Canad. Math. Bull. Vol. **38** (3), 1995 pp. 286–294

HOMÉOMORPHISMES UNIFORMES ENTRE LES SPHÈRES UNITÉ DES ESPACES D'INTERPOLATION

MOHAMAD DAHER

RÉSUMÉ. Si (A_0, A_1) est un couple d'interpolation et si A_0 est uniformément convexe on montre que pour tous $\theta_1, \theta_2 \in]0,1[$ il existe un homéomorphisme uniforme entre la sphère unité de $(A_0, A_1)_{\theta_1}$ et la sphère unité de $(A_0, A_1)_{\theta_2}$.

Introduction. Soient (A_0, A_1) un couple d'interpolation (*cf.* [2]) et $\theta_1, \theta_2 \in]0,1[$; on montre dans cet article, lorsque A_0 est uniformément convexe, l'existence d'un homéomorphisme uniforme entre la sphère unité de l'espace d'interpolation complexe $A_{\theta_1} = (A_0, A_1)_{\theta_1}$ et la sphère unité de A_{θ_2} (c'est le théorème de cet article); une application de ce théorème est le résultat de E. Odell et Th. Schlumprecht (*cf.* [15]) généralisé par F. Chaatit (*cf.* [5]); Odell et Schlumprecht ont montré que si X est un espace à base inconditionnelle ne contenant pas uniformément les espaces ℓ_n^∞, $n \geq 1$, alors la sphère unité $S(X)$ de X est uniformément homéomorphe à la sphère unité de ℓ^2 (inversement, l'existence d'une suite de sous-espaces de X, uniformément isomorphes aux espaces ℓ_n^∞, est une obstruction à l'existence d'un homéomorphisme uniforme entre la sphère unité de X et celle de ℓ^2, *cf.* [9]); Chaatit a montré que si X est un treillis de Banach (de dimension infinie) avec une unité faible et si X ne contient pas les ℓ_n^∞ uniformément alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et un homéomorphisme uniforme $U: S(X) \longrightarrow S\big(L^1(\mu)\big)$. Rappelons la caractérisation due à B. Maurey et G. Pisier: un espace de Banach X ne contient pas les ℓ_n^∞ uniformément si et seulement si X est de cotype fini (*cf.* [14]). La partie la plus délicate du travail d'Odell-Schlumprecht ou de Chaatit consiste à démontrer le résultat dans le cas où le treillis X est supposé de plus uniformément convexe. C'est cette partie que nous retrouvons dans cet article en utilisant l'interpolation complexe (le cas général résulte du cas des treillis uniformément convexes par une technique de convexification, comme l'ont montré Odell et Schlumprecht).

Signalons que N. J. Kalton a trouvé notre résultat par le même argument [12].

L'espace d'interpolation complexe est défini habituellement au moyen des fonctions holomorphes sur $S_0 = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; 0 < \Re z < 1\}$ et qui sont continues et bornées sur $S = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; 0 \leq \Re z \leq 1\}$; on peut aussi définir l'espace d'interpolation complexe par les fonctions holomorphes sur S_0 mais en remplaçant la continuité sur S par une condition d'intégrabilité L^p, ou une condition L^∞ au bord (Proposition 2). Ceci permet de trouver sous certaines hypothèses une représentation minimale pour chaque point de l'espace d'interpolation; c'est le cas en particulier lorsque A_j est un espace de Banach réflexif,

Reçu par les éditeurs le 21 mars 1994; révisé le 27 juillet 1994.
Classification (AMS) par sujet : Primaire: 46B42; secondaire: 46B70.

$j = 0, 1$; de plus la représentation est unique si A_0 (ou A_1) est strictement convexe. Etant donnés $\theta_1, \theta_2 \in]0, 1[$, nous étudions l'application U qui associe à chaque vecteur a de la sphère unité $S(A_{\theta_1})$ de A_{θ_1} la valeur de sa représentation minimale au point θ_2. Nous montrons dans le cas où A_0 est uniformément convexe que U est un homéomorphisme uniforme entre les sphères unité de A_{θ_1} et A_{θ_2} (voir le théorème plus loin). Dans le cas d'un treillis uniformément convexe X, un théorème d'extrapolation de Pisier permet de considérer X comme un élément d'une échelle d'interpolation complexe contenant un espace de Hilbert H. On déduit alors des résultats précédents que $S(X)$ et $S(H)$ sont uniformément homéomorphes (Corollaire 1).

