BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 32C10, 53C55, 53C25, 32E05
VOL. 56 (1997) [285–290]

CONVEXITÉ HOLOMORPHE INTERMÉDIAIRE DES REVETEMENTS D'UN DOMAINE PSEUDOCONVEXE

S. ASSERDA

Let M be a complex manifold and $L \mapsto M$ be a positive holomorphic line bundle over M equipped with a Hermitian metric h of class C^2. If $D \subset\subset M$ is a pseudoconvex domain which is relatively compact in M then there exists an integer r_0 such that for every $r \geqslant r_0$ and for every connected holomorphic covering $\pi : \widetilde{D} \to D$, the covering $\widetilde{D}$ is holomorphically convex with respect to holomorphic sections of $(\pi^*(L^r_D), \pi^* h^r)$.

1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DU RÉSULTAT PRINCIPAL

Un domaine $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ est dit localement pseudoconvexe si tout point $x_0 \in \partial D$ admet un voisinage $U_{x_0} \subset \mathbf{C}^n$ tels que $U_{x_0} \cap D$ soit pseudoconvexe. On adopte une definition analogue pour les domaines dans les variétés analytiques complexes.

DÉFINITION 1.1: Un domaine D relativement compacte dans une variété analytique complexe M $(\dim_c M = n)$ est localement pseudoconvexe si pour tout point $x_0 \in \partial D$ il existe une carte locale (U_{x_0}, Ψ_{x_0}) passant par x_0 tels que $\Psi_{x_0}(U_{x_0} \cap D)$ soit pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n$.

Dans [4] Grauert introduit la notion de convexité holomorphe par rapport aux sections holomorphes d'un fibré vectoriel, qui généralise la convexité holomorphe ordinaire.

DÉFINITION 1.2: Soient N une variété analytique complexe, L un fibré vectoriel holomorphe au dessus de N et h une metrique Hermitienne de classe C^2 sur L. La variété N est dite L-convexe si pour toute partie infinie $S \subset N$ sans point d'accumulation dans N, il existe une section holomorphe σ de L sur N telle que la fonction $\|\sigma(?)\|_h$ soit non bornée sur S.

REMARQUES.

(i) Si L est de rang un et $D \subset\subset N$ est L-convexe alors D est localement pseudoconvexe.
(ii) Si $D \subset\subset N$ alors la notion de L-convexité est indépendante du choix de la métrique h sur L.

Received 18th November, 1996.
Research supported by a grant of MES.FC.RS : SC-2.17033 at FSK 1.11.95.

La restriction de L sur D est notée par L_D et $\otimes^r L$ désigne le produit tensoriel de L (r fois).

Dans [**1**] le résultat suivant est démontré :

THÉORÈME 1.1. *Soient M une variété analytique complexe et (L,h) un fibré en droites holomorphe positif sur M. Si $D \subset\subset M$ est un domaine localement pseudoconvexe et relativement compact dans M, alors il existe un entier r_0 tel que D soit $\otimes^r L$-convexe poir tout $r \geqslant r_0$.*

Soient M, D, (L,h) comme dans le théorème précédent et $\widetilde{D}$ un revetement holomorphe connexe de D. Il est naturel de se demander si $\widetilde{D}$ est $(\pi^*(L_D^r), \pi^* h^r)$-convexe pour r assez grand. Dans cette note on démontre le résultat suivant:

THÉORÈME 1.2. *Supposons que (L,h) soit positif sur M et que $D \subset\subset M$ est localement pseudoconvex et relativement compact dans M. Alors il existe un entier r_0 tel que pour tout $r \geqslant r_0$ et tout revetement holomorphe connexe $\pi : \widetilde{D} \to D$, le revêtement $\widetilde{D}$ est $(\pi^*(L_D^r), \pi^*(h^r))$-convexe.*

Rappelons qu'un fibré holomorphe en droites L est dit *positif* sur M si la $(1,1)$-forme de courbure $c(L)_h$ est définie positive sur le fibré tangent holomorphe TM de M. Si (U,Ψ) est une trivialisation de L sur U, $L_U = \pi^{-1}(U) \longmapsto U \times \mathbf{C}$, alors la métrique h de L est donnée par

$$\|\xi\|_h = |\xi|\, e^{-\psi(x)} \quad \forall x \in U, \quad \forall \xi \in L_x \simeq \mathbf{C}$$

et $c(L)_h$ s'écrit

$$c(L)_h = i\partial\overline{\partial}\psi \quad \text{sur} \quad U$$

où ψ est une fonction de classe C^2 sur U. Si (V,Φ) est une autre trivialisation alors $\psi = \phi + \log\left|\Psi \circ \Phi^{-1}\right|$ sur $U \cap V$ and $i\partial\overline{\partial}\log\left|\Psi \circ \Phi^{-1}\right| = 0$. Donc $c(L)_h$ est définie positif sur U si et seulement si ψ est une fonction *strictement plurisousharmonique.*

