SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PERTURBÉS

GEORGES REEB

Introduction. Les systèmes différentiels dont il est question dans ce travail, sont du type suivant:

$$dy = E_\mu(y)dt. \tag{1} \qquad (\Sigma_\mu)$$

E_μ est un champ de vecteurs défini sur une variété V_{n+1} à $n + 1$ dimensions, trois fois continûment différentiable, jouissant des propriétés suivantes:

(a) *E_μ dépend du paramètre réel et positif μ ($\mu \geqslant 0$).*

(b) *Le vecteur $E_\mu(y)$ du champ E_μ, attaché au point y de V_{n+1}, est une fonction deux fois continûment différentiable du couple (y, μ).*

(c) *$E_0(y) \neq 0$ pour tout $y \in V_{n+1}$.*

(d) *Les trajectoires du champ E_0 sont fermées (et par suite homémorphes au cercle S_1). De plus elles sont les fibres d'une structure fibrée de V_{n+1}, dont la base est une variété V_n à n dimensions. L'application canonique P de V_{n+1} sur V_n est alors deux fois continûment différentiable.*

En fait les hypothèses de différentiabilité ne seront pas systématiquement explicitées dans la suite. On pourra par exemple se contenter de supposer que toutes les fonctions, variétés, etc... qui interviennent sont indéfiniment continûment différentiables.

On se propose d'étudier, *par des méthodes simples et pour la plupart classiques*, certaines propriétés des trajectoires fermées du champ E_μ pour les petites valeurs de μ. [**16**; **19**; **18**; **28**].

En faisant les hypothèses (a), (b), (c) et (d) sur le champ E_μ on peut étendre au cas d'un système à plusieurs degrés de liberté un certain nombre des résultats connus [**19**, p. 184-204] pour l'équation différentielle:

$$x'' + x = \mu f(x,x'), \tag{2}$$

ou plus généralement

$$x'' + g(x) = \mu f(x,x'). \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) comprennent comme cas particulier l'équation différentielle des oscillations de relaxation. (On remarquera que si dans (2) on donne au paramètre μ la valeur 0 ce système admet des solutions périodiques, et par conséquent vérifie les hypothèses (a), (b), (c), (d) (cf. §**2.1**).

Le chapitre II est consacré à l'étude de certains champs E_0 (possédant la

Reçu le 13 octobre, 1949; revisé le 21 février, 1951.

propriété (d)) qui se présentent souvent dans des problèmes de dynamique. Dans le cas particulier où il existe un invariant intégral du type de la dynamique, on remarque que la période est la même pour toutes les trajectoires correspondant à une valeur donnée de l'hamiltonien H. D'autres propriétés globales résultent encore de l'existence de l'invariant intégral.

Dans le chapitre III on associe au champ E_μ un champ $\tilde{E}$, défini sur la base V_n, et on étudie les relations entre les trajectoires de $\tilde{E}$ et E_μ. Il s'agit de façon plus précise de relations entre les singularités de $\tilde{E}$ et les trajectoires fermées de E_μ. L'idée essentielle peut au fond se résumer ainsi: les propriétés qualitatives des trajectoires du champ E_μ sont analogues à celles des trajectoires obtenues en se contentant d'une première approximation, [**18**]. C'est la méthode des petits paramètres de H. Poincaré.

Dans IV on suppose que le champ E_μ admet l'invariant intégral de M. Élie Cartan [**7**], et on en déduit qu'il en est de même du champ $\tilde{E}$. Les théorèmes de M. Morse [**21**] permettent alors de préciser les résultats de III [**28**].

Le dernier chapitre VI comprend quelques remarques sur l'existence de solutions périodiques de certains systèmes (Σ_μ), sous des conditions plus larges que celles des chapitres précédents.

Il a semblé utile de résumer en I certaines définitions et propriétés fréquemment utilisées par la suite.

I. Rappel de certaines propriétés et définitions

1.1. Formes différentielles extérieures (notations). Soit V_n une variété numérique. Une forme différentielle extérieure sur V_n est désignée par une lettre grecque α, ω, π, . . ; il n'est pas nécessaire de mettre en évidence le degré de la forme considérée. La loi de produit extérieur de formes extérieures est notée $\otimes$. On utilise la notation $(\alpha)^2$ pour $\alpha \otimes \alpha$, $(\alpha)^p$ pour $\alpha \otimes \alpha \otimes \ldots \otimes \alpha$, ($p$ facteurs). La différentielle extérieure d'une forme extérieure π est notée $d\pi$. L'opérateur d augmente les degrés d'une unité et jouit des propriétés suivantes

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta, dd\alpha = 0, \quad d(\lambda\alpha) = \lambda d\alpha + d\lambda \otimes \alpha$$

(où λ est une fonction numérique), etc. On dit que π est fermé si $d\pi = 0$; on dit que π est homologue à zéro, s'il existe α tel que $\pi = d\alpha$. Si V_n est compact et si α est une forme fermée de degré n qui ne s'annule en aucun point de V_n, la forme α n'est pas homologue à zéro. En effet $\int_{V'n} \alpha \neq 0$ sur une composante connexe V'_n de V_n On pourra se reporter aux ouvrages suivants: [**2**, Livre II, Chapitre III; **6**, p. 1-32] algèbre extérieure; [**6**, p. 33-44] différentation extérieure; [**3**] anneau de cohomologie de V_n. Voir aussi [**9**, p. 146-152; **7**].

1.2. Invariants intégraux et systèmes différentiels. Soit (Σ) un système différentiel ordinaire sur V_n. Si $x_i (i = 1, \ldots, n)$ sont des coordonnées locales sur V_n, le système (Σ) peut se mettre sous la forme:

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-040-1 Published online by Cambridge University Press

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Le système (Σ) définit un champ de vecteurs E ayant pour composantes X_i. D'une façon précise E est défini à un facteur numérique près; en d'autres termes le système (Σ) définit un champ de directions sur V_n. Réciproquement un champ de directions ou un champ de vecteurs E sur V_n définit un système différentiel (Σ). Soit $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$, un système complet d'intégales premières de (Σ)

DÉFINITION (a). *La forme différentielle extérieure π est un invariant intégral absolu du système différentiel (Σ) (ou du champ E) si π est une forme différentielle construite sur les différentielles $d\phi_i (i = 1, \ldots, n-1)$ dont les coefficients sont des fonctions de $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$. Un invariant intégral relatif est une forme π dont la différentielle extérieure $d\pi$ est un intégral absolu.*

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la définition (a).

THÉORÈME (a). *Soient $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \phi_n$, des coordonnées locales dans V_n, soient $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ des intégrales premières de (Σ). La transformation F: $\phi_i \to \phi_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $\phi_n \to f(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, laisse invariant tout invariant intégral absolu π de (Σ). En d'autres termes $F^*(\pi) = \pi$, où F^* est l'application transposée de F.*

Le théorème (a) permet de démontrer:

THÉORÈME (a′). *Soit F une application d'un ouvert Ω de V_n dans V_n, qui applique tout point x de Ω sur un point la trajectoire de (Σ) issue de x. Si π est un invariant intégral absolu de (Σ), alors $F^*(\pi) = \pi$.*

Soit π une forme différentielle extérieure fermée de degré deux sur V_n.

DÉFINITION (b). *On appelle classe de la forme fermée de degré deux π, le nombre entier q tel que $(\pi)^q \neq 0$ en tout point et $(\pi)^{q+1} = 0$.*

La classe de π est évidemment inférieure ou égale à $\frac{1}{2}n$.

THÉORÈME (b). *Si n est pair $(n = 2q)$ et si π est fermé et de classe q, on peut trouver des coordonnées locales $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_q, q_q$, telles que $\pi = \sum_{i=1}^{q} dp_i \otimes dq_i$; de plus on peut prendre pour p_1 une fonction arbitraire* [**6**, p. 52; **7**, p. 29; **5** p. 121-134].

THÉORÈME (c). *Soient p_i, q_i $(i = 1, \ldots, r)$ et t des coordonnées locales dans V_n $(n = 2r + 1)$. La forme extérieure $\pi = \Sigma_i dp_i \otimes dq_i - dH \otimes dt$, où H est une fonction numérique sur V_n, est fermée et est de classe r. Il existe exactement un champ de directions E pour lequel π est un invariant intégral absolu. Le système différentiel lié à E est*

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-040-1 Published online by Cambridge University Press

$$(\Sigma) \qquad \frac{dp_i}{\partial H/dq_i} = -\frac{dq_j}{\partial H/\partial p_j} = dt.$$

Si H ne dépend pas de t, alors H est une intégrale première de (Σ).

On suppose donc que H ne dépend pas de t. Le système différentiel

$$(\Sigma') \qquad \frac{dp_1}{-\partial H/dq_1} = \ldots = \frac{dp_r}{-\partial H/dq_r} = \ldots = \frac{dq_r}{\partial H/\partial p_r}, \quad H = b_0 = C^{te},$$

est défini dans le sous espace V_{n-2} de V_n d'équation $H = b_0$, t = constante. Les résultats précédents permettent de démontrer:

Théorème (d). *La forme $\pi' = \Sigma_i dp_i \otimes dq_i$ induite par π dans V_{n-2} est de classe $r - 1$, π' est un invariant intégral absolu de (Σ').*

On pourra se reporter utilement à [**6**, p. 52-58; **7**, chap. 1, 2, et 4; **5**, p. 121-134].