REMERCIEMENTS. Je remercie chaleureusement Monsieur le Professeur Bernard Maurey pour m'avoir donné l'ensemble des moyens nécessaires à la réalisation de ce travail; ses conseils et suggestions permanents m'ont permis de progresser constamment; qu'il trouve ici l'expression de toute ma profonde gratitude.

Soit X un espace de Banach complexe, X^* son dual; on note par $B(X)$ la boule unité (fermée) de X et par $S(X)$ la sphère unité de X. Pour tout $x \in X$ et pour tout $x^* \in X^*$ on note $(x, x^*) = x^*(x)$. Soit $\bar{A} = (A_0, A_1)$ un couple d'interpolation; on note par $\mathcal{F}(\bar{A})$ l'espace des fonctions $F: S \longrightarrow A_0 + A_1$, F continue bornée sur S, holomorphe sur S_0, telle que $\tau \longrightarrow F(j + i\tau)$ soit continue de $\mathbb{R}$ à valeurs dans A_j et $\|F(j + i\tau)\|_{A_j} \longrightarrow 0$ quand $|\tau| \longrightarrow +\infty$, $(j = 0, 1)$.

Si $F \in \mathcal{F}(\bar{A})$ on pose

$$\|F\|_{\mathcal{F}(\bar{A})} = \max\Big(\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|F(i\tau)\|_{A_0}, \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|F(1 + i\tau)\|_{A_1}\Big).$$

On pose

$$\mathcal{F}_0(\bar{A}) = \Big\{F\,;\, \exists n \geq 1, F = \sum_{k=1}^{n} F_k \otimes x_k\Big\},$$

où $F_k \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, $x_k \in A_0 \cap A_1$ pour $k = 1, \ldots, n$. D'après le lemme 4.2.3 de [2] l'espace $\mathcal{F}_0(\bar{A})$ est dense dans $\mathcal{F}(\bar{A})$.

Pour tout $\theta \in]0, 1[$ on définit l'espace d'interpolation A_θ par

$$A_\theta = \{F(\theta)\,;\, F \in \mathcal{F}(\bar{A})\}\,;$$

si $a \in A_\theta$ on pose $\|a\|_{A_\theta} = \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}(\bar{A})}\,;\, F(\theta) = a\}$; avec cette norme A_θ est un espace de Banach (*cf.* [2]).

Pour tout $s + it \in S_0$ et pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ on définit

$$Q_j(s + it, \tau) = \frac{e^{-\pi(\tau - t)} \sin(\pi s)}{\sin^2(\pi s) + \big(\cos(\pi s) - e^{ji\pi - \pi(\tau - t)}\big)^2}, \quad j = 0, 1.$$

Posons $d\mu_{z,j}(t) = Q_j(z, t)\,dt$; pour tout $p \in [1, +\infty]$ soit $\mathcal{F}^p_\theta(\bar{A})$ l'espace des fonctions $F: S \longrightarrow A_0 + A_1$, F holomorphe sur S_0, telle que $\tau \longrightarrow F(j + i\tau)$ soit (Bochner) mesurable à valeurs dans A_j $(j = 0, 1)$,

$$\|F\|^p_{\mathcal{F}^p_\theta(\bar{A})} = \int_{\mathbb{R}} \|F(it)\|^p_{A_0}\, d\mu_{\theta,0}(t) + \int_{\mathbb{R}} \|F(1 + it)\|^p_{A_1}\, d\mu_{\theta,1}(t) < +\infty,$$

et

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} F(it)\, d\mu_{z,0}(t) + \int_{\mathbb{R}} F(1+it)\, d\mu_{z,1}(t) \qquad \text{pour tout } z \in S_0$$

(si $p = +\infty$, $\|F\|_{\mathcal{F}^\infty(\bar{A})} = \max_{j=0,1}\Big(\|F(j + i(.))\|_{L^\infty(A_j)}\Big)$).

On définit l'espace $A_\theta^p = \{F(\theta)\ ;\ F \in \mathcal{F}_\theta^p(\bar{A})\}$; si $a \in A_\theta^p$ on pose

$$\|a\|_{A_\theta^p} = \inf\{\|F\|_{\mathcal{F}_\theta^p(\bar{A})}\ ;\ F(\theta) = a\},$$

A_θ^p est un espace de Banach.

Soient D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathbb{T}$ le tore ($\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) et m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

Pour tout $r \in\,]0,1[$ et pour tout $\varphi \in \mathbb{T}$ on note

$$P_r(\varphi) = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1}\ ;$$

si $z = re^{i\varphi} \in D$ on pose $P_z(t) = P_r(\varphi - t)$.