Si u et v sont des $(p;q)$-formes sur M à valeurs dans L, la quantité $\langle u,v\rangle_h$ désigne leur produit par rapport à h et une metrique donnée g sur M. L' adjoint formel de l'operateur $\overline{\partial}$ sur L est noté $\overline{\partial}^*$ et $Ricci(g)$ désigne *la courbure de Ricci* de g. Pour de plus amples détails voir [**3, 5**]

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2.

Soit S une partie infinie de $\widetilde{D}$ sans point d'accumulation. On construit une section holomorphe σ de $\pi^*(L_D^r)$ au dessus de $\widetilde{D}$ telle que $\|\sigma(?)\|_{\pi^* h^r}$ soit non bornée sur S. Puisqu'il suffit de considérer chaque partie infinie de S, on peut supposer que S est égale à une suite de points $\{z_\nu\}$. On pose $x_\nu := \pi(z_\nu)$.

Si la suite $\{x_\nu\}$ n'admet pas de point d'accumulation dans D, d'après le Théorème 1.1, pour $r \geqslant r_0$ assez grand (r_0 ne depend que de D), il existe une section holomorphe

s de L^r sur D telle que $\|s\|_{h^r}$ soit non bornée sur $\{x_\nu\}$. La section holomorphe $\sigma := \pi^* s$ de $(\pi^*(L^r_D), \pi^*(h^r))$ sur $\widetilde{D}$ est donc non bornée sur $\{z_\nu\}$.

Si $\{x_\nu\}$ admet un point d'accumulation w dans D, alors on peut supposer que $x_\nu \to w \in D$. Soit g une métrique kählérienne complète sur D [**1**, Proposition 1.2] et $\widetilde{g} = \pi^* g$ l'image réciproque de g. Puisque π est un revetement holomorphe, $\widetilde{g}$ est une metrique kählérienne complète sur $\widetilde{D}$. Soit $(V, \Psi) \simeq B(0, 2R)$ une carte locale centrée en w et de rayon $2R$ telle que L_V soit trivial. Soit t une section holomorphe de L^r sur M telle que $t(w) \neq 0$. Quitte à prendre R assez petit, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $Y = \{x \in D; t(x) = 0\}$ dans (D, g) telle que $\overline{V} \cap \overline{\mathcal{O}} = \emptyset$.

On pose $U := \Psi^{-1}(\mathcal{B}(0, R))$. Puisque π est un revetement, quitte à prendre R assez petit, on peut écrire $\pi^{-1}(U) = \bigcup\limits_\nu U_\nu$ avec $x_\nu \in U_\nu$ pour ν assez grand et les voisinages U_ν sont disjoints deux à deux et $\pi : U_\nu \to U$ est biholomorphe. Soit $\Psi_\nu : U_\nu \to B(0, 2R) \subset \mathbf{C}^n$ définie par

$$\widetilde{\Psi}_\nu(z) := \Psi(\pi(z)) - \Psi(\pi(z_\nu)) \qquad z \in U_\nu.$$

L'application $\widetilde{\Psi}_\nu$ vérifie les propriétés suivantes:

(1) $\widetilde{\Psi}_\nu(z_\nu) = 0$ pour chaque ν

(2) Il existe des constantes a et b indépendantes de ν telles que: $a\widetilde{\Psi}^*_\nu g_e \leqslant \widetilde{\Psi}^*_\nu g \leqslant b\widetilde{\Psi}^*_\nu g_e$ sur U_ν, où g_e est la métrique euclidienne.

Soit λ une fonction test à support dans $B(0, R)$ telle que $\lambda = 1$ dans un voisinage de 0 et $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. La fonction $\Phi : \widetilde{D} \to [-\infty, +\infty[$ définie par:

$$\Phi(z) = \begin{cases} 2n\lambda(z) \log \left|\widetilde{\Psi}_\nu(z)\right| & \text{si} \quad z \in \bigcup_\nu U_\nu \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

est C^∞ sur $\widetilde{D} \setminus \{z_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ et d'après (2)

$$i\partial\overline{\partial}\Phi \geqslant -Kg \qquad \text{au sens des courants}$$

où K est une constante positive. De plus $e^{-\Phi}$ n'est pas sommable au voisinage de z_ν.