1.3. Variétés fibrées. Les variétés fibrées considérées dans cet article admettent presque toutes le cercle S_1 comme fibre. On rappelle que V_{n+1} est une variété fibrée de fibre S_1 et de base V_n, si V_{n+1} est muni d'une relation d'équivalence ρ telle que V_n soit l'espace quotient de V_{n+1} par ρ et si l'application canonique P de V_{n+1} sur V_n jouit de la propriété suivante:

Tout point x de V_n admet un voisinage Ω_x dont l'image réciproque $P^{-1}(\Omega_x)$ est homéomorphe au produit topologique $\Omega_x \times S_1$ de Ω_x par S_1, par un homéomorphisme ϕ; de plus si $\bar{x} \in \Omega_x$ et si pr désigne la projection canonique de $\Omega_x \times S_1$ sur Ω_x, la relation suivante est vérifiée: pr $\phi(P^{-1}(\bar{x})) = \bar{x}$.

En fait les espaces fibrés considérés dans la suite admettent une structure encore plus précise: la fibre S est isomorphe au cercle euclidien et le groupe structural de la fibration est le groupe des rotations de S. On a un espace fibré principal. Cependant ces propriétés ne seront pas utilisées dans la suite.

La théorie des variétés fibrées à trois dimensions est exposée dans [**23**]. Ce travail examine aussi le cas des fibres exceptionnelles; ce dernier cas se présente dans certains problèmes de dynamique (cf. §**2.2**). Pour la théorie générale des espaces fibrés on pourra se reporter à [**10**; **11**; **12**]; on trouvera en particulier le lemme du relèvement des homotopies dans [**11**, p. 155] (cf. §**6.4**); dans [**8**] on trouvera une théorie des classes caractéristiques. Il est peut-être utile de rappeler la définition suivante:

Définition. *Une application s de la base V_n dans V_{n+1} est une section de V_{n+1}, si s vérifie la relation $P.s$ = identité.*

II. Quelques exemples simples

2.1. Un exemple classique. L'exemple classique, certainement le plus simple, d'un système différentiel du type envisagé est l'équation du deuxième ordre:

$$(2) \qquad x'' + x = \mu f(x,x')$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-040-1 Published online by Cambridge University Press

qui pour $\mu = 0$ se réduit à

$$x'' + x = 0. \tag{4}$$

Les lignes intégrales de (4) sont représentées dans le plan des phases (x', x) par les cercles concentriques $x^2 + x'^2 =$ constante. (Ces trajectoires constituent bien une fibration du plan (x, x') auquel on a enlevé l'origine).

La même remarque s'applique au système de type plus général:

$$x'' + g(x) = \mu f(x, x') \tag{5}$$

à condition que les courbes $x'^2 + 2H(x) = C^{te}$ (où $H(x)$ est une primitive de $g(x)$) soient des orbes enveloppant l'origine.

2.2. Petits mouvements. L'étude des petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable d'un système dynamique conservatif à q degrés de liberté à liaisons holonomes sans frottement et indépendantes du temps, revient à l'intégration d'un système différentiel du type suivant:

$$dx_i = y_i dt, \qquad dy_i = -\,\omega_i^2 x_i dt \qquad (i = 1, \dots, q) \tag{6}$$

où les ω_i sont des constantes réelles non nulles.

Soit R^{2q} l'espace numérique euclidien dans lequel les (x_i, y_i) forment un système de coordonnées cartésiennes; R°_{2q} désigne l'espace R^{2q} privé de son origine. Si tous les ω_i sont égaux, les trajectoires de (6) forment une fibration de R°_{2q} dont la base est homéomorphe au produit topologique $R \times P_q(G)$ de la droite numérique R par l'espace projectif complexe $P_q(G)$ à q dimensions complexes [**2**, Livre III, chap. VIII, §4) (On remarquera en effet que l'espace numérique euclidien réel R^{2q} peut être considéré comme un espace vectoriel complexe G^q à q dimensions complexes, dans lequel les coordonnées sont: $z_i = x_i + \epsilon y_i$ $(i = 1, \dots, q;\ \epsilon^2 = -1)$. Les droites D de G^q issues de l'origine, sont représentées dans R^{2q} par des sous-espaces à 2 dimensions. Les traces S des droites D sur la sphère Σ_{2q-1}, de centre O et de rayon 1 dans R^{2q}, sont des grands cercles de Σ_{2q-1}. Les cercles S sont précisément les trajectoires de (6) sur Σ_{2q-1}. On voit donc qu'il y a une correspondance bi-univoque entre les cercles S et les droites D; mais les droites D de G^q sont précisément les points de $P_q(G)$).

Si les ω_i au lieu d'être égaux, sont proportionnels à des nombres rationnels, les trajectoires de (6) sont encore fermées; mais elles ne forment plus une fibration de R°_{2q}. En effet la condition du produit local n'est plus satisfaite Nous avons ici un exemple de structure fibrée avec fibres exceptionnelles [**23**]; en effet il existe un entier k tel que toute trajectoire de (6) possède un voisinage saturé, dont le revêtement à k feuillets est fibré (au sens usuel) par les composantes connexes des images reciproques des trajectoires de (6). On verra facilement, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans les détails, comment la suite pourrait s'appliquer à ce cas un peu plus général.

On peut aussi interpréter le système (6) comme définissant le mouvement de q oscillateurs harmoniques. Si les constantes ω_i sont proportionnelles à des nombres rationnels, le système différentiel obtenu en ajoutant au deuxième membre de (6) des termes perturbateurs correspond au problème typique de la résonance. (Les périodes fondamentales sont commensurables.)

2.3. Géodésiques d'une sphère S_q. Les géodésiques (ou grands cercles) d'une sphère euclidienne S_q, à q dimensions, sont les projections dans S_q des trajectoires d'un champ de vecteurs E_0 défini dans la variété S^*_{2q-1} des vecteurs unitaires tangents à S_q. Il est évident que les trajectoires de E_0 constituent une fibration de S^*_q dont la variété de base est homéomorphe à la variété des droites (orientées) de l'espace projectif réel P_q à q dimensions. On trouvera d'autres exemples en [**27**].

2.4. Éllipses kepleriennes. Enfin les trajectoires élliptiques d'un point matériel M attiré par un point fixe suivant la loi de Newton, constituent une fibration d'une certaine portion de l'espace des phases R^6. Le problème restreint des trois corps fournit aussi des exemples [**29**].

2.5. Quelques conséquences dues à l'existence d'un invariant intégral. Tous les exemples cités ci-dessus mettent en jeu des systèmes dynamiques admettant l'invariant intégral de M. Elie Cartan [**7**]. On remarque dans tous ces exemples que le temps nécessité pour décrire une trajectoire ne dépend que de la constante des forces vives et non de la trajectoire. Ceci est tout à fait général.

Soit (Σ_0) le système différentiel

$$dy = E_0(y)\, dt, \qquad (\Sigma_0) \tag{7}$$

où E_0 est un champ de vecteurs sur V_{n+1} vérifiant les conditions (c) et (d) de l'Introduction. On suppose que (Σ_0) admet l'invariant intégral relatif $\omega = \pi - H_0 dt$, ou π est une forme de Pfaff sur V_{n+1} et H_0 une fonction numérique sur V_{n+1}. Soit $T(y)$ le temps nécessaire pour décrire un tour sur la trajectoire issue de $y \in V_{n+1}$. Le système (Σ_0) est un système différentiel défini sur la variété produit $V_{n+1} \times R$ (où R est l'espace du paramètre t). La transformation Θ de $V_{n+1} \times R$ sur lui-même définie par les relations $y \to y$, $t \to t + T(y)$ applique chaque trajectoire de Σ_0 sur elle-même. La transformation Θ n'altère pas l'invariant intégral absolu $d\omega$ obtenu en prenant la différentielle extérieure de ω (cf. **1.2**, théorème a′). Or l'image transposée de $d\omega$ par Θ est:

$$\Theta^*(d\omega) = d\pi - dH_0 \otimes dt - dH_0 \otimes dT; \tag{8}$$

d'où on conclut que $dH_0 \otimes dT = 0$, ou encore que T est localement une fonction de H_0. En résumé on peut énoncer:

Théorème I. *Si le champ E_0 vérifie les hypothèses* (c) *et* (d) *énoncées l'Introduction, et si de plus le système différentiel* (**7**) *associé à E_0 admet un invariant intégral relatif de la forme $\omega = \pi(y, dy) - H_0(y)dt$, la période $T(x)$ nécessaire pour décrire un tour sur la trajectoire issue de x est une fonction constante sur les*

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-040-1 Published online by Cambridge University Press

composante connexes des variétés de niveau de la fonction $H_0(y)$, [**25**, p. 299; **24**, p. 125].

Si le système différentiel (**7**) admet l'invariant intégral $\omega = \pi - H_0(y)\,dt$, la fonction H_0 est une intégrale première de (**7**). On suppose que V_{n+1} et $H_0(y)$ satisfont à l'hypothèse suivante:

HYPOTHÈSE I. (1) *la forme* dH_0 *est différente de* 0 *en tout point* x *de* V_{n+1} *vérifiant* $H_0(x) = b_0$, *où* b_0 *est une constante donneé.*

(2) *La dimension* $n + 1$ *est paire*; $n + 1 = 2q$ *et* $q > 1$.

(3) *La forme* $d\pi$ *est de classe* $q = \frac{1}{2}(n + 1)$ (cf. **1.2**, définition (b)).

On peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME II. *Si le système différentiel* (**7**) *admet l'invariant intégral relatif* $\omega = \pi - H_0(y)dt$ *et si de plus on fait l'hypothèse* I, *il existe sur la sous-variété* W_{n-1} *de* V_n *d'équation* $H_0(P^{-1}(x)) = b_0$ *une forme fermée* Ω *de degré deux et de classe maximum.*

En effet soit E'_0 la restriction du champ E_0 à la sous-variété W_n de V_{n+1} d'équation $H_0(y) = b_0$. Le champ E'_0 est un champ de vecteurs sur W_n. Soit π' la forme induite par π dans W_n. La forme $d\pi$ est un invariant intégral absolu du système différentiel associe à E'_0 (cf. **1.2**, théorème (d)):

$$dy \otimes E'_0(y) = 0. \qquad (\Sigma'_0) \tag{9}$$

Par conséquent $d\pi'$ s'exprime uniquement à l'aide d'intégrales premières de (Σ'_0). Or une intégrale première ϕ de (Σ'_0) est localement de la forme $\phi = \tilde{\phi}\,.\,P$ où $\tilde{\phi}$ est une fonction sur la base W_{n-1} de W_n. Comme les fibres de W_n sont connexes, on voit que $d\pi'$ est l'image par l'application transposée P^* de P d'une forme extérieure Ω de W_{n-1}: donc $d\pi' = P^*(\Omega)$. Cette dernière relation montre que $d\Omega = 0$ et que Ω a la même classe que $d\pi'$. D'autre part $d\pi'$ est de classe $q - 1$.

On suppose dans la suite que W_n *est compact.* On déduit du théorème II un ensemble de conséquences topologiques pour la variété de trajectoires W_{n-1} et pour l'espace fibré $W_n = P^{-1}(W_{n-1})$. *Les formes fermées* Ω, $(\Omega)^2, \ldots, (\Omega)^q$, *ne sont pas homologues à zéro.* En effet $(\Omega)^q$ ne s'annule en aucun point de W_{n-1}, son intégrale étendue à W_{n-1} n'est donc pas nulle (cf, **1.1**). Par suite $(\Omega)^q$ n'est pas homologue à zéro. Il en résulte que $\Omega, \ldots, (\Omega)^q$ ne sont pas homologues à zéro. *Les nombres de Betti des dimensions paires de* W_{n-1} *ne sont donc pas nuls.*

La relation $d\pi' = P^*(\Omega)$ *montre que la variété fibrée* W_n *n'admet pas de section* (cf. **1.3**).

Cette dernière affirmation peut être demontrée facilement: soit ϕ une section de W_n; la forme induite par $P^*(\Omega)$ dans $\phi(W_{n-1})$ est identique à $\phi(\Omega)$. Cette forme n'est donc pas homologue à zéro puisque ϕ est un homéomorphisme. Mais d'autre part $P^*(\Omega) = d\pi'$ est homologue à zéro; d'où une contradition.

La relation $d\pi' = P^*(\Omega)$ montre que la classe de cohomologie de Ω est la classe caractéristique de la variété fibrée W_n [**8**].

L'avant-dernière affirmation peut être énconcée sous une forme bien plus générale: on suppose toujours que le système (Σ_0) admette l'invariant intégral relatif $\omega = \pi - H(y)dt$, et on fait toujours l'hypothèse I; mais on ne suppose plus rien les trajectoires fermées de E_0. Soit W_n la sous-variété de V_{n+1} d'équation $H(x) = b_0$. Dans ces conditions *le champ E'_0 n'admet pas de variété transversale compacte* dans W_n. (Une variété transversale de E'_0 est une variété W_{n-1} à $n - 1$ dimensions, plongée dans W_n, telle qu'en tout point y de W_{n-1} le vecteur $E_0(y)$ n'appartienne pas à l'élément de contact à $n - 1$ dimensions tangent en y à W_{n-1}). L'affirmation résulte de la constatation suivante: on suppose que la variété transversale W_{n-1} existe, la forme $d\pi$ induit dans W_{n-1} une forme extérieure fermée de degré deux et de classe q. Cette forme n'est homologue à zéro; ceci est en contradiction avec le fait que $d\pi$ est homologue à zéro.

Le dernier résultat explique la structure relativement compliquée des surfaces de section avec bords qu'on utilise pour étudier les trajectoires de la dynamique [**4**].

On remarquera que le théorème II *montre que la variété de base W_{n-1} est une variété symplectique* [**15**].

III. Propriétés Générales

3.1. Le champ $\tilde{E}$ sur V_n. Considérons le système différentiel

$$dy = E_\mu(y)dt \tag{1} \qquad (\Sigma_\mu)$$

satisfaisant aux conditions (a), (b), (c), (d) énoncées dans l'Introduction. Soit E' le champ défini dans V_{n-1} par la relation:

$$E'(y) = \left(\frac{\partial}{\partial\mu} E_\mu(y)\right)_{\mu=0}. \tag{10}$$

Soit $y = y(t)$ la solution de (7) telle que $P(y(t)) = x$. On construit le champ $\tilde{E}$ défini dans la variété de base V_n de V_{n+1} par la relation:

$$\tilde{E}(x) = \int_{S_x} P(E'(y(t)))dt \tag{11}$$

où $x \in V_n$, $S_x = P^{-1}(x)$.

3.2. L'application ψ_μ; trajectoires simplement fermées. Pour étudier les trajectoires fermées de E_μ il est naturel de suivre la méthode classique [**16**] qui consiste à utiliser une section locale de l'espace fibré V_{n+1}. A cet effet supposons V_n muni d'une subdivision simpliciale. Soit K un sous-complexe fini à n dimensions de V_n, vérifiant la condition (S) suivante:

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-040-1 Published online by Cambridge University Press

(S) *Il existe un ouvert O vérifiant $K \subset O \subset V_n$, et un homéomorphisme ϕ deux fois continûment différentiable de rang $n+1$ de $P^{-1}(O)$ sur $O \times S_1$, tel que les fibres de $P^{-1}(O)$ soient appliquées par ϕ sur les fibres de $O \times S_1$.*

Cette condition (S) est vérifiée en particulier si K est un simplexe, ou plus généralement si K est contractile en un point.

Dans ces conditions on peut introduire dans $P^{-1}(O)$ des coordonnées locales (x,θ) (où $x \in O$ et où $\theta \in S_1$ est en nombre réel défini modulo 2π).

Il existe dès lors $\mu_1 > 0$, tel que pour $\mu \leqslant \mu_1$ les trajectoires de (Σ_μ) issues des points $(x_0 \in K, 0)$ puissent être représentées paramétriquement par les équations:

$$x = \phi_\mu(\theta,x_0); \tag{12}$$

où $\phi_\mu(\theta,x_0) = \phi(\theta,x_0,\mu)$ est une fonction définie pour $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ qui vérifie $\phi(0,x_0,\mu) = x_0$.

Définition. *Une trajectoire simplement fermée de E_μ est une trajectoire qui verifie $\phi(2\pi,x_0,\mu) = x_0$.*

On vérifie que cette définition ne dépend pas des coordonnées particulières (x,θ) choisies dans $P^{-1}(O)$. Elle exprime une propriété géométrique de la trajectoire considérée. Dans la suite on ne considérera que des trajectoires simplement fermées sans s'intéresser aux trajectoires fermées d'une autre nature.

La recherche des trajectoires simplement fermées de E_μ contenues dans $P^{-1}(K)$ revient donc à la recherche des points fixes de la transformation ψ_μ de K dans O définie par:

$$\psi_\mu(x_0) = \phi(2\pi,x_0,\mu). \tag{13}$$

De plus si x_0 est un point fixe isolé de ψ_μ, on peut lui associer son indice [**1**, chap. XIV, §2 et 4; **22**, p. 327] qui est, lui aussi, un invariant.

3.3. Lemme fondamental. La suite consiste en des applications du lemme suivant (qui est classique et simple [**16**; **19**, p. 194-204], et qui met en évidence les relations entre lignes intégrales de E_μ et $\tilde{E}$):

Lemme fondamental. *On a la relation suivante:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\,\psi_\mu(x_0)\right)_{\mu=0} = \tilde{E}(x_0) \tag{14}$$

Pour démontrer ce lemme, on remarque que le système différentiel (Σ_μ) peut s'écrire (au moyen des coordonnées (x,θ) introduites dans $P^{-1}(O)$), sous la forme suivante:

$$dx = P(E_\mu(x,\theta))dt, \qquad d\theta = \mathfrak{E}_\mu(x,\theta)dt, \tag{15}$$

où $\mathfrak{E}_\mu(x,\theta)$ est la mesure algébrique de la projection du vecteur $E_\mu(x,\theta)$ sur la fibre S_x issue de (x,θ). Le système différentiel (1) peut se mettre sous la forme:

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-040-1 Published online by Cambridge University Press

$$dx = P(E_\mu)\,\frac{d\theta}{\mathfrak{E}_\mu}\,.$$

On en déduit par intégration:

(16) $$\phi_\mu(x_0,\bar\theta) = \int_0^{\bar\theta} P(E_\mu(y))\,\frac{d\theta}{\mathfrak{E}_\mu}\,, \qquad \text{où } y = (\phi_\mu(x_0,\theta);\theta).$$

Bien entendu, pour que l'intégrale du deuxième membre de (16) ait un sens il convient de choisir dans un voisinage $\mathfrak{V}x_0$ de x_0 un système de coordonnées locales (x^i) $(i = 1, \ldots, n)$.