On note $I_0 = \{t \in \mathbb{T}\ ;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\} \bigcup \{t \in \mathbb{T}\ ;\ \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi\}$, $I_1 = \mathbb{T} \backslash I_0$; si $t \in I_0$ on pose $A_t = A_0$ et si $t \in I_1$ on pose $A_t = A_1$ (on considère que $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$).

Pour tout $z_0 \in D$ posons $d\nu_{z_0}(t) = P_{z_0}(t)\, dm(t)$ sur $\mathbb{T}$. On note $\mathcal{H}(\bar{A})$ l'espace des fonctions $g\colon D \longrightarrow A_0 + A_1$, g holomorphe sur D, continue bornée sur $\bar{D}$, telle que l'application $t \longrightarrow g(e^{it})$ soit continue de $\bar{I}_j$ à valeurs dans A_j, $j = 0, 1$ et $g(i) = g(-i) = 0$,

$$\|g\|_{\mathcal{H}(\bar{A})} = \max_{j=0,1}\big(\sup_{t \in I_j} \|g(e^{it})\|_{A_j}\big).$$

Pour tout $z_0 \in D$ on définit l'espace B_{z_0} par $B_{z_0} = \{g(z_0)\ ;\ g \in \mathcal{H}(\bar{A})\}$. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, soit $\mathcal{H}_{z_0}^p(\bar{A})$ l'espace des fonctions $g\colon D \longrightarrow A_0 + A_1$, g holomorphe sur D telle que $t \longrightarrow g(e^{it})$ soit mesurable de I_j à valeurs A_j ($j = 0, 1$), $g(z) = \int_{\mathbb{T}} g(e^{it})\, d\nu_z(t)$ pour tout $z \in D$ et

$$\|g\|^p_{\mathcal{H}_{z_0}^p(\bar{A})} = \int_{\mathbb{T}} \|g(e^{it})\|^p_{A_t}\, d\nu_{z_0}(t) < +\infty,$$

(si $p = +\infty$, $\|g\|_{\mathcal{H}^\infty(\bar{A})} = \max_{j=0,1}\big(\|g\|_{L^\infty(I_j, A_j)}\big)$). Posons $B_{z_0}^p = \{g(z_0)\ ;\ g \in \mathcal{H}_{z_0}^p(\bar{A})\}$.

On peut facilement définir les normes sur B_{z_0} et sur $B_{z_0}^p$ comme dans le cas précédent. On définit la transformation conforme $\Lambda\colon S_0 \longrightarrow D$ par

$$\Lambda(z) = \frac{1 + ie^{i\pi z}}{i + e^{i\pi z}},$$

pour tout $z \in S$ (cette transformation donne $\Lambda(1/2) = 0$). On peut voir que l'application $g \longrightarrow g \circ \Lambda$ est une isométrie de $\mathcal{H}(\bar{A})$ sur $\mathcal{F}(\bar{A})$, et si $\Lambda(\theta) = z_0$, c'est aussi une isométrie de $\mathcal{H}_{z_0}^p(\bar{A})$ sur $\mathcal{F}_\theta^p(\bar{A})$; on en déduit que $A_\theta = B_{z_0}$ et $A_\theta^p = B_{z_0}^p$ (avec égalité de normes, $p \in [1, +\infty]$).

PROPOSITION 1. *Soient (A_0, A_1) un couple d'interpolation, $\theta \in \,]0,1[$ et $z_0 = \Lambda(\theta)$; pour tout $p \in [1, +\infty[$ et pour tout $a \in B^\infty_{z_0} = A^\infty_\theta$ on a*

$$\|a\|_{B^\infty_{z_0}} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})}\ ;\ g \in \mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A}) \text{ et } g(z_0) = a\}.$$

PREUVE. Il est clair que

$$\inf\{\|g\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})}\ ;\ g \in \mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A}) \text{ et } g(z_0) = a\} \leq \|a\|_{B^\infty_{z_0}}.$$

