Can. J. Math., Vol. XXXIV, No. 4, 1982, pp. 989-995

SYMBOLE HOLOMORPHE

A. MERIL

Introduction. Soit T un endomorphisme continu de $\mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$, nous montrons qu'il existe une fonction entière S sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ telle que $\zeta \rightarrow S(x, \zeta)$ soit de type exponential sur $\mathbf{C}^n$ avec croissance controlée uniformément lorsque x parcourt un compact de $\mathbf{C}^n$, de telle sorte que pour $\mu \in \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ on ait

$$\mathscr{F} T(\mu)(\zeta) = \langle \mu_x, S(x, \zeta) e^{\langle x, \zeta \rangle} \rangle$$

($\mathscr{F}$ désigne la transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique). Une telle fonction S sera dite un symbole holomorphe sur $\mathbf{C}^n$. Réciproquement nous montrons que si S est une fonctionnelle analytique, la formule précédente permet de définir un endomorphisme continu (encore noté S) de $\mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$.

Nous montrons que ces symboles holomorphes sont un peu l'analogue dans le cadre des fonctionnelles analytiques des opérateurs pseudo-différentiels et prouvons pour ces opérateurs le théorème de Leibnitz-Hörmander:

THEOREME. *Soient S_1 et S_2 deux symboles holomorphes sur $\mathbf{C}^n$. La série*

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_x^{\alpha} S_1(x, \zeta) \partial_\zeta^{\alpha} S_2(x, \zeta)$$

converge et définit un symbole holomorphe que nous noterons $S_1 \circ S_2$. De plus pour toute fonctionnelle analytique μ on a $(S_1 \circ S_2)(\mu) = S_1(S_2\mu)$.

0. Notations et rappels. Elles sont classiques. L'espace vectoriel topologique $\mathscr{H}(\mathbf{C}^n)$ est l'espace des fonctions entières muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbf{C}^n$ qui en fait un Fréchet nucléaire. Son dual for $\mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ est l'espace des fonctionnelles analytiques.

Pour un compact K de $\mathbf{C}^n$, nous noterons H_K sa fonction d'appui définie par

$$H_K(z) = \operatorname*{Sup}_{\zeta \in K} \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle.$$

L'espace des fonctions entières de type exponentiel est l'espace du type $L.\ F$ suivant

$$\operatorname{Exp}(\mathbf{C}^n) = \{f \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^n) \mid \exists\ K \text{ compact de } \mathbf{C}^n \sup_{z \in \mathbf{C}^n} |f(z) e^{-H_K(z)}| < +\infty\}.$$

Reçu le 25 septembre 1981 et sous forme revisée le 12 mars 1982.

La topologie se définit aussi de la manière suivante (cf. [**4**]): Pour $A > 0$, soit l'espace de Banach

$$B_A = \{f \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^n) | \lim_{|z| \to +\infty} |f(z)e^{-A|z|}| = 0\}.$$

On a

$$\operatorname{Exp}(\mathbf{C}^n) = \bigcup_{A>0} B_A$$

et la topologie naturelle de Exp $(\mathbf{C}^n)$ est celle de limite inductive des espaces de Banach B_A.

La transformation de Fourier-Borel est

$$\mathscr{F} : \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n) \to \operatorname{Exp}(\mathbf{C}^n)$$
$$\mu \to \zeta \to \langle \mu_z, e^{z\zeta} \rangle.$$

0.1. THEOREME ([**1**], [**2**], [**3**]). *La transformation de Fourier-Borel établit un isomorphisme d'e.l.c. entre* $\mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ *et* Exp $(\mathbf{C}^n)$.

Dans toute la suite $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sera un multi indice de $\mathbf{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ sera sa longueur et $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. Alors D^α sera

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Pour $f \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^n)$ et $\mu \in \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ les fonctionnelles analytiques $f\mu$ et $D^\alpha\mu$ seront définies par: $\forall\ g \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^n)$

$$\langle f\mu, g \rangle = \langle \mu, fg \rangle \quad \text{et} \quad \langle D^\alpha\mu, g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \mu, D^\alpha g \rangle.$$

1. Symboles holomorphes. Nous noterons (x, ζ) l'élément générique de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n = \mathbf{C}^{2n}$.

1.1. *Definition*. Soit $S \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^{2n})$ nous dirons que S est un symbole holomorphe sur $\mathbf{C}^n$ s'il existe deux fonctions a et C de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{R}_+$ majorées sur tout compact et telles que pour tout (x, ζ) on ait

$$|S(x, \zeta)| \leqq C(x)e^{a(x)|\zeta|}.$$

Nous noterons Symb $(\mathbf{C}^n)$ l'espace vectoriel des symboles holomorphes sur $\mathbf{C}^n$.

