Canad. Math. Bull.Vol. **34** (4), 1991 pp. 485–491

SIMILARITÉ ENTRE CERTAINS QUOTIENTS DE A^+ ET DES QUOTIENTS D'ALGÈBRES UNIFORMES

KONIN KOUA

RÉSUMÉ. Let $A(D)$ be the usual disc algebra, and let A^+ be the subalgebra of $A(D)$ consisting in those $f \in A(D)$ which have an absolutely convergent series of Taylor coefficients. Set $m_1 = \{f \in A(D) \mid f(1) = 0\}$, $m = m_1 \cap A^+$, let G be the function $z \longmapsto \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, $I_1 = Gm_1$ and $K = A^+ \cap I_1$.

We show that the quotient algebras m_1/I_1 and m/K are similar in the sense of J. Esterle.

1. **Introduction.** Soient $A(D)$ l'algèbre du disque unité usuelle, A^+ la sous-algèbre de $A(D)$ formée des fonctions f ayant une série de Taylor absolument convergente. A^+ est une algèbre de Banach pour la norme $\|f\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|$, où les $\hat{f}(n)$ sont les coefficients de Fourier de $f \in A^+$. On note respectivement $\mathcal{M}_1$, (et $\mathcal{M}$) l'idéal fermé de $A(D)$ (de A^+) formé des fonctions nulles en $z = 1$.

Soit A_0 l'ensemble des fonctions f définies et continues sur le demi-plan droit fermé, analytiques dans le demi-plan droit ouvert et tendant vers zéro à l'infini. A_0 est une algèbre de Banach commutative, uniforme et séparable pour la norme $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}_{\operatorname{Re} z > 0} |f(z)|, f \in A_0$, et A_0 est isométriquement isomorphe à $\mathcal{M}_1$. Soit I l'idéal fermé de A_0 de la forme $I = e^{-z}A_0$. On désigne par V l'algèbre de Volterra $L^1_*(0, 1)$ des (classes de) fonctions à valeurs complexes absolument intégrables sur $[0, 1]$. Selon le point de vue choisi, on peut identifier V soit à un sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^+)$ en posant $f|_{[1,+\infty[} = 0$ pour tout $f \in V$, soit à $L^1(\mathbb{R}^+)/J$ où $L^1(\mathbb{R}^+)$ est l'algèbre de Banach des (classes de) fonctions à valeurs complexes, Lebesgue intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et J l'idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}^+)$ formé des fonctions nulles presque partout sur $[0, 1]$.

Deux algèbres de Banach commutatives sont dites *similaires* s'il existe une algèbre de Banach commutative $\mathcal{D}$ qui possède un idéal principal dense et deux homomorphismes injectifs continus φ de $\mathcal{D}$ dans A et ψ de $\mathcal{D}$ dans B tels que $\varphi(\mathcal{D})$ est un idéal de A dense dans A et $\psi(\mathcal{D})$ un idéal de B dense dans B. A et B étant similaires, on dira qu'un homomorphisme continu θ de A dans B est un *s-homomorphisme* si le diagramme:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ A \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif ([2], p. 116 et 123).

Reçu par les editeurs le 29 décembre 1989.

AMS subject classification: 46J10.

Soit G la fonction intérieure définie sur $\bar{D}\setminus\{1\}$ par $G(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$. $G \notin A(D)$, mais G est continue sur $\bar{D}\setminus\{1\}$ (et bornée par 1). Posons $I_1 = G\mathcal{M}_1$, alors I_1 est un idéal fermé de $A(D)$ strictement contenu dans $\mathcal{M}_1$. On pose $K = A^+ \cap I_1$. C'est un idéal de A^+ contenu dans $\mathcal{M}$.

On montre dans cet article que $\mathcal{M}/K$ et $\mathcal{M}_1/I_1$ sont similaires (théorème 5). On en déduit alors que $\mathcal{M}/K$ et V sont similaires puisque V et A_0/I le sont ([5] théorème III-8), que A_0/I est isométriquement isomorphe à $\mathcal{M}_1/I_1$ et que la similarité est une relation transitive ([2] proposition 7-5).