Il est dès lors possible de dériver par rapport à μ:

(17) $$\left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial\mu}\right)_{\mu=0} = \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{\mu}\int_0^{2\pi} P(E_\mu(y))\,\frac{d\theta}{\mathfrak{E}_\mu(y)}\,, \qquad \text{où } y = (\phi_\mu,\theta).$$

$E_\mu(y)$ admet le développement limité (cf. 10):

(18) $$E_\mu(y) = E_0(y) + \mu E'(y) + \ldots,$$

qui entraîne d'ailleurs avec des notations évidentes:

(19) $$\mathfrak{E}_\mu(y) = \mathfrak{E}_0(y) + \mu\mathfrak{E}'(y) + \ldots\,.$$

En remarquant que $P(E_0(y)) = 0$, on peut donc écrire

(20) $$\left(\frac{\partial\psi_\mu}{\partial\mu}\right)_{\mu=0} = \int_0^{2\pi} P(E'(y_0))\,\frac{d\theta}{\mathfrak{E}_0(y_0)}\,, \qquad \text{où } y_0 = (x_0,\theta).$$

Le lemme résulte alors immédiatement de (20) et de l'identité suivante entre les paramètres t et θ sur la fibre $P^{-1}(x_0) = S_{x_0}$:

$$d\theta = \mathfrak{E}(y_0)dt.$$

Le lemme montre que ψ_μ admet le développement limité: $\psi_\mu(x) = \psi_0(x) + \mu\tilde{E}(x) + \ldots$ où ψ_0 est l'application identique.

3.4. Premières applications du lemme fondamental. On suppose que le complexe K (cf. **3.2**) est un simplexe à n dimensions e_i. Soit ∂e_i le bord de e_i. On suppose que le champ $\tilde{E}$ ne s'annule en aucun point de ∂e_i. Dans ces conditions on peut associer au champ $\tilde{E}$ un certain indice $I(\tilde{E}, e_i)$ [**1**, XIV, §**2** et **4**], qui est égal à la somme des indices des points singuliers de $\tilde{E}$ dans e_i (au cas où ces points sont isolés). L'indice $I(\tilde{E}, e_i)$ est parfaitement déterminé par la restriction de $\tilde{E}$ à ∂e_i.

Soit f_μ l'application de V_n dans V_n associée à l'équation:

(21) $$dx = \tilde{E}(x)d\mu.$$

(Donc $f_\mu(x_0)$, pour x_0 fixé, est la solution de (21) qui pour $\mu = 0$ prend la valeur x_0.) Soient ψ'_μ et f'_μ les restrictions de ψ_μ et f_μ à ∂e_i. On peut définir l'indice de ψ_μ et de f_μ relativement à e_i [**1**, XIV]; le lemme fondamental admet la conséquence classique:

LEMME. *Il existe* $\bar{\mu} > 0$, *tel que pour* $\mu < \bar{\mu}$ *les indices* $I(\psi'_\mu)$, $I(f'_\mu)$, $I(\tilde{E})$ *de* ψ_μ, f_μ *et* $\tilde{E}$ *relativement à* K *sont égaux* (*sous réserve toute fois que* $\tilde{E}$ *ne s'annule en aucun point de* ∂e_i).

Le lemme précédent est une conséquence immédiate du résultat suivant: les champs de vecteurs $\tilde{E}$, A_μ/μ et B_μ/μ sont égaux, à des infiniments petits par rapport à μ près; ici A_μ est défini par $A_\mu(x) = \overrightarrow{xx'}$, où $x' = \psi_\mu(x)$ et $x \in \partial e_i$, et B_μ est défini par $B_\mu(x) = \overrightarrow{xx''}$ où $x'' = f_\mu(x)$.

Le lemme fondamental et ce dernier lemme admettent les conséquences suivantes:

THÉORÈME III. *Il existe* $\bar{\mu} > 0$ *tel que pour* $\mu < \bar{\mu}$ *on ait les propriétés suivantes*:

(1) *Si toutes les trajectoires simplement fermées de* E_μ *dans* $P^{-1}(e_i)$ *sont isolées la somme de leurs indices est* $I(\tilde{E},e_i)$.

(2) *Si l'indice* $I(\tilde{E},e_i)$ *de* $\tilde{E}$ *relativement à* e_i *n'est pas nul, il existe au moins une trajectoire simplement fermée de* E_μ *dans* $P^{-1}(e_i)$.

(3) *Si* $\tilde{E}$ *ne s'annule en aucun point de* e_i *le champ* E_μ *n'a pas de trajectoires simplement fermées dans* $P^{-1}(e_i)$.

(On remarquera que $\bar{\mu}$ dépend de E' et de e_i.)

Le théorème III entraîne à son tour:

THÉORÈME IV. *Si* V_{n+1} (*et par suite* V_n) *est compact, il existe* $\mu' > 0$ (*où* μ' *dépend de* $\tilde{E}$) *tel que pour* $\mu < \mu'$ *les trajectoires de* E_μ *jouissent des propriétés suivantes*:

(a) *Si toutes les trajectoires simplement fermées de* E_μ *sont isolées, la somme de leurs indices est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré* χ *de* V_n.

(b) *Si* $\chi \neq 0$ *le champ* E_μ *admet des trajectoires simplement fermées.* (*Sous réserve toute fois que les singularités de* $\tilde{E}$ *soient isolées, ou soient des points internes des simplexes à n dimensions d'une certaine subdivision simpliciale de* V_n).

En effet soient $e_i (i = 1, \ldots, r)$ les simplexes à n dimensions d'une subdivision simpliciale de V_n telle que le bord ∂e_i de e_i ne contienne pas de points singuliers de $\tilde{E}$. Le théorème IV résulte du théorème III et de la formule $\Sigma I(\tilde{E},e_i) = \chi$. [**1**, XIV, §**4**, théorème I].

Finalement le théorème III (**3**) permet d'énoncer:

THÉORÈME V. *Soit* Δ *l'ensemble* (*fermé*) *des points singuliers de* $\tilde{E}$; *on peut supposer que* V_n *est compact. Pour tout voisinage ouvert* U *de* Δ, *il existe* $\eta > 0$ *tel que pour* $\mu < \eta$ *les trajectoires simplement fermées de* E_μ *soient contenues dans* $P^{-1}(U)$.

Soit x_0 un point singulier simple de $\tilde{E}$ (c'est à dire que les composantes $\tilde{E}_i$ de $\tilde{E}$ dans un système de coordonnées locales x_i d'origine x_0 admettent des développements limités

$$\tilde{E}_i = \sum a_{ij}x_j + \dots$$

ou a_{ij} sont des constantes dont le déterminant $D(a_{ij})$ n'est pas nul). Le lemme fondamental permet d'énoncer:

THÉORÈME VI. *Si x_0 est un point singulier simple de $\tilde{E}$ il existe $\epsilon > 0$ tel que pour $\mu < \epsilon$, le champ E_μ n'admette qu'une trajectoire simplement fermée contenue dans un voisinage convenable de $P^{-1}(x_0)$.*

L'équation $x = \psi_\mu(x)$ n'admet qu'une solution isolée au voisinage de x_0. En effet cette équation peut encore s'écrire

$$F_\mu(x) = \frac{1}{\mu}[(x - x_0) - (\psi_\mu(x) - x_0)] = 0$$

et on constate que le Jacobien de F_0 en x_0 n'est pas nul.

REMARQUE. *Si l'ensemble Δ des points singuliers de $\tilde{E}$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème* IV, *on a cependant par le lemme fondamental des renseignements intéressants sur le comportement des trajectoires de E_μ.*

Il importerait de limiter effectivement les nombres $\bar{\mu}$, η, ϵ, ... pour un champ E_μ donné. Cette question ne sera pas examinée dans ce travail. On trouvera en **5.4** une application des résultats de ce chapitre III.

IV. CAS OÙ LA SYSTÈME (Σ_μ) ADMET UN INVARIANT INTÉGRAL, [28]

4.1. Étude du champ $\tilde{E}$ dans ce cas particulier. On suppose que le système différentiel (Σ_μ) défini dans $V_{n+1} \times R$, ou R est l'espace de la variable t, admet un invariant intégral $\omega_\mu = \pi - H_\mu dt$. Ici π designe une forme de Pfaff dont la différentielle $d\pi$ est de classe maximum sur V_{n+1} (π est indépendant de μ); H_μ est une fonction numérique sur V_{n+1} dépendant du paramètre μ. Bien entendu ω_μ est supposé deux fois continûment différentiable *et $n + 1$ est supposé pair ($n + 1 = 2q$).*

On reprend les notations de (**2.5**) et on fait l'hypothèse I de **2.5** sur ω_0 et V_{n+1}. On rappelle que W_n est la variété d'équation $H_0(y) = b_0$ et que $W_{n-1} = P(W_n)$.

Au moyen d'un choix convenable de coordonnés locales (p_i,q_i) $(i = 1, \dots, q - 1)$, $p \equiv H_0$ et $\bar{q}$ dans V_{n+1}, l'invariant intégral absolu $d\omega_0$ peut s'écrire sous la forme (cf. **1.2**, théorème (b))

$$d\omega_0 = \textstyle\sum_i dp_i \otimes dq_i + dH_0 \otimes (d\bar{q} - dt) \tag{22}$$

il résulte que les fonctions p_i, q_i, H_0, $\bar{q} - t$, forment un système d'intégrales premières de (Σ_0). Les fonctions p_i, q_i, et H_0 peuvent donc être considérées comme des coordonnées locales dans V_n. La coordonnée $\bar{q}$ définit un paramétrage sur les fibres de V_{n+1}. Soit S_y la fibre de V_{n+1} contenant le point y. Si les coordonnées p_i, q_i, H_0 et $\bar{q}$ sont définies dans un voisinage $\mathfrak{V}_y$ de y, on peut étendre le paramétrage $\bar{q}$ à tout un voisinage saturé $\mathfrak{V}$ de S_y, de telle façon que $\bar{q} - t$ soit une intégrale première de $\sum_0$. Il convient de remarquer que $\bar{q}$ est défini modulo $T(y)$ (cf. **2.5**, théorème I). Les fonctions p_i, q_i, et H_0 s'étendent d'elles-mêmes à $\mathfrak{V}$ puisqu'elles sont constantes sur les fibres. Par conséquent p_i, q_i, H_0, $\bar{q} - t$ forment un système d'intégrales premières de (Σ_0) dans $\mathfrak{V}$. Il en résulte que la formule (**22**) est valable dans $\mathfrak{V}$.