Remarquons que pour $\mu \in \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ et $S \in$ Symb $(\mathbf{C}^n)$ la fonction

$$L(S)(\mu) : \zeta \to \langle \mu_x, S(x, \zeta)e^{\langle x, \zeta \rangle} \rangle,$$

est élément de Exp $(\mathbf{C}^n)$. Nous noterons $S\mu$ la fonctionnelle analytique $\mathscr{F}^{-1}(L(S)(\mu))$.

1.2. THEOREME. *Soit* $S \in$ Symb $(\mathbf{C}^n)$, *l'application linéaire* T *suivante est continue:*

$$T : \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n) \to \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$$
$$\mu \to S\mu.$$

Preuve. Immédiate compte tenu du lemme bien connu suivant.

LEMME ([**1**]). *Soit* $(F_k)_{k \in \mathbf{N}}$ *une suite de fonctions entières de type exponentiel. Cette suite converge vers zéro dans* Exp $(\mathbf{C}^n)$ *si, et seulement si, il existe* $a > 0$ *tel que*

$$\lim_{k \to +\infty} \operatorname{Sup}_{\zeta \in \mathbf{C}^n} |F_k(\zeta) e^{-a|\zeta|}| = 0.$$

Example de symbole holomorphe. Soit $m \in \mathbf{N}$ et une suite finie $(a_\alpha)_{|\alpha| \leqq m}$ de fonctions entières. Alors

$$S(x, \zeta) = \sum_{|\alpha| \leqq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha(x) \zeta^\alpha$$

est un symbole holomorphe tel que pour $\mu \in \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ on ait

$$S\mu = \sum_{|\alpha| \leqq m} D^\alpha(a_\alpha \mu).$$

Autrement dit S est un "opérateur différentiel". Cet exemple se généralise de la manière suivante.

1.3. THEOREME. *Soit* S *un symbole holomorphe sur* $\mathbf{C}^n$. *Soit*

$$S(x, \zeta) = \sum_\alpha f_\alpha(x) \zeta^\alpha$$

son développement en série par rapport à la variable ζ. *Alors pour toute fonctionnelle anlaytique* μ, *la série*

$$\sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(f_\alpha \mu)$$

converge dans $\mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ *vers* $S\mu$.

Nous aurons besoin du

1.4. LEMME. *Soit* $S \in$ Symb $(\mathbf{C}^n)$. *Soient* C *et* a *deux fonctions de* $\mathbf{C}^n$ *dans* $\mathbf{R}_+$ *majorées sur tout compact et telles que*

$$|S(x, \zeta)| \leqq C(x) e^{a(x)|\zeta|}$$

pour tout $(x, \zeta) \in \mathbf{C}^{2n}$. *Pour* $k \in \mathbf{N}$, *notons*

$$P_k(S(x, \cdot\,), \zeta) = \sum_{|\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta{}^\alpha S(x, 0) \zeta^\alpha$$

et

$$U_{k,x} = \operatorname{Sup}_\zeta \frac{|P_k(S(x, \cdot\,), \zeta)|}{|\zeta|^k}.$$

Soit K *un compact de* $\mathbf{C}^n$, *il existe une constante* $A''(K) > 0$ *et* $k_0(K) \in \mathbf{N}$

tels que pour tout $k \geqq k_0(K)$ et $x \in K$ on ait

$$\frac{k}{e}\,(U_{k,x})^{1/k} \leqq A''(K)$$

(*ou e est la base de l'exponentielle*).

Preuve. Ce lemme se déduit aisément du Lemme 5 de Martineau ([**4**]).

Preuve de 1.3. Il suffit de montrer que la série

$$\sum_\alpha \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\mathscr{F}\left(D^\alpha\left(\frac{\partial^\alpha S(x,0)}{\partial\zeta^\alpha}\,\mu\right)\right)$$

converge vers $L(S)(\mu)$ dans Exp $(\mathbf{C}^n)$. Comme $\mu \in \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$, il existe un compact K et une constante $C \geqq 0$ tels que

$$|\langle\mu, f\rangle| \leqq C\,\mathrm{Sup}_{x\in K}\,|f(x)|$$

pour toute $f \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^n)$. Notons $d_K = \mathrm{diam}\,(K)$ et soit $A' > A''(K) + d_K$. Pour $k \geqq k_0(K)$ on a

$$|P_k(S(x,\ \cdot\ );\zeta)|e^{(d_K-A')|\zeta|} \leqq \left(\frac{eA''(K)}{k}\right)^k e^{(d_K-A')|\zeta|}|\zeta|^k.$$

