483.

[23] G. Laumon, M. Rapoport and U. Stuhler, *$\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence*. Invent. Math. **113**(1993), 217–338.

[24] F. Sauvageot, *Principe de densité pour les groupes réductifs*. Compositio Math. **108**(1997), 151–184.

[25] F. Shahidi, *Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for* GL(n). Amer. J. Math. **106**(1984), 67–111.

[26] J. Tate, *Number theoretic background*. In: Automorphic forms, representations and L-functions, (eds., A. Borel and W. Casselman), Proc. Symposia Pure Math. (2) **33**(1979), Amer. Math. Soc. 3–26.

Department of Mathematics
King's College
Strand, London WC2R 2LS
United Kingdom
e-mail: bushnell@mth.kcl.ac.uk

Département de Mathématiques
UMR 8628 du CNRS
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91405 Orsay cedex
France
e-mail: Guy.Henniart@math.u-psud.fr

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-043-0 Published online by Cambridge University Press