On peut résumer ceci dans le lemme suivant:

LEMME 1. *Soit $x \in V_n$ et soit $S_x = P^{-1}(x)$ la fibre correspondante. On peut trouver des coordonnés locales p_i, q_i $(i = 1, \ldots, q-1)$ et H_0 dans un voisinage U_x de x, et une fonction $\bar{q}$ dans $P^{-1}(U_x)$ (définie modulo T) telles que*

(22) $$d\omega_0 = \textstyle\sum_i dp_i \otimes dq_i + dH_0 \otimes (d\bar{q} - dt).$$

CONSÉQUENCE DU LEMME 1. *le système $(\sum_\mu)$ admet l'invariant intégral $d\omega_\mu$ où:*

(23) $$d\omega_\mu = \textstyle\sum_i dp_i \otimes dq_i + dH_0 \otimes d\bar{q} - dH_\mu \otimes dt.$$

Le système Σ_μ s'écrit (dans $P^{-1}(U)$):

(24) $$\begin{aligned} dp_i &= -(\partial H_\mu/\partial q_i)\,dt, & dH_0 &= -(\partial H_\mu/\partial \bar{q})\,dt,\\ dq_i &= (\partial H_\mu/\partial p_i)\,dt, & d\bar{q} &= (\partial H_\mu/\partial H_0)\,dt. \end{aligned}$$

En d'autres termes les composantes du champ E' sont respectivement:

$$\text{sur l'axe } p_i,\ -\left(\frac{\partial^2 H_\mu}{\partial q_i \partial \mu}\right)_{\mu=0}; \qquad \text{sur l'axe } q,\ \left(\frac{\partial^2 H_\mu}{\partial \mu \partial H_0}\right)_{\mu=0};$$

$$\text{sur l'axe } q_i,\ \left(\frac{\partial^2 H_\mu}{\partial p_i \partial \mu}\right)_{\mu=0}; \qquad \text{sur l'axe } H_0,\ -\left(\frac{\partial^2 H_\mu}{\partial \mu \partial q}\right)_{\mu=0}.$$

En posant $H' = \left(\dfrac{\partial H_\mu}{\partial \mu}\right)_{\mu=0}$ on voit que les composantes du champ $\tilde{E}$ sont respectivement:

(25) $$-\int_0^T (\partial H'/\partial q_i)\,d\bar{q}, \quad \int_0^T (\partial H'/\partial p_i)\,d\bar{q}, \quad -\int_0^T (\partial H'/\partial \bar{q})\,d\bar{q} = 0$$

où l'intégration est étendue le long des fibres de V_{n+1}.

Or soit r l'une des variables p_i, q_i ou $\bar{q}$; tenant compte du théorème I du paragraphe **2.5** on peut permuter les opérations d'intégration et de dérivation ainsi:

$$\int_0^T (\partial H'/\partial r)\,d\bar{q} = \frac{\partial}{\partial r}\int_0^T H'\,d\bar{q}$$

car $\dfrac{\partial T}{\partial r} = 0$. Posons:

(26) $$\tilde{H} = \int_0^T H'\,d\bar{q}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-040-1 Published online by Cambridge University Press

Dans ces conditions $\tilde{H}$ est une fonction numérique sur V_n. Dès lors les équations différentielles de $\tilde{E}$ sont:

$$(27) \qquad dp_i = -(\partial\tilde{H}/\partial q_i)d\bar{q}, \quad dq_i = (\partial\tilde{H}/\partial p_i)d\bar{q}, \quad dH_0 = 0.$$

En résumé:

LEMME 2. *Le système* (27) *admet l'invariant intégral relatif* $\bar{\omega} = \sum_i p_i dq_i - \tilde{H}dq$ *et l'intégrale première* H_0.

Les lignes intégrales de $\tilde{E}$ sont tracées sur les variétés de niveau de la fonction H_0. Les singularités du champ $\tilde{E}$ coïncident avec les points critiques de la fonction $\tilde{H}$ (cf. (27)). La théorie de Morse [**21**] donne donc des renseignements supplémentaires sur la distribution et la nature des singularités du champ $\tilde{E}$.

Cependant (compte tenu de (26)) les points singuliers de $\tilde{E}$ dans V_n ne sont pas isolés en général. On ne peut donc pas utiliser tels quels les résultats du chapitre précédent. Mais on peut appliquer le lemme fondamental du chapitre précédent (cf. **3.3**).

Par contre si on se restreint à l'étude des trajectoires qui correspondent à une valeur donnée b_0 de la fonction H_μ les résultats antérieurs seront valables. C'est cette question qui va être examineé dans **4.2.**

4.2. Application des résultats du chapitre III. $H_0(y) = b_0$ est par suite de l'hypothèse sur H_0 en (**4.1**) l'équation d'une variété W_n à n dimensions plongée dans V_{n+1}. Si on interprète H_0 comme fonction numérique sur la base V_n de V_{n+1}, l'équation $H_0(x) = b_0$ définit une variété plongée W_{n-1} à $n-1$ dimensions dans V_n; la variété W_n est une variété fibrée de base W_{n-1} et de fibre S_1; la projection canonique associée à cette fibration est la restriction de P à W_n. *Pour simplifier l'exposé, on suppose que* W_n *est compact.*

Il existe donc un voisinage U de W_n homéomorphe au produit topologique $W_n \times I$, de W_n par un intervalle ouvert $I =]-1, +1[$ de R^1, dans un homéomorphisme h qui applique le point $y \in W_n$ sur le point $(y,0)$ de $W_n \times I$. On identifiera dans la suite $W_n \times I$ avec U.

La variété $W_{n,\mu}$ d'équation $H_\mu(y) = b_0$ admet, pour les petites valeurs de μ, la représentation paramétrique:

$$(28) \qquad \rho = \Phi(\mu,y) \qquad (\rho \in I)$$

et la fonction $\Phi(\mu,y)$ admet un développement limité par rapport à μ:

$$(29) \qquad \Phi(\mu,\rho) = \mu\Phi_0(y) + \dots .$$

L'application pr: $(y,\rho) \to y$, est un homéomorphisme de $W_{n,\mu}$ sur W_n. Soit $E_{1,\mu}$ la restriction du champ E_μ (associée à (Σ_μ)) à $W_{n,\mu}$ et soit $E_{2,\mu}$ l'image par pr de $E_{1,\mu}$. Le champ $E_{2,\mu}$ vérifie les hypothèses (a), (b), (c), (d) de l'introduction; on peut donc faire la théorie de III pour ce champ, et définir en particulier un champ $\tilde{E}_2$ sur W_{n-1} par une opération analogue à (11).

LEMME 3. *Le champ $\tilde{E}_2$ est identique à la restriction du champ $\tilde{E}$ à W_{n-1}.*

Soit $y(t)$ une solution de (Σ_0), et soit $x = P(y(t))$.

Le champ $\tilde{E}_2$ peut être obtenu par l'opération suivante (cf. (11)):

$$\tilde{E}_2(x) = \int_{Sx} P(E'_2(y(t))dt,$$

où

$$E'_2(y) = \left[\frac{d}{d\mu} \text{ pr } E_\mu(y, \Phi(\mu, y))\right]_{\mu=0}$$

$$= \text{pr } E'(y) + \left(\frac{\partial}{\partial\rho} \text{ pr } E_0(y,\rho)\right)_{\rho=0} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)_{\mu=0}.$$

Or

$$\int_{Sx} P(\text{pr } E'(y(t))dt = \int_{Sx} P(E'(y(t))dt = \tilde{E}(x). \tag{30}$$

D'autre part

$$\int_{Sx} \left(\frac{\partial}{\partial\rho} \text{ pr } E_0(y,\rho)\right)_{\rho=0} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right)_{\mu=0} dt = 0.$$

car dans le cas contraire le champ pr $E_0(y,\rho)$ n'aurait pas de trajectoires fermées au voisinage de $P^{-1}(x)$ pour les petites valeurs du paramètre μ, d'après les résultats de III (cf. théorème III (3)). Le lemme 3 est donc une conséquence immédiate de (30).

4.3. Conséquences du lemme 3. Le lemme 3 montre que pour étudier les trajectoires simplement fermées sur $W_{n,\mu}$ (c'est à dire les trajectoires simplement fermées de $\sum_\mu$ pour lesquelles H_μ prend la valeur b_0) il suffit d'étudier les singularités de la restriction $\tilde{E}_1$ du champ $\tilde{E}$ à W_{n-1}. On pourrait énoncer des théorèmes tout à fait analogues aux théorèmes III, IV, V, et VI; mais ceci est trop long. Voici simplement quelques remarques à ce sujet:

Les singularités de $\tilde{E}_1$ sont les points critiques de la restriction $\tilde{H}_1$ de la fonction $\tilde{H}$ à W_{n-1} (cf. lemme 2 et (29)). A chaque point critique isolé de $\tilde{H}_1$ la théorie de Morse [**21**, p. 85-92] permet d'associer des nombres types (entiers positifs) de chaque dimensions et permet ensuite d'établir des relations entre ces nombres types et la topologie de W_{n-1}. En particulier si W_{n-1} est compact, et si tous les points critiques de $\tilde{H}_1$ sont simples [**21**, §8] leur nombre est supérieur à la somme des nombres de Betti de W_{n-1} [**21**, §5]. Il convient de remarquer aussi que puisque W_n est compact la fonction $\tilde{H}$ admet nécessairement des points critiques.