Inversement, soit $g \in \mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})$ avec $g(z_0) = a \neq 0$, on sait que $\int_{\mathbb{T}} \log \|g(e^{it})\|_{A_0+A_1}\, dm(t) > -\infty$; d'autre part on a pour tout $t \in I_j$, $\|g(e^{it})\|_{A_0+A_1} \leq \|g(e^{it})\|_{A_j}$, par conséquent on en déduit que $\int_{\mathbb{T}} \log \|g(e^{it})\|_{A_t}\, dm(t) > -\infty$; il existe donc une fonction extérieure $G \in H^p(\mathbb{T})$ telle que $|G(e^{it})| = \|g(e^{it})\|_{A_t}$ pour presque tout $t \in \mathbb{T}$; posons $H = G(z_0)\frac{g}{G}$, il est clair que $H \in \mathcal{H}^\infty(\bar{A})$, $H(z_0) = a$ et

$$\|H\|^p_{\mathcal{H}^\infty(\bar{A})} \leq |G(z_0)|^p \leq \int_{\mathbb{T}} |G(e^{it})|^p\, d\nu_{z_0}(t) = \int_{\mathbb{T}} \|g(e^{it})\|^p_{A_t}\, d\nu_{z_0}(t) = \|g\|^p_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})},$$

et on en déduit l'inégalité cherchée.

PROPOSITION 2. *Soit $\bar{A} = (A_0, A_1)$ un couple d'interpolation; pour tout $\theta \in \,]0,1[$ on a $A^\infty_\theta = A_\theta$, avec égalité des normes.*

On utilise le lemme classique suivant:

LEMME. *Soient X un espace de Banach muni d'une norme $\|.\|_1$ et Y un sous-espace de X muni d'une norme $\|.\|_2$ telle que $(Y, \|.\|_2)$ soit un espace de Banach; on suppose que $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, $\forall x \in Y$; si $B(Y)$ est dense dans $B(X)$ alors $X = Y$ et $\|.\|_1 = \|.\|_2$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2. D'après le lemme il suffit de montrer que $B(A_\theta)$ est dense dans $B(A^\infty_\theta)$. Soit $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$ à support compact, telle que $(K_n)_{n\geq 0}$ forme une approximation de l'identité dans $L^1(\mathbb{R})$ et $\sup_{n\geq 0} \|K_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$; supposons que $a \in A^\infty_\theta$ avec $\|a\|_{A^\infty_\theta} < 1$, il existe $F \in \mathcal{F}^\infty(\bar{A})$ tel que $F(\theta) = a$ et $\|F\|_{\mathcal{F}^\infty(\bar{A})} < 1$; pour tout $n \geq 1$ et pour tout $z \in S$ soit

$$F_n(z) = e^{(z^2-1)/n} \int_{\mathbb{R}} K_n(t) F(z - it)\, dt\ ;$$

on voit que $F_n \in \mathcal{F}(\bar{A})$ donc $a_n = F_n(\theta) \in A_\theta$; il est facile de voir que $\|F_n\|_{\mathcal{F}(\bar{A})} \leq \|F\|_{\mathcal{F}^\infty(\bar{A})} < 1$, cela implique que $a_n \in B(A_\theta)$, d'autre part $F_n(j + it) \longrightarrow F(j + it)$ dans A_j presque-partout $(j = 0, 1)$; en appliquant le théorème de Lebesgue on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \|F_n(it) - F(it)\|_{A_0}\, d\mu_{\theta,0}(t) + \int_{\mathbb{R}} \|F_n(1 + it) - F(1 + it)\|_{A_1}\, d\mu_{\theta,1}(t) \longrightarrow 0,$$

on déduit d'après la proposition 1 que $\|a_n - a\|_{A^\infty_\theta} \longrightarrow 0$, d'où le résultat.

PROPOSITION 3. *Soient* (A_0, A_1) *un couple d'interpolation et* $0 < \theta < 1$*; on suppose que* $A_0 \cap A_1$ *est dense dans* A_0 *et dans* A_1*, et que les espaces* A_0 *et* A_1 *sont réflexifs; posons* $z_0 = \Lambda(\theta)$*, et* $S_\theta = S(A_\theta)$*; on a*

I- Pour tout $a \in S_\theta$ *il existe* $g \in \mathcal{H}^\infty(\bar{A})$ *tel que* $g(z_0) = a$ *et* $\|g(e^{it})\|_{A_t} = 1$ *pour presque tout* $t \in \mathbb{T}$*; on a donc* $\|a\|_{A_\theta} = \|g\|_{\mathcal{H}^\infty(\bar{A})}$*;*

II- Si de plus A_0 *est strictement convexe alors pour tout* $a \in S_\theta$ *et pour tout* $p \in]1, +\infty[$ *il existe un unique* $g_a \in \mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})$ *tel que* $g_a(z_0) = a$ *et* $\|g_a\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})} = 1$*, (il en résulte que* g_a *est indépendant de* p*, et que* $\|g_a(e^{it})\|_{A_t} = 1$ *pour presque tout* $t \in \mathbb{T}$*).*