Ce qui donne

$$|P_k(S(x,\cdot\,);\zeta)|\,e^{(d_K-A')|\zeta|} \leqq \left(\frac{A''(K)}{A'-d_K}\right)^k.$$

Par suite la série

$$\sum_k \langle\mu_x, P_k(S(x,\cdot\,);\zeta)\,e^{\langle x,\zeta\rangle}\rangle$$

converge dans Exp $(\mathbf{C}^n)$ (elle converge aussi ponctuellement). Représentons μ par une mesure de Radon (cf [**3**], [**5**]), le théorème de convergence dominée de Lebesgue prouve que

$$\sum_k \langle\mu_x, P_k(S(x,\cdot\,);\zeta)\,e^{\langle x,\zeta\rangle}\rangle = \langle\mu_x, S(x,\zeta)\,e^{\langle x,\zeta\rangle}\rangle.$$

1.5. THEOREME. (Formule de Leibnitz-Hörmander). *Soient S_1 et S_2 deux symboles holomorphes sur $\mathbf{C}^n$. La série*

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,\partial_x{}^\alpha S_1(x,\zeta)\partial_\zeta{}^\alpha S_2(x,\zeta)$$

converge et définit un symbole holomorphe que nous noterons $S_1 \circ S_2$. De plus pour toute fonctionnelle analytique μ on a

$$(S_1 \circ S_2)(\mu) = S_1(S_2\mu).$$

Preuve. Soient pour $j = 1, 2$ C_j et a_j des fonctions de $\mathbf{C}^n$ à valeurs dans

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-071-7 Published online by Cambridge University Press

$\mathbf{R}_+$ majorées sur tout compact et telles que

$$|S_j(x, \zeta)| \leqq C_j(x)e^{a_j(x)|\zeta|}$$

pour $j = 1, 2$ et $(x, \zeta) \in \mathbf{C}^{2n}$. Soient $\zeta_0 \in \mathbf{C}^n$ et $r' = (r_1', \ldots, r_n') \in (\mathbf{R}_+, *)^n$, notons $P(\zeta_0, r')$ le polydisque

$$P(\zeta_0, r') = \{z \in \mathbf{C}^n | \forall\, i\ 1 \leqq i \leqq n\ |\zeta_{0,1} - z_i| < r_i'\}.$$

Pour $\zeta \in \bar{P}(\zeta_0, r')$ il existe $M > 0$ tel que

$$|\zeta| \leqq M(r_1' + \ldots + r_n') + |\zeta_0|,$$

la formule intégrale de Cauchy prouve alors que

$$|\partial_\zeta^\alpha S_2(x_0, \zeta_0)| \leqq \alpha! C_2(x_0) \prod_{j=1}^n \frac{\exp\ (a_2(x_0)Mr_j')}{(r_j')^{\alpha_j}}$$

En prenant le maximum de la fonction

$$y \longrightarrow \frac{\exp\ (a_2(x_0)My)}{y^{\alpha_j}}$$

et en appliquant la formule de Stirling on voit aisément qu'il existe $M' > 0$ tel que

$$|\partial_\zeta^\alpha S_2(x_0, \zeta_0)| \leqq (M')^n (2\pi)^{n/2} C_2(x_0)(\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{1/2} a_2(x_0)$$

$$\text{où } \alpha_1 \ldots \alpha_n = \prod_{j|\alpha_j \neq 0} \alpha_j \quad \text{et} \quad \alpha_1 \ldots \alpha_n = 1 \quad \text{si } \alpha_j = 0 \forall j.$$

Soient $x_0 \in \mathbf{C}^n$ et $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbf{R}_+, *)^n$, notons

$$C(x_0, r) = \sup_{x \in P(x_0, r)} C_1(x) \quad \text{et}$$

$$a(x_0, r) = \sup_{x \in \bar{P}(x_0, r)} a_1(x).$$

La formule intégrale de Cauchy et l'inégalité que l'on vient de montrer prouve qu'il existe $M'' > 0$ tel que

$$\left| \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha S_1(x_0, \zeta_0) \partial_\zeta^\alpha S_2(x_0, \zeta_0) \right| \leqq (M'')^n C_2(x_0) C(x_0, r)$$

$$\times\, e^{(a_2(x_0) + a(x_0, r))|\zeta|} (\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{1/2} \frac{(a_2(x_0)M)^{|\alpha|}}{r^\alpha}$$

ou $r^\alpha = r_1^{\alpha_1} \ldots r_n^{\alpha_n}$.