On peut donc formuler le théorème suivant:

THÉORÈME VII. *On suppose que le système différential* (Σ_μ) *admet l'invariant intégral* $\omega_\mu = \pi - H_\mu dt$ *et que la fonction* $\tilde{H}_1$, *restriction à* W_{n-1} *de la fonction* $\tilde{H}$ *définie par* (26), *n'admet que des points critiques isolés. Dans ces conditions si* $\mu \leqslant \eta$ *où* $\eta > 0$ *est un nombre réel convenable, le système* Σ_μ *admet des trajectoires simplement fermés tracées dans* $W_{n,\mu}$. *Le nombre de ces trajectoires*

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-040-1 Published online by Cambridge University Press

simplement fermées est au moins égal au nombre des points critiques de $\tilde{H}_1$. *Comme* W_n *est compact, la fonction* $\tilde{H}_1$ *admet certainement des points critiques.*

La théorie de Morse [**21**] *permet d'étudier la nature de ces points critiques. En particulier si les points critiques de* $\tilde{H}_1$ *sont tous simples, leur nombre est supérieur à la somme des nombres de Betti de* W_n.

Pour achever cette étude il conviendrait d'expliciter les relations entre la nature des points critiques de $\tilde{H}_1$ et le comportement des trajectoires simplement fermées associées. A cet effet on peut se reporter à [**4**, chap. III].

V. Applications

5.1. Généralités sur les systèmes conservatifs. Soit (Γ) un système mécanique à liaisons holonomes indépendantes du temps, et désignons par V_q la variété à q dimensions des configurations de ce système. On suppose que les forces connues dérivent d'une fonction de force U_μ indépendante du temps (mais fonction du paramètre μ) et que la force vive $\overline{T}_\mu$ dépend aussi de μ. Pour $\mu = 0$, on suppose que les trajectoires sont périodiques, et que leur période T est une fonction continue, de sorte qu'on puisse appliquer les résultats des chapitres III et IV.

Soit V^*_{2q} la variété à $2q$ dimensions des formes linéaires (ou vecteurs covariants) sur V_q. A tout système de coordonnées locales q_i dans V_q correspond de façon canonique un système de coordonnées locales p_i, q_i dans V^*_{2q}, telles que la forme (p_i,q_i) ait précisément pour expression $\sum p_i dq_i$. En d'autres termes (p_i,q_i) désigne le vecteur covariant attaché au point q_i, ayant pour composantes p_i. L'application Θ de l'espace V'_{2q} des vecteurs (contre-variants) tangents à V_q sur V^*_{2q} définie par $q_i \to q_i$, $q'_i \to \partial \overline{T}_\mu / \partial q'_i$ ne dépend pas des coordonnées particulières q_i. On pose suivant l'usage:

$$H_\mu(\Theta(q_i,q'_i)) = \overline{T}_\mu(q_i,q'_i) - U_\mu(q).$$

Donc $H_\mu(p_i,q_i)$ est une fonction sur V^*_{2q}. Le système différentiel qui définit le mouvement admet l'invariant intégral relatif [**7**] (dans $V^*_{2q} \times R$):

$$\omega_\mu = \sum p_i dq_i - H_\mu dt. \tag{31}$$

Les résultats de IV peuvent être utilisés.

Les mêmes considérations sont valables (avec des précautions évidentes) si les liaisons tout en restant holonomes, dépendent du temps, à condition toutes fois que H_μ ne dépende pas du temps.

5.2. Applications aux géodésiques de la sphère S_q [**28**]. Appliquons ceci au problème des géodésiques de la sphère S_q (cf. **2.3**) munie d'un ds_μ^2 de la forme:

$$ds_\mu^2 = d\sigma^2 + \mu\, d\theta^2$$

où $d\sigma^2$ est la forme quadratique fondamentale de la sphère euclidienne S_q et où $d\theta^2$ est une forme différentielle quadratique quelconque sur S_q. Désignons par $S^*_{2(q-1)}$ la variété des grands cercles orientés de S_q.

La fonction $\tilde{H}$ (cf. **4.1**,) prend une même valeur en deux points de $S^*_{2(q-1)}$ correspondants à un même grand cercle de S_q avec ses deux orientations opposées. De la sorte $\tilde{H}$ peut être considéré comme une fonction numérique sur la variéte $S^{**}_{2(q-1)}$ des grands cercles, non orientés, de S_q; la variété $S^{**}_{2(q-1)}$ admet $S^*_{2(q-1)}$ comme revêtement à deux feuillets.

Les nombres de Betti modulo 2 de $S^{**}_{2(q-1)}$ sont connus [**13**] et peuvent être consignés dans le tableau suivant, dont la loi de formation est évidente: (b_p désigne le nombre de Betti pour la dimension p).

	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
$q = 2$	1	1	1						
$q = 3$	1	1	2	1	1				
$q = 4$	1	1	2	2	2	1	1		
$q = 5$	1	1	2	2	3	2	2	1	1
. . .	.	.	.	.	.	.	.	.	.

La somme des nombres de Betti modulo 2 de $S^{**}_{2(q-1)}$ est égale à

$$\tfrac{1}{2}\, q(q + 1).$$

Si les singularités de $\tilde{H}$ sont simples, alors les géodésiques orientées simplement fermées pour les petites valeurs de μ sont [**21**] *au nombre de $q(q + 1)$* au moins.

Le calcul explicite de la fonction $\tilde{H}$ est assez simple ici, aussi allons nous l'indiquer en détail. Remarquons que la fonction de Hamilton H_μ associée à notre problème de géodésiques est définie sur la variété S^*_{2q} des formes linéaires sur S_q. La valeur de H_μ au point z de S^*_{2q} est égale au carré scalaire de la forme z.

Pour avoir des paramètres commodes, nous supposons que S_q est définie dans l'espace euclidien R^{q+1} par l'équation cartésienne:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{q+1}^2 = 1.$$

Les formes sur S_q peuvent être représentées par les vecteurs tangents à S_q, dont les composantes seront désignées par $u_i (i = 1, \ldots, q + 1)$. Au vecteur (x_i, u_i) correspond la forme induite dans S_q par la forme $\Sigma u_i dx_i$. L'élément d'arc ds_μ^2 est l'élément d'arc induit dans S_q par la forme quadratique suivante définie dans R^{q+1}:

$$ds_\mu^2 = (dx_i^2 + \ldots + dx_{q+1}^2) + \mu \sum \epsilon_{ij} dx_i dx_j$$

où les ϵ_{ij} sont les composantes d'un tenseur deux fois covariant défini dans R^{q+1}. On vérifie que la fonction H_μ admet le développement limité (suivant μ):

$$H_\mu = (u_1^2 + \ldots + u_{q+1}^2) - \mu \sum \epsilon_{ij} u_i u_j + \ldots .$$

Les équations paramétriques des trajectoires de H_0 sont:

$$x_i = A_i \cos t + B_i \sin t, \quad u_i = - A_i \sin t + B_i \cos t; \tag{32}$$

où A_i et B_i sont des constantes qu'on peut interpréter comme coordonnées

https://doi.org/10.4153/CJM-1951-040-1 Published online by Cambridge University Press

d'un point de S^*_{2q}. L'expression de $\tilde{H}$ (ou plus exactement de $\tilde{H} . P$) est donnée par:

$$(33) \qquad \tilde{H}(A_i,B_i) = -\int_0^{2\pi} \sum \epsilon_{ij} u_i u_j dt$$

où on a substitué à u_i et x_i les expressions (32).

En particulier si les ϵ_{ij} sont des polynomes en (x_i,u_i) on voit que $\tilde{H}$ est un polynome en (A_i,B_i) ne contenant que des termes de degré pair. Si nous nous limitons aux trajectoires vérifiant $H_0 = 1$, les coordonnées (A_i,B_i) vérifient les relations:

$$\sum A_i^2 = 1, \quad \sum B_i^2 = 1, \quad \sum A_i B_i = 0.$$

5.3. Application au cas particulier d'un éllipsoïde. Un cas particulier remarquable est celui où les coefficients ϵ_{ij} sont des constantes, cas qui correspond à l'éllipsoide à q dimensions. On peut toujours faire en sorte que $\epsilon_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Soit $\alpha_i = \epsilon_{ij}$. Si les α_i sont tous distincts, on a le cas d'un éllipsoide d'axes inégaux.

L'integration (33) donne:

$$\tilde{H} . P = -\pi \sum \alpha_i (A_i^2 + B_i^2).$$

Les points critiques de $\tilde{H} . P$ (dans la variété $H_0 = 1$) sont les points où la matrice suivante est de rang inférieur à 4:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 A_1 \ldots \alpha_{q+1} A_{q+1} & \alpha_1 B_1 \ldots \alpha_{q+1} B_{q+1} \\ 0 \quad \ldots \quad 0 & B_1 \ldots \quad B_{q+1} \\ B_1 \quad \ldots \quad B_{q+1} & A_1 \ldots \quad A_{q+1} \\ A_1 \quad \ldots \quad A_{q+1} & 0 \ldots \quad 0 \end{pmatrix}$$

En effet cette dernière condition exprime la nullité de la forme:

$$d\tilde{H} \otimes d(\sum A_i^2) \otimes d(\sum B_i^2) \otimes d(\sum A_i B_i) = 0.$$

Si les α_i sont tous distincts, on met en évidence les $\frac{1}{2}q(q+1)$ groupes de points critiques obtenus en annulant toutes les coordonnées $B_1, \ldots, B_{q+1}$; $A_1, \ldots, A_{q+1}$ sauf une de chaque groupe, les deux coordonnées non nulles devant avoir des indices différents. Par exemple on peut faire:

$$B_1 = 0, \ldots, B_q = 0; \qquad A_2 = 0, \ldots, A_{q+1} = 0.$$

On vérifie qu'on obtient ainsi tous les points critiques de $\tilde{H}$. Ainsi on a mis en évidence, pour les petites valeurs de μ, les éllipses principales de l'éllipsoide à axes inégaux comme seules géodésiques simplement fermées.