III- Si A_0 *et* A_1 *sont uniformément convexes alors l'application* $\Gamma: S_\theta \longrightarrow \mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})$ *définie par* $\Gamma(a) = g_a$ *est uniformément continue (*$1 < p < +\infty$*).*

REMARQUE. En utilisant la transformation conforme Λ on obtient immédiatement les mêmes résultats pour l'existence d'une représentation minimale dans $\mathcal{F}^p_\theta(\bar{A})$, ou sur la continuité de l'application Γ, considérée de S_θ dans $\mathcal{F}^p_\theta(\bar{A})$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.

DÉMONSTRATION DE I. Soit $a \in S_\theta$ et soit $p \in]1, +\infty[$. Comme A_j est réflexif et $1 < p < +\infty$, l'espace $\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})$ est réflexif. L'ensemble F_a des éléments $h \in \mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})$ tels que $h(z_0) = a$ est un sous-ensemble convexe fermé de $\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})$. Il existe donc un élément $g \in F_a$ de norme minimale, c'est à dire tel que

$$1 = \|a\|_{A_\theta} = \|g\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})}.$$

Montrons maintenant que $\|g(e^{it})\|_{A_t} = \|a\|_{A_\theta} = 1$ pour presque tout $t \in \mathbb{T}$. Comme précédemment il existe une fonction extérieure $G \in H^p(\mathbb{T})$ telle que $|G(e^{it})| = \|g(e^{it})\|_{A_t}$ pour presque tout $t \in \mathbb{T}$; soit $g_a = G(z_0)\frac{g}{G}$; il est évident que $g_a \in \mathcal{H}^\infty(\bar{A})$ et $g_a(z_0) = a$, on déduit que $\|g_a\|_{\mathcal{H}^\infty(\bar{A})} = |G(z_0)| \leq 1$ mais $\int_{\mathbb{T}} \|g_a(e^{it})\|_{A_t} \, d\nu_{z_0}(t) \geq \|a\|_{A_\theta} = 1$, donc $|G(z_0)| = \|g_a(e^{it})\|_{A_t} = 1$ pour presque tout $t \in \mathbb{T}$. Alors $\|G\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}} = |G(z_0)| = 1$. Cela entraîne que G est constante (on se ramène à $G(z_0) = 1$, et on utilise $|G(e^{it})| \geq \Re G(e^{it})$ pour déduire que G est réelle, donc constante), donc $\|g(e^{it})\|_{A_t} = 1$ pour presque tout $t \in \mathbb{T}$.

DÉMONSTRATION DE II. Soit $a \in S_\theta$; montrons que la fonction $g_a \in F_a$ trouvée dans I est l'unique représentant de norme minimale dans $\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})$; sinon soit $g_1 \in \mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})$ une fonction telle que $g_1(z_0) = a$, $\|g_1\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})} = 1$ et $g_1 \neq g_a$, ce qui entraîne $g_a \not\equiv g_1$ p.p sur $\mathbb{T}$, donc $g_a \not\equiv g_1$ p.p sur I_0; posons $\lambda_j = \int_{I_j} \|g_1(e^{it})\|^p_{A_j} \, d\nu_{z_0}(t)$; si A_0 est strictement convexe, l'espace $L^p(I_0, \nu_{z_0}, A_0)$ est strictement convexe (dans le cas $1 < p < +\infty$) donc

$$\int_{I_0} \left\| \frac{g_a(e^{it}) + g_1(e^{it})}{2} \right\|^p_{A_0} d\nu_{z_0}(t) < (1 - \theta)/2 + \lambda_0/2$$

d'autre part

$$\int_{I_1} \left\| \frac{g_a(e^{it}) + g_1(e^{it})}{2} \right\|^p_{A_1} d\nu_{z_0}(t) \leq \theta/2 + \lambda_1/2$$

ce qui entraîne l'inégalité $\|(g_a+g_1)/2\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(A)} < 1$, mais $\big(g_a(z_0)+g_1(z_0)\big)/2 = a$ par conséquent $\|(g_a+g_1)/2\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})} \geq \|a\|_{A_\theta} = 1$, ce qui est impossible; cela implique que $g_a = g_1$.