Quitte à augmenter la fonction a_2, on peut supposer qu'elle ne s'annule pas. Pour $r_0 = (2a_2(x_0)M, \ldots, 2a_2(x_0)M)$, les fonctions suivantes sont positives et majorées sur tout compact

$$C(x_0) = (M'')^n \left(\sum_\alpha \frac{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{1/2}}{2^{|\alpha|}} \right) C_2(x_0) C(x_0, r_0)$$

et $a(x_0) = a_2(x_0) + a(x_0, r_0)$.

La série

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^{\alpha} S_1(x, \zeta) \partial_{\zeta}^{\alpha} S_2(x, \zeta)$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbf{C}^{2n}$ de plus la majoration

$$\left| \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^{\alpha} S_1(x, \zeta) \partial_{\zeta}^{\alpha} S_2(x, \zeta) \right| \leqq C(x)\, e^{a(x)|\zeta|}$$

prouve que cette série définit un symbole holomorphe.

D'après Martineau ([**4**]) le sous-espace vectoriel de $\mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ engendré par la famille $(\delta_a)_{a \in \mathbf{C}^n}$ y est dense. Il est clair que pour tout $a \in \mathbf{C}^n$ on a

$$S_1(S_2\delta_a) = (S_1 \circ S_2)(\delta_a).$$

Par 1.2 on voit que pour tout $\mu \in \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ on a

$$S_1(S_2\mu) = (S_1 \circ S_2)(\mu).$$

Nous prouvons la réciproque de 1.2.

1.6. Proposition. *Soit* $T \in \mathscr{L}_b(\mathscr{H}'(\mathbf{C}^n), \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n))$ *il existe un unique symbole holomorphe* S *tel que* $T = S$.

Preuve. Soit $S_1(a, \zeta) = \mathscr{F}(T\delta_a)(\zeta)$. Il existe deux constantes positives $C(a)$ et $B(a)$ tels que

$$|\mathscr{F}(T(\delta_a)(\zeta))| \leqq C(a)e^{B(a)|\zeta|}.$$

Soit K un compact de $\mathbf{C}^n$, l'ensemble $\{\mathscr{F}(\delta_a)|a \in K\}$ est un borné de Exp $(\mathbf{C}^n)$, donc l'ensemble $\{\delta_a|a \in K\}$ est borné dans $\mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$. Par suite $\{T\delta_a|a \in K\}$ et $\{\mathscr{F}(T\delta_a)|a \in K\}$ sont des ensembles bornés. Cela prouve qu'on peut définir des fonctions C et B de $\mathbf{C}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, majorées sur tout compact et tel que

$$|\mathscr{F}(T\delta_a)(\zeta)| \leqq C(a)e^{B(a)|\zeta|}.$$

Il est clair que

$$S(x, \zeta) = S_1(x, \zeta)e^{-\langle x, \zeta \rangle}$$

est un symbole holomorphe tel que $T(\mu) = S\mu$ pour tout $\mu \in \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$.

Remarque. 1°) Cette proposition ne fait que réexprimer le théorème des noyaux de L. Schwartz ([**5**]).

2°) Soit $\mu \in \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$, on note $SA(\mu)$ l'ensemble des zéros de l'idéal

$$I = \{f \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^n)|f\mu = 0\}$$

(cf [**6**]). Un endomorphisme continu T de $\mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ est un opérateur différentiel si et seulement si pour tout $\mu \in \mathscr{H}'(\mathbf{C}^n)$ on a $SA(T\mu) \subset SA(\mu)$. (La preuve est évidente en utilisant le théorème de Baire et le fait que $SA(\mu) = a$ si et seulement si

$$\mu = \sum_{|\alpha| \leqq m} a_{\alpha \delta_a} \quad (a_\alpha \in \mathbf{C}) \quad (\text{cf } [\mathbf{6}]).$$

Remerciement. L'auteur remercie le rapporteur pour ses remarques.

Bibliographie

1. L. Ehrenpreis, *Fourier analysis in several complex variables* (Wiley Interscience, 1970).
2. L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables* (Van Nostrand, Princeton, 1966).
3. A. Martineau, *Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel*, J. Analyse. Math. (1963), 1–164.
4. ——— *Equation différentielles d'ordre infini*, Bull. Soc. Math. de France *95* (1967), 109–154.
5. F. Treves, *Topological vector spaces, distributions and kernels* (Acad. Press, New York, 1967).
6. R. Gay, *Division des fonctionnelles analytiques et fonctions entières de type exponentiel*, These Sc. Math. Strasbourg (1976).

U.E.R. de Mathématiques et Informatique,
Talence, France