5.4. Application aux oscillations de relaxation. Soit (Σ_μ) le système différentiel (cf. (6)):

$$(34) \qquad dx_i = u_i dt, \quad du_i = (-x_i + \mu f_i(x,u))dt;$$

défini dans R^{2q}. Les champs E_μ, E_0 et E' ont respectivement pour composantes: $(u_i, -x_i + \mu f_i(x,u))$, $(u_i, -x_i)$, $(0, f_i(x,u))$.

Les lignes intégrales de E_0 ont pour équation:

$$(35) \qquad x_i = A_i \cos t + B_i \sin t \qquad u_i = - A_i \sin t + B_i \cos t,$$

où A_i et B_i sont des constantes.

Soit $\mathfrak{F}(x,u) = \Sigma_i(x_i^2 + u_i^2)$ «l'énergie» du système (Σ_μ). La fonction $\mathfrak{F}(x,u)$ est constante sur les trajectoires de E_0; elle est donc une fonction définie l'espace des fibres de E_0. On vérifie facilement que:

$$(d\mathfrak{F}, \tilde{E}) = 2\int_0^{2\pi} \sum_i u_i f_i(x,u)\, dt,$$

où on a substitué à x_i et u_i les expressions (35). (On désigne par (ω, v) le produit scalaire de la forme ω par le vecteur v.)

Soit Δ_{2q} les sous-espaces de R^{2q} défini par les inégalités:

$$(36) \qquad m \leqslant \mathfrak{F}(x,u) \leqslant M.$$

L'espace Δ_{2q} est fibré par les trajectoires de E_0 et l'espace de base de Δ_{2q} est isomorphe à $P_q(G) \times I$ (où I est l'intervalle fermé $[\sqrt{m}, \sqrt{M}]$) (cf. **2.2**).

Dans de nombreux problèmes de dynamique on a la circonstance suivante (pour des valeurs convenables de M et m):

$$(37) \qquad (d\mathfrak{F}, \tilde{E}) < 0 \text{ sur } P_q(G) \times \{\sqrt{M}\} \text{ et } (d\mathfrak{T}, \tilde{E}) > 0 \text{ sur } P_q(G) \times \{\sqrt{m}\},$$

dont l'interprètation dynamique est évidente (cf. **6.4**).

Si la relation (37) a lieu, le champ $\tilde{E}$ sur $P_q(G) \times I$ ne s'annule en aucun point du bord de $P_q(G) \times I$ et il est dirigé vers l'intérieur de $P_q(G) \times I$. On en conclut que $\tilde{E}$ a des singularités, dont la somme des indices est $\chi(P_q(G)) = q$. Dans le cas particulier où $q = 1$, on retrouve les résultats classiques sur l'équation (2) [**19**, p. 194-204].

VI. Sur l'existence de solutions périodiques sous des conditions plus larges

6.1. Introduction. Les résultats exposés dans les chapitres précédents présentent un *grave inconvénient*: le paramètre μ est non seulement petit, mais encore il est borné par $\epsilon > 0$ où ϵ dépend de E'. On se propose de voir comment on peut démontrer l'existence de solutions périodiques sous des conditions un peu plus larges.

H. Seifert a démontré un théorème dans ce sens [26]:

Théorème. *Soit E_0 un champ de vecteurs sans singularités, défini sur une variété de Riemann compacte V_3 à trois dimensions, dont les trajectoires sont fermées et forment une fibration de V_3 dont la base est V_2. Soit E un deuxième champ de vecteurs sur V_3 vérifiant en tout point $y \in V_3$:*

$$||E_0(y) - E(y)|| \leqslant \epsilon$$

(où $\epsilon > 0$ est un nombre réel convenable attaché au couple (E_0, V_3) et où $||E(x)||$ est la norme de $E(x)$). *Dans ces conditions, si la caractéristique d'Euler-*

Poincaré χ *de* V_2 *n'est pas nulle, le champ* E *admet des trajectoires simplement fermées; de plus la somme de leurs indices* (si ces trajectoires sont en nombre fini) *est égale à* χ.

Ce théorème admet des applications à l'étude des géodésiques sur S_2 (voir aussi **6.3**). Un théorème du même type (mais bien plus facile) sera démontré dans la suite, et le résultat sera appliqué aux oscillations de relaxation.

6.2. Un résultat général. Soit V_n une variété compacte à n dimensions, sur laquelle est défini un champ de vecteurs E_0, sans singularités, dont les trajectoires sont fermées et forment une fibration de V_n. Pour plus de commodité on suppose que V_n est doué d'une structure de variété de Riemann et on désigne par $||E(x)||$ la norme du vecteur $E(x)$.

A tout $x \in V_n$ on peut associer la plaque $Q(x)$ engendrée par les arcs de géodésiques issues de x, normaux à $E(x)$ et de longueur inférieure à un nombre positif $\bar{a}$ donné. Si $\bar{a}$ est choisi convenablement $Q(x)$ est homéomorphe, par une application h, à une boule compacte B_{n-1} à $n - 1$ dimensions de R^{n-1} et les géodésiques issues de x sont appliquées par h sur les rayons de B_{n-1}.

Soit E un deuxième champ de vecteurs défini sur V_n et vérifiant $||E(x) - E_0(x)|| < \epsilon$ pour tout $x \in V_n$ (ici ϵ est un nombre positif donné). On peut choisir $\epsilon > 0$ de sorte que la trajectoire de E issue de x recoupe $Q(x)$ (pour la première fois) en x', et de sorte que le vecteur $E'(x)$ tangent en x à la géodésique orientée xx', issue de x et allant vers x', ayant pour longueur de xx', soit une fonction continue de x.

L'existence d'une trajectoire simplement fermée du champ E*, est équivalente à l'existence de singularités du champ* E' *qui vient d'être défini. En particulier, si la variété* V_n *n'admet pas deux champs de vecteurs linéairement indépendants en tout point de* V_n*, le champ* E *admet nécessairement une trajectoire simplement fermée* [**20**, d].

En particulier on sait que la sphère S_{4s+1} *à* 4^{s+1} *dimensions* (s *entier*) *n'admet pas deux champs de vecteurs linéairement indépendants* [**10**].

6.3. Une application de 6.2 à un système dynamique. Soit (Γ) un système dynamique, à liaisons holonomes et indépendantes du temps, dont l'espace de configuration est l'espace numérique R^n des variables $q_i (i = 1, \ldots, n)$ et dont l'espace de phase est l'espace numérique R^{2n} des variables, q_i et q'_i. On fait sur (Γ) les hypothèses suivantes:

(α) *La force vive* $2T$ *de* (Γ) *a pour expression*:

$$2T = \sum_i (q'_i)^2 + \sum a_{ij}(q') q'_i q'_j \quad (\text{on pose } \sum (q'_i)^2 = 2T_0).$$

(β) *Les forces données appliquées à* (Γ) *se répartissent dans les trois catégories suivantes*:

(1) *Des forces dérivant de la fonction de force* $U(q) = \sum - (\omega_i q_i)^2$ *où les* ω_i *sont des constantes proportionnelles à des nombres rationnels* (*cf.* **2.2**).

(2) *Des forces perturbatrices dérivant de la fonction de force* $B(q)$.

(3) *Des forces perturbatrices (de nature électro-magnétique par exemple) dont le travail élémentaire réel est nul, mais dont le travail virtuel dans le déplacement élémentaire* δq *à partir de l'état* (q_i, q'_i) *a pour expression*:

$$\delta W = \sum b_i(q_i, q'_i)\, \delta q_i.$$

Dans ces conditions on vérifie que le système (Γ) admet l'intégrale première des forces vives: $(T - U - B) = h = \text{Cte}$. En particulier si les termes perturbateurs B, a_{ij}, b_i sont nuls, l'intégrale première des forces vives s'écrit: $T_0 - U = b$. Cette équation définit dans R^n un sous-espace homéomorphe à la sphère S_{2n-1}; de plus les trajectoires de (Γ) tracées sur S_{2n-1} forment une fibration de S_{2n-1} (cf. **2.2**).

On déduit facilement de **6.2**, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans détails:

THÉORÈME. *On suppose que les fonctions* $|a_{ij}|$, $|B(q)|$ *et* $|b_i|$ *sont bornées par* $\epsilon > 0$ *sur le sous espace de* R^{2n} *défini par l'inégalité* $\frac{1}{2}b \leqslant T_0 - U \leqslant 2b$. *Il existe un nombre réel* $\eta > 0$, *ne dépendant que de* b *et* ω_i, *tel que si* $\epsilon < \eta$, *et si* n *est impair le système* (Γ) *admette au moins une trajectoire simplement fermée pour laquelle la constante des forces vives est* h.

6.4. Applications aux oscillations de relaxation. Envisageons de nouveau le système différentiel: (voir (6))

$$dx_i = u_i dt, \qquad du_i = (-x_i + f_i(x,u))dt, \qquad (i = 1, \ldots, q). \tag{38}$$

Ce système a une signification mécanique ou physique évidente. Les fonctions f_i sont des fonctions perturbatrices. Les trajectoires du système (38) non perturbé (c'est à dire où l'on a fait $f_i = 0$) forment une fibration de l'espace R^{2q} pointé en 0; de plus le système admet l'intégrale première:

$$F(x_i, u_i) = \sum_i (u_i^2 + x_i^2).$$

De plus on admet, ce qui est naturel dans l'interprétation dynamique, que les fonctions perturbatrices sont telles que l'hypothèse suivante $\mathfrak{H}$ soit vérifiée:

HYPOTHÉSE $\mathfrak{H}$: *Soit* E_0 *le champ associé au système* (6). *Soit* E' *le champ défini en* **6.2**, *normal à* E_0, *sur la sphère creuse* Δ_{2q} *d'équation*:

$$m \leqslant F \leqslant M$$

(où $M > m > 0$ *sont deux nombres réels convenables*). *Soit* E'' *la restriction du champ* E' *au bord de la sphère creuse* Δ_{2q}. *Le champ* E'' *est dirigé vers l'intérieur de* Δ_{2q}.