DÉMONSTRATION DE III. Si A_0 et A_1 sont uniformément convexes ils sont réflexifs et strictement convexes. De plus, si $1 < p < \infty$ alors $L^p(I_0, \nu_{z_0}, A_0)$ et $L^p(I_1, \nu_{z_0}, A_1)$ sont uniformément convexes (*cf.* [10]–[13]); notons par δ_0 le module de convexité de $L^p(A_0)$, δ_1 le module de convexité de $L^p(A_1)$ et $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$; soient $a, b \in S_\theta$, $g_1 = \Gamma(a)$ et $g_2 = \Gamma(b)$, on a alors

$$\left\|\frac{g_1+g_2}{2}\right\|^p_{L^p(A_j)} \leq \frac{1}{2}\|g_1\|^p_{L^p(A_j)} + \frac{1}{2}\|g_2\|^p_{L^p(A_j)} - \delta_j(\|g_1-g_2\|_{L^p(A_j)}), \quad j = 0, 1$$

donc

$$\left\|\frac{g_1+g_2}{2}\right\|^p_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})} \leq \frac{1}{2}\|g_1\|^p_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})} + \frac{1}{2}\|g_2\|^p_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})} - \delta\Big(\frac{1}{2}\|g_1-g_2\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})}\Big)$$

cela implique que

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^p_{A_\theta} \leq 1 - \delta\Big(\frac{1}{2}\|g_1-g_2\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})}\Big)$$

donc

$$\left\|\frac{a-b}{2}\right\|_{A_\theta} \geq 1 - \left\|\frac{a+b}{2}\right\|_{A_\theta} \geq 1 - \Big(1 - \delta\Big(\frac{1}{2}\|g_1-g_2\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})}\Big)\Big)^{1/p} \geq \frac{1}{p}\delta\Big(\frac{1}{2}\|g_1-g_2\|_{\mathcal{H}^p_{z_0}(\bar{A})}\Big)$$

et nous avons montré que Γ est uniformément continue.

REMARQUE. Si A_0 est uniformément convexe alors A_θ est uniformément convexe pour tout $\theta \in]0, 1[$.

En effet, d'après le théorème de réitération on peut supposer que A_1 est réflexif (si A_0 est réflexif A_β est réflexif pour tout $\beta \in]0, 1[$, *cf.* [4]). Soient $a, b \in S_\theta$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\|a-b\|_{A_\theta} \geq \varepsilon$; d'après la proposition 3,I il existe $g_1, g_2 \in \mathcal{H}^2_{z_0}(\bar{A})$ tels que $\|g_1(e^{it})\|_{A_t} = \|g_2(e^{it})\|_{A_t} = 1$ pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, $g_1(z_0) = a$ et $g_2(z_0) = b$, comme

$$\|a-b\|_{A_\theta} \leq \Big(\frac{1}{1-\theta}\int_{I_0}\|g_1(e^{it}) - g_2(e^{it})\|^2_{A_0}\, d\nu_{z_0}(t)\Big)^{(1-\theta)/2}$$
$$\Big(\frac{1}{\theta}\int_{I_1}\|g_1(e^{it}) - g_2(e^{it})\|^2_{A_1}\, d\nu_{z_0}(t)\Big)^{\theta/2}$$

alors $\|g_1-g_2\|^2_{L^2(I_0,\alpha,A_0)} \geq (\varepsilon^{2/1-\theta})(2^{-\theta/1-\theta})$, où $d\alpha = d\nu_{z_0}/1-\theta$; il est facile de voir que

$$1 - \left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2_{A_\theta} \geq (1-\theta)\Big(1 - \left\|\frac{g_1+g_2}{2}\right\|^2_{L^2(I_0,\alpha,A_0)}\Big) \geq (1-\theta)\delta_{L^2(I_0,\alpha,A_0)}\big((2^{-\theta/2}\varepsilon)^{1/1-\theta}\big)$$

où $\delta_{L^2(I_0,\alpha,A_0)}$ est le module de convexité de $L^2(I_0, \alpha, A_0)$.

Ce qui précède est un résultat de M. Cwikel et S. Reisner [7]; ils ont montré que si A_0 est uniformément convexe alors A_θ est uniformément convexe et $\delta_{A_\theta}(\varepsilon) \geq C\delta_{A_0}(\varepsilon^{1/1-\theta})$; ils ont aussi montré que si A_0, A_1 sont uniformément convexes alors $\delta_{A_\theta}(\varepsilon) \geq C\delta(\varepsilon)$ où δ est la fonction inverse de $(\delta^{-1}_{A_0})^{1-\theta}(\delta^{-1}_{A_1})^\theta$.