La structure des idéaux fermés de A^+ reste très mal connue. Les idéaux I tels que $h(I) = \{z \in \bar{D} \mid f(z) = 0\ \forall f \in I\}$ est réduit à un point z_0 du cercle ont été caractérisés par Kahane [4]. Ces idéaux sont de la forme $J \cap A^+$ où J est un idéal fermé de $A(D)$ défini de manière analogue à I_1. Des modifications évidentes de la démonstration du théorème 5 (cf. remarque 7) montrent que dans ce cas les algèbres quotients $\mathcal{M}_{z_0}/I$ et $\mathcal{M}_{1,z_0}/J$ où $\mathcal{M}_{z_0}$ et $\mathcal{M}_{1,z_0}$ sont les analogues de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_1$, sont similaires.

Bennett et Gilbert [1] ont montré plus généralement que si $h(I) = S$ est dénombrable il existe un idéal fermé J de $A(D)$ tel que $I = A^+ \cap J$. L'étude des éventuelles similarités entre $\mathcal{M}_s/I$ et $\mathcal{M}_{1,s}/J$ (où $\mathcal{M}_{1,s} = \{f \in A(D) \mid f \equiv 0 \text{ sur } S\}$ et $\mathcal{M}_s = A^+ \cap \mathcal{M}_{1,s}$) sera abordée dans un travail ultérieur.

Je remercie J. Esterle pour sa constante disponibilité et ses fructueux conseils pendant la réalisation de ce travail.

2. **Un resultat de similarité.** Soit $a^t(z) = \exp\left(t\frac{z+1}{z-1}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$, a^t est une fonction holomorphe et bornée dans $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, continue sur $\bar{D}\setminus\{1\}$ et de module 1 en z pour $|z| = 1$, $z \neq 1$.

Soit ϕ l'application qui à tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ associe $\phi(f)$ définie par:

$$\phi(f)(z) = \begin{cases} \int^{+\infty} f(t)a^t(z)\,dt & \text{si } z \in \bar{D}\setminus\{1\} \\ 0 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

On a la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *ϕ est un homomorphisme d'algèbre de $L^1(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathcal{M}_1$.*

PREUVE. Pour tout $z \in \bar{D}\setminus\{1\}$, on a

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \geq 0 \text{ et } \phi(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{t\frac{z+1}{z-1}}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t\frac{1+z}{1-z}}\,dt$$

donc $\phi(f)(z) = \mathcal{L}(f)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, où $\mathcal{L}$ est la transformée de Laplace. Donc l'intégrale a un sens pour tout $z \in \bar{D}\setminus\{1\}$ et $\phi(f)$ est analytique dans D et continue sur $\bar{D}\setminus\{1\}$. On a évidemment $\phi(f * g) = \phi(f)\cdot\phi(g), f, g \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Puisque $\mathcal{L}(f)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ tend vers zéro quand $z \longrightarrow 1$, $\phi(f)$ est continue sur $\bar{D}$, et la proposition est démontrée.

Posons, pour $f \in \mathcal{M}_1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\rho(f)(z) = f\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$. Alors $\rho(f) \in A_0$ et ρ est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{M}_1$ sur A_0. L'isomorphisme réciproque ρ^{-1} est donné pour $F \in A_0$ par la formule:

$$\rho^{-1}(F)(z) = \begin{cases} F\left(\frac{1+z}{1-z}\right) & \text{si } z \in \bar{D} \setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

On a alors $\phi = \rho^{-1} \circ \mathcal{L}$ et $\mathcal{L} = \rho \circ \phi$.

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que $\int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt < +\infty$, il est facile de voir que l'application g définie sur le produit cartésien $R_+^* \times (\bar{D} \setminus \{1\})$ par $g(t,z) = f(t)a^t(z)$ vérifie toutes les conditions de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre. On a donc:

$$\begin{aligned} \phi(f)'(z) &= \int_0^{+\infty} -\frac{\partial g}{\partial z}(t,z)\,dt \\ &= -\frac{2}{(z-1)^2} \int_0^{+\infty} t\,g(t,z)\,dt \\ &= -\frac{2}{(z-1)^2} \int_0^{+\infty} tf(t)a^t(z)\,dt. \end{aligned}$$

Par suite $|(z-1)^2 \phi(f)'(z)| \leq 2 \int_0^{+\infty} t|f(t)| < +\infty$ (*). Ceci montre que $\phi(f)$ est dérivable sur $\bar{D} \setminus \{1\}$ et que $(z-1)^2 \phi(f)' \in H^\infty$.