(Bien entendu pour pouvoir construire le champ E' on suppose que les fonctions perturbatrices f_i sont assez petites; c'est à dire qu'elles vérifient des inégalités du type:

$$|f_i(x,u)| < \epsilon_i$$

où les constantes positives ϵ_i ne dépendent que de m et M). L'hypothèse $\mathfrak{H}$ revient en gros à exiger que l'énergie F diminue aux grandes vitesses et augmente aux petites vitesses (cf. **5.4**). En tout cas il est facile en général de vérifier si cette hypothèse est satisfaite.

THÉORÈME VIII. *Si le système* (38) *vérifie* $\mathfrak{H}$, *et si de plus* q *est impair, le système* (38) *admet au moins une solution périodique.*

Pour démontrer VIII on démontre que si $2q - 1 = 4^{s+1} (s \geqslant 2)$ le champ E' a des singularités. On peut d'ailleurs supposer que la restriction du champ E' au bord de Δ_{2q} est normale au bord de Δ_{2q} et que $||E'(x)|| = 1$ en tout point x de Δ_{2q} qui n'est pas un point singulier de E'. Le théorème VIII est donc équivalent au théorème géométrique suivant:

Soit S_{4s+1} *la sphère de rayon* 1 *de l'espace euclidien* R^{4s+2} (*s entier*, $s > 1$). *Dans ces conditions le champ des normales extérieures de* S_{4s+1} *ne peut pas être déformé dans le champ des normales intérieures, si pendant la déformation les vecteurs du champ déformé sont assujettis à rester orthogonaux aux vecteurs d'un champ* E'_0 *donné tangent à* S_{4s+1}.

Dans le produit topologique $S_n \times I$ (où I est l'intervalle fermé $[-1 + 1]$) on considère donc un champ de vecteurs E_0 qui en tout point $(x_0,\rho_0) \in S_n \times I$ est tangent à la sphère $\rho = \rho_0$ et qui vérifie $E_0(x,\rho) = E_0(x,\rho')$ quels que soient ρ et ρ'. Soit E' un deuxième champ de vecteurs sur $S_n \times I$, qui sur le bord $\overline{S}_n$ de $S_n \times I$ est orthogonal à $\overline{S}_n$, et qui est dirigé vers l'intérieur de $S_n \times I$.

Il s'agit de reconnaître s'il existe un prolongement E'' du champ E', déjà défini sur le bord de $S_n \times I$, à $S_n \times I$ tel que la condition d'orthogonalité entre E'' et E_0 soit satisfaite.

Soient respectivement H et K les deux hémisphères compacts de S_n relativement à un plan équateur donné. Les deux lemmes suivants (1) et (2) sont des conséquences immédiates du théorème du relèvement des homotopies [**11**]:

(1) *On peut prolonger* E' *au sous-espace* $K \times I$ *de sorte que la relation d'orthogonalité avec* E_0 *soit satisfaite.*

(2) *Si le prolongement désiré de* E' *à* $S_n \times I$ *existe, il est possible de prolonger tout champ* $\overline{E}'$ *sur* $K \times I$ *en un champ* E'' *sur* $S_n \times I$ *vérifiant la condition d'orthogonalité* (*à condition que* $\overline{E}'$ *soit un prolongement de* E' *à* $K \times I$ *et vérifie la condition d'orthogonalité*).

On peut supposer que le prolongement $\overline{E}'$ de E' à $K \times I$ vérifie:

$$\overline{E}'_1(x,\rho) = (1 - |\rho|)E'_1(x, 0), \quad \overline{\mathfrak{E}}'(x,\rho) = -\rho \tag{39}$$

où $x \in S_n$, $\rho \in I$, où $\overline{E}'_1$ est la composante de $\overline{E}'$ selon S_n, et $\overline{\mathfrak{E}}'$ la composante suivant I. Dans ces conditions la restriction de $\overline{E}'$ à $\dot{H} \times I$ (où $\dot{H}$ est le bord de H) satisfait aussi aux relations (39) (où cette fois-ci $x \in \dot{H}$).

Soit Q l'espace des vecteurs non nuls de $H \times I$, orthogonaux au champ E_0. On a évidemment un parallélisme entre les vecteurs de Q attachés à des points se projetant sur un même point de H. D'autre part on peut définir un parallélisme parmi les vecteurs de Q tangents à H, (en effet H est contractile en un point). Il en résulte un parallélisme naturel pour tous les vecteurs de Q.

A tout vecteur de Q on peut associer grâce à parallélisme un point de la sphère S_{n-1} à $n-1$ dimensions; appelons γ l'application continue ainsi définie de Q dans S_{n-1}.

Si le prolongement désiré du champ E' à $S_n \times I$ existe, l'application θ du bord $\partial(H \times I)$ de $H \times I$ dans S_{n-1} définie en associant à $x \in \partial(H \times I)$ le vecteur du champ E' (ou $\bar{E}'$) et en prenant son image par γ, est homotope à zéro. Or la restriction de θ à $\dot{H} \times \{0\}$ est une application θ' de $\dot{H} \times \{0\}$ dans l'équateur S_{n-2} de S_{n-1}. D'après (39), θ n'est autre chose que la Einhängung de Freudenthal [**14**] de θ', et est donc (dans notre cas particulier) essentielle si et seulement si θ' est essentielle. Or on sait d'après la théorie classique que si $n = 4q + 1$, l'application θ' est essentielle (donc aussi θ); d'où le théorème. [**14**; **10**].

Dans le cas particulier où $q = 1$ le théorème reste valable et redonne des résultats bien connus dans le cas des oscillations de relaxation à un degré de liberté. [**19**, p. 184-194].

Références

1. P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie* (Berlin, 1935).

2. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique* (Paris, 1940, 1942, 1947, 1948).

3. P. Bidal et G. de Rham, *Les formes différentielles harmoniques*, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 19 (1947), 1-49.

4. G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 9 (1927).

5. C. E. Carathéodory, *Variationsrechnung und partielle Differential-gleichungen* 1 *Ordnung* (Leipzig, 1935).

6. É. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs* (Paris, 1946).

7. ———, *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, 1922).

8. S. Chern, *Characteristic Classes of Hermitian Manifolds*, Ann. of Math., vol. 47 (1946), 85-121.

9. C. Chevalley, *Theory of Lie Groups I* (Princeton, 1946).

10. B. Eckmann, *Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen*, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 15 (1942), 1-26.

11. ———, *Zur Homotopietheorie gefaserter Räume*, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 14 (1941), 141-192.

12. Ch. Ehresmann, *Sue la théorie des espaces fibrés*, Colloque de topologie algébrique (Paris, 1948).

13. ———, *Sur la topologie de certaines variétés algébriques*, Jour. de math., 104 (1937), 69-100.

14. H. Freudenthal, *Über die klassen der Sphärenabbildungen*, Compositio Mathematica, vol. 5 (1934), 299-314.

15. H. Guggenheimer, *Sur les variétés qui possèdent une forme quadratique fermée*, Comptes Rendus, vol. 232 (1951), 490.

16. J. Haag, *Sur la synchronisation des systèmes à plusieurs degrés de liberté*, Ann. Sci. de l'École Normale Sup., vol. 64, (1947) 237-338.

17. ———, *Sur la synchronisation des systèmes oscillants non linéaires*, Ann. Sci. de l'École Normale vol. Sup., 67 (1950), 321-392.

18. N. Kryloff et N. Bogoliouboff, *An Introduction to Non-Linear Mechanics* (Princeton, 1948).

19. S. Lefschetz, *Lectures on differential equations* (Princeton, 1946).

20a. G. Reeb, *Variétés de Reimann dont toutes les géodésiques sont fermées*, Bull. de la classe des Sci., Bruxelles, vol. 36 (1950), 324-329.

20b. ——— Comptes Rendus, Paris, vol. 229 (1949), 969-971.

20c. ——— Comptes Rendus, Paris, vol. 228 (1949), 1097-1098 et 1196-1198.

20d. ——— Archiv der Mathematik, vol. 50 (1949), 205-206.

21. H. Seifert et W. Threlfall, *Variationsrechnung im Grossen*, (Leipzig, 1938).

22. ———, *Lehrbuch der Topologie*, (Leipzig, 1934).

23. H. Seifert, *Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume*, Acta Math., vol. 60 (1932), 147-238.

24. O. Zoll, *Über geschlossene geodätische Linien*, Math. Ann., vol. 57 (1903), 108-133.

25. P. Funk, *Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien*, Math. Ann., vol. 74 (1913), 278-300.

26. H. Seifert, *Closed integral curves in 3-space, . . .*, Proceedings Am. Math. Soc., vol. 1 (1950), 287-302.

27. É. Cartan, *Sur certaines formes riemanniennes . . .*, Ann. Sci. de l'École Normale Sup., vol. 44 (1927), 466-467.

28. H. Poincaré, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 6 (1905), 237-274.

29. A. Speiser, *Topologische Fragen aus der Himmelsmechanik*, Vierteljahresschrift der Naturforsch. Gesellsch. i. Zürich, vol. 85 (1940), 204-213.

Saverne, France