Soit ξ une section holomorphe de L sur V telle que $t(w) \neq 0$. On considère la section s de $\pi^*(L_D)$ sur $\widetilde{D}$ définie par

$$s(z) = \begin{cases} \chi\left(\widetilde{\Psi}_\nu(z)\right) e^{r(z_\nu)} \xi(\pi(z)) & \text{si } z \in \bigcup\limits_\nu U_\nu \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

où $r(z) := d_{\widetilde{g}}(z_0, z)$ est la distance par rapport à la métrique $\widetilde{g}$ entre z et un point fixé z_0 de $\widetilde{D}$. On peut choisir la fonction test χ de sorte que la $(0,1)$-forme lisse

$\alpha := \overline{\partial} s$ à valeurs dans $\pi^*(L_D)$ dont le support est contenu dans $\bigcup_\nu U_\nu$, s'annule dans un voisinage $\{(z_\nu)\} \cup \mathcal{O}$. D'après (2) on a $|\overline{\partial}(\chi o \Psi_\nu)|_{\widetilde{g}} \leqslant C$ sur U_ν, où la constante C est indépendante de ν. D'où

$$(**) \qquad \|\alpha\|^2_{h^r} e^{-\Phi} \leqslant C' e^{2r(z_\nu)}.$$

Lemma 2.2. [**7**, Lemma 1.1]. *Il existe une fonction $\rho : \widetilde{D} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ et exhaustive vérifiant*

(a) $C_1 r \leqslant \rho \leqslant C_2 r$
(b) $|i\partial\overline{\partial}\rho|_{\widetilde{g}} \leqslant C_3$

dans $\pi^{-1}(U)$, où les constantes dépendent de U.

Soit $\left(\pi^* L_D, \pi^* h'\right)$ le fibré en droites $\pi^*(L_D)$ muni de la métrique singulière $h' := e^{-\kappa}\pi^* h$ où $\kappa = 3C_1^{-1}\rho + \Phi + \tau - \log\|\pi^* t\|_{\pi^* h^r}$ et $\tau := \pi^* \log V_g / V_M$ (V_M est la forme volume associée à la métrique kählérienne $c(L)$ sur M). Puisque $\tau \geqslant C_5$ sur $\pi^{-1}(U)$ et $\|\xi\|_h$ (resp $\|t\|_{h^r}$) est bornée sur U, on a d'après $(**)$

$$\int_{\widetilde{D}} \|\alpha\|^2_{h'}\, dV_{\widetilde{g}} \leqslant C' \sum_\nu \int_{U_\nu} e^{2r(z_\nu) - 3C_1^{-1}\rho} dV_{\widetilde{g}}.$$

On peut choisir R suffisamment petit de sorte que $U_\nu \subset B_{\widetilde{g}}(z_\nu, R)$ pour tout ν et que les volumes des boules $B_{\widetilde{g}}(z_\nu, R)$ soient uniformément bornés en ν. Pour $z \in U_\nu$ on a $r(z_\nu) - R \leqslant r(z) \leqslant C_1^{-1}\rho(z)$. D'où

$$\int_{\widetilde{D}} \|\alpha\|^2_{h'}\, dV_{\widetilde{g}} \leqslant C'' \sum_\nu e^{-r(z_\nu)} < \infty$$

car on peut supposer que $r(z_\nu) \geqslant \nu$ pour ν assez grand.

Soit f une $(0,1)$-forme lisse sur $\widetilde{D}$ à valeurs dans $\pi^*(L_D)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(***) \qquad \left(\int_{\widetilde{D}} |\langle f, \alpha\rangle_{h'}|\, dV_{\widetilde{g}}\right)^2 \leqslant \int_{\widetilde{D}} \|\alpha\|^2_{h'}\, dV_{\widetilde{g}} \int_{\pi^{-1}(U)} \|f\|^2_{h'}\, dV_{\widetilde{g}}.$$

Il existe des constantes $c > 0$ and d telles que $c(L) \geqslant c.g$ et $Ricci(c(L)) \geqslant d.g$ sur U. Puisque $-i\partial\overline{\partial}\log\|t\| = rc(L)$ sur U, pour r assez grand on a

$$Ricci(\widetilde{g}) + i\partial\overline{\partial}\Phi + i3C_1^{-1}\partial\overline{\partial}\rho + r\pi^* c(L_D) + \pi^* c(L_D) + i\partial\overline{\partial}\tau \geqslant c\widetilde{g} \quad \text{sur} \quad \pi^{-1}(U).$$