Soit maintenant u l'application $t \longrightarrow e^{-t}$, $t > 0$. On note u^2 pour u^{*2}. On a le résultat suivant:

PROPOSITION 2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Si $\int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt < +\infty$ alors $\phi(u^2 * f) \in \mathcal{M}$ et* $\|\phi(u^2 * f)\|_1 \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)\|f\|_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt$ (**).

PREUVE. Comme $\mathcal{L}(u)(x) = \frac{1}{1+x}$ pour $\operatorname{Re} x \geq 0$, on a:

$$\mathcal{L}(u)\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1+z}{1-z}} = \frac{1-z}{2}.$$

Donc $\phi(u)(z) = \frac{1-z}{2}$, $z \in \bar{D} \setminus \{1\}$. Par suite

$$\begin{aligned} \phi(u^2 * f)(z) &= \big(\phi(u^2) \cdot \phi(f)\big)(z) \\ &= \frac{(1-z)^2}{4} \phi(f)(z), \ \big(f \in L^1(\mathbb{R}^+)\big). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\phi(u^2 * f)'(z) = \frac{z-1}{2}\phi(f)(z) + \frac{(1-z)^2}{4}\phi(f)'(z)$. Donc si $\int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt < +\infty$, on a $\phi(u^2 * f)' \in H^\infty \cap \mathcal{C}(\bar{D} \setminus \{1\})$. On sait d'après un résultat classique que si $f \in A(D)$, $f' \in H^\infty$ alors $f \in A^+$. Plus précisément, si $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ on a pour $r < 1$ d'après Kahane ([3], p. 56)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n &\leq |a_0| + \left[\frac{\pi}{12} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(\mathrm{re}^{it})|^2\,dt\right]^{1/2} \\ &\leq |f(0)| + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|f'\|_\infty \end{aligned}$$

d'où $\|f\|_1 = \overline{\lim}_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \leq |f(0) + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|f'\|_\infty$. Donc si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ vérifie $\int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt < +\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\|\phi(u^2 * f)'\|_\infty &\leq \|\phi(f)\|_\infty + \frac{1}{4} \sup_{|z|<1} |(z-1)^2 \phi(f)'(z)| \\
&\leq \|\phi(f)\|_\infty + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt \quad (\text{ d'après l'inégalité } (*)) \\
&\leq \|f\|_1 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt
\end{aligned}$$

On obtient que $\phi(u^2 * f) \in A^+ \cap \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$ et on a

$$\|\phi(u^2 * f)\|_1 \leq |\phi(u^2 * f)(0)| + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|f\|_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt.$$

Par suite $\|\phi(u^2 * f)\|_1 \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{\sqrt{6}}\right) \|f\|_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt$, d'où la proposition.

Soit θ_1 la surjection canonique de $\mathcal{M}_1$ sur $\mathcal{M}_1/I_1$. Comme $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$ et $K = \mathcal{M} \cap I_1$, on peut identifier $\mathcal{M}/K$ à $\theta_1(\mathcal{M})$. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ tel que $\int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt < +\infty$, on a $\theta_1\big(\phi(u^2 * f)\big) \in \mathcal{M}/K$ d'après la proposition 2.

Soit V l'algèbre de Volterra munie du produit de convolution

$$(f \,\tilde{*}\, g)(x) = \int_0^x f(x-t) g(t)\,dt,$$

$0 \leq x \leq 1, f, g \in V$. On identifie isométriquement V à un sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^+)$ en posant $f|_{[1,+\infty]} = 0$ pour tout $f \in V$. On a alors $f \,\tilde{*}\, g - f * g \equiv 0$ pp sur $[0,1]$ pour $f, g \in V$. Notons r l'application restriction $f \longrightarrow f|_{[0,1]}$ de sorte que r est un homomorphisme surjectif de $L^1(\mathbb{R}^+)$ sur V.

Posons $I = e^{-z} A_0$. Alors $I = \rho(I_1)$ et il existe un isomorphisme isométrique $\tilde{\rho}$ de $\mathcal{M}_1/I_1$ sur A_0/I tel que le diagramme suivant (où θ est la surjection canonique de A_0 sur A_0/I) soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\theta_1} & \mathcal{M}_1/I_1 \\
{\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\rho}} \\
A_0 & \xrightarrow[\theta]{} & A_0/I
\end{array}$$

On a alors $\tilde{\rho} \circ \theta_