THÉORÈME. *Soient* (A_0, A_1) *un couple d'interpolation et* $\theta_1, \theta_2 \in]0,1[$, *avec* $A_0 \cap A_1$ *dense dans* A_0 *et* A_1*; si on suppose que* A_0 *est uniformément convexe alors il existe un homéomorphisme uniforme* $U: S_{\theta_1} \longrightarrow S_{\theta_2}$*; plus précisément, dans le cas où* A_0 *et* A_1 *sont uniformément convexes, on peut poser* $U(a) = \Gamma(a)(\theta_2)$*, où* Γ *est l'application de la sphère unité de* A_{θ_1} *dans* $\mathcal{F}^\infty(\bar{A})$ *qui associe à chaque* $a \in S(A_{\theta_1})$ *sa représentation minimale* $\Gamma(a)$.

PREUVE. Par le théorème de réitération (*cf.* [2], [6]) et le théorème de M. Cwikel et S. Reisner [7] on peut supposer que A_0 et A_1 sont uniformément convexes car on a (isométriquement) $A_\theta = (A_0, A_\beta)_\eta$ où $\theta = \beta\eta$ et $\eta, \beta \in]0,1[$. D'après la remarque suivant l'énoncé de la proposition 3 on peut considérer que Γ est à valeurs dans $\mathcal{F}^\infty(\bar{A})$; On définit $U: S_{\theta_1} \longrightarrow S_{\theta_2}$ par $U(a) = \Gamma(a)(\theta_2)$; posons $\Gamma(a) = F$ et $F(\theta_2) = b$; montrons que $\|b\|_{A_{\theta_2}} = 1$, pour cela soit $a^* \in S(A^*_{\theta_1})$ tel que $(a, a^*) = 1$; on sait que le dual $A^*_{\theta_1}$ est égal à $(A^*_0, A^*_1)_{\theta_1}$. D'après I de la proposition 3 il existe $F^* \in \mathcal{F}^2_{\theta_1}(\bar{X})$ (où $X_j = A^*_j, j = 0,1$) tel que $F^*(\theta_1) = a^*$ et $\|F^*\|_{\mathcal{F}^2_{\theta_1}(\bar{X})} = 1$. Posons $G(z) = \big(F(z), F^*(z)\big)$ pour tout $z \in S_0$; en utilisant la suite d'approximation $(K_n)_{n\geq 0}$ et le lemme 4.2.4 de [2] on peut approximer F dans $\mathcal{F}^2_{\theta_2}(\bar{A})$ par une suite $(F_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{F}_0(\bar{A})$ par conséquent $G(z) = \lim_{n\to+\infty}\big(F_n(z), F^*(z)\big)$ uniformément sur tout compact de S_0; pour chaque $n \in \mathbb{N}$ l'application $z \longrightarrow \big(F_n(z), F^*(z)\big)$ est holomorphe donc G est holomorphe.

Pour tout $z \in S_0$, $|G(z)| \leq 1$ et $G(\theta_1) = 1$; par le principe de maximum des fonctions holomorphes on a $G(z) = 1$ pour tout $z \in S_0$ en particulier $G(\theta_2) = 1$; cela implique que $\|F(\theta_2)\|_{A_{\theta_2}} \geq 1$ mais on sait que $\|F(\theta_2)\|_{A_{\theta_2}} \leq 1$. On déduit que $\|b\|_{A_{\theta_2}} = \|U(a)\|_{A_{\theta_2}} = 1$.

Il est clair que U est bijective, son inverse étant simplement l'application analogue V qui associe à chaque $b \in S_{\theta_2}$ la valeur en θ_1 de sa représentation minimale; par la proposition 3,III les applications U et V sont uniformément continues, donc U est un homéomorphisme uniforme, d'où le théorème.

DÉFINITION. Soit E un treillis de Banach; on dit que E est p-convexe $(1 \leq p < +\infty)$ s'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout entier $n \geq 0$ et pour tous $x_0, \ldots, x_n \in E$ on ait

$$(a) \qquad \Big\| \Big(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} \Big\| \leq M \Big(\sum_{i=0}^{n} \|x_i\|^p\Big)^{1/p}$$

on note par $M^p(X)$ la plus petite constante M qui vérifie (a), voir [13].

On dit que E est q-concave $(1 \leq q \leq +\infty)$ s'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout entier $n \geq 0$ et pour tous $x_0, \ldots, x_n \in E$ on ait

$$(b) \qquad \Big(\sum_{i=0}^{n} \|x_i\|^q\Big)^{1/q} \leq M \Big\| \Big(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^q\Big)^{1/q} \Big\|$$

on note par $M_q(X)$ la plus petite constante M qui vérifie (b).