En utilisant l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géomètrie Kählerienne [**2**] et $(***)$, on déduit

$$\left(\int_{\widetilde{D}} |\langle f, \alpha\rangle_{h'}|^2 dV_{\widetilde{g}}\right)^2 \leqslant \frac{1}{c}\int_{\widetilde{D}} \|\alpha\|^2_{h'}\, dV_{\widetilde{g}} \Big(\int_{\widetilde{D}} \left\|\overline{\partial}^* f\right\|^2_{h'} dV_{\widetilde{g}} + \int_{\widetilde{D}} \|\overline{\partial} f\|^2_{h'}\, dV_{\widetilde{g}}\Big).$$

https://doi.org/10.1017/S0004972700031038 Published online by Cambridge University Press

Puisque $\overline{\partial}\alpha = 0$, il suffit de considérer les formes f $\overline{\partial}$-fermées. Donc pour tout $f \in \mathrm{Dom}\left(\overline{\partial}^*\right)$, on a

$$\int_{\widetilde{D}} \left|\langle f,\alpha\rangle_{h'}\right|^2 dV_{\widetilde{g}} \leqslant \frac{1}{c}\Big(\int_{\widetilde{D}} \|\alpha\|_{h'}^2\, dV_{\widetilde{g}}\Big)^{1/2}\Big(\int_{\widetilde{D}} \left\|\overline{\partial}^* f\right\|_{h'}^2 dV_{\widetilde{D}}\Big)^{1/2}.$$

La métrique $\widetilde{g}$ est kählérienne complète sur $\widetilde{D}$, d'après la théorie de Hörmander [**5**] (version singulière [**2**]). Il existe une section localement intégrable β de $\pi^*(L_D)$ sur $\widetilde{D}$ telle que

$$\overline{\partial}\beta = \overline{\partial}s \qquad \text{et} \qquad \int_{\widetilde{D}} \|\beta\|_{h'}^2\, dV_{\widetilde{g}} \leqslant \int_{\widetilde{D}} \|\alpha\|_{h'}^2\, dV_{\widetilde{g}}.$$

Puisque $e^{-\Phi}$ n'est pas sommable au voisinage de z_ν on a $\beta(z_\nu) = 0$. La section holomorphe $\sigma := s - \beta$ de $\pi^*(L_D)$ sur $\widetilde{D}$ vérifie $\|\sigma(z_\nu)\| = e^{r(z_\nu)} \longrightarrow \infty$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

En utilisant les techniques précedentes et l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géométrie Hermitienne [**3**], on peut démontrer le théorème suivant qui généralise celui de Stein [**8**] sur les revetement des variétés de Stein.

THÉORÈME 2.3. *Soient (X,g) une variété Hermitienne complète et (L,h) un fibré holomorphe en droites positif au dessus de X. Si X est L-convexe alors il existe un entier r_0 tel que pour tout $r \geqslant r_0$ et tout revetement holomorphe connexe $\pi : \widetilde{X} \to X$, le revetement $\widetilde{X}$ est (π^*L^r, π^*h^r)-convexe.*

REMARQUE. Le Théorème 1.2 a été démontré par Napier [**6**] en supposant que la frontière de D est de classe C^4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Asserda, 'The Levi problem on projective manifolds', *Math. Z.* **219** (1995), 631–636.

[2] J.P. Demailly, 'Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählérienne complète', *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **15** (1982), 457–511.

[3] J.P. Demailly, *Analytic geomety,* (to appear).

[4] H. Grauert, 'Bemerkenswerte pseudokonvexe mannifaltigkeiten', *Math. Z.* **81** (1963), 377–392.

[5] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland Mathematical Library, (Third Edition - revised), 1990.

[6] T. Napier, 'Convexity properties of coverings of smooth projective varieties', *Math. Ann.* **286** (1990), 433–479.

[7] T. Napier, 'Covering spaces of families of compact Riemann surfaces', *Math. Ann.* **294** (1992), 523–549.

[8] K.Stein, 'Uberlayerungen holomorph-vollstandiger komplexer Râume', *Arch. Math.* **7** (1956), 354–361.

Université Ibn Tofail
Departement de Mathématiques
BP 133 Kénitra
Maroc