COROLLAIRE 1. *Soit* X *un treillis de Banach p-convexe et q-concave* $(1 < p \leq q < +\infty)$*; il existe un espace de Hilbert* L *et un homéomorphisme uniforme* $U: S(X) \longrightarrow S(L)$.

PREUVE. Supposons d'abord le treillis X complexe. D'après la proposition 1.d.8 de [13] on peut renormer le treillis X de façon que $M^p(X) = M_q(X) = 1$. Par cette opération la sphère unité de X est modifiée, mais il est clair que la nouvelle sphère est uniformément homéomorphe à l'ancienne. Par le théorème de G. Pisier (*cf.* [16]) il existe $\theta \in]0,1[$, un espace de probabilité (Ω, Σ, μ) et un treillis de fonctions Y (que l'on peut supposer uniformément convexe) tels que $L^1(\mu) \subseteq Y \subseteq L^\infty(\mu)$ et $X = (Y, L)_\theta$ où $L = L^2(\mu)$; comme $(Y, Y^*)_{1/2} = L$ (*cf.* [4]) alors $X = (Y, Y^*)_{\theta/2}$ (le théorème de réitération), en utilisant le théorème on déduit qu'il existe un homéomorphisme uniforme $U: S(X) \longrightarrow S(L)$.

Dans le cas où le treillis est réel, on peut commencer par le complexifier de la façon usuelle; on remarque ensuite que l'application U construite dans le théorème transforme les fonctions réelles en fonctions réelles. En effet, si f est un élément réel de S_{θ_1} et F sa représentation minimale, $G(z) = \overline{F(\bar{z})}$ est une autre représentation minimale, donc $G = F$ et $F(\theta_2)$ est une fonction réelle.

COROLLAIRE 2 (F. CHAATIT [5]). *Soit X un treillis de Banach avec une unité faible; si X ne contient pas les ℓ_n^∞ uniformément alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et un homéomorphisme uniforme $U: S(X) \longrightarrow S\big(L^1(\mu)\big)$.*

Rappelons très brièvement le principe de la démonstration de Chaatit pour ce corollaire: on considère le treillis convexifié $X^{(p)}$ pour lequel le corollaire 1 s'applique, et on montre ensuite que les sphères de X et $X^{(p)}$ sont uniformément homéomorphes par une généralisation de l'application de Mazur.

RÉFÉRENCES

1. B. Beauzamy, *Introduction to Banach spaces and their geometry*, Notas Mat., North-Holland.

2. J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces*, Springer-Verlag **223**, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

3. J. Bergh, *On the relation between the two complex methods of interpolation*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), 775–777.

4. A. P. Calderon, *Intermediate spaces and interpolation the complex method*, Studia Math. **24**(1964), 113–190.

5. F. Chaatit, *On uniform homeomorphisms of the unit spheres of certain Banach Lattices*, à paraître.

6. M. Cwikel, *Complex interpolation spaces, a discrete definition and reiteration*, Indiana Univ. Math. J., (1978), 1005–1009.

7. M. Cwikel and S. Reisner, *Interpolation of uniformly convex Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **84**(1982), 555–559.

8. J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector measures*, Math. Surveys **15**, Amer. Math. Soc., 1977.

9. P. Enflo, *On a problem of Smirnov*, Ark. Mat. **8**(1969), 107–109.

10. T. Figiel et G. Pisier, *Séries aléatoires dans les espaces uniformément convexes ou uniformément lisses*, C. R. Acad. Sci. Paris (A) **279**(1974), 611–614.

11. U. Haagerup and G. Pisier, *Factorization of analytic functions with values in non-commutative L_1-spaces and applications*, Canad. J. Math. **XLI**(1989), 882–906.

12. N. J. Kalton, *communication personnelle*.

13. J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach spaces, Vol.2*, Ergeb. Math. Grenzgeb. **97**, Springer Verlag, 1979.

14. B. Maurey et G. Pisier, *Séries de variables aléatoires indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. **58**(1976), 45–90.

15. E. Odell et Th. Schlumprecht, *The distortion problem*, Acta Math., (1995).
16. G. Pisier, *Some applications of the complex interpolation method to Banach Lattices*, J. Anal. Math. **35**(1979), 264–281.

Université Paris VII
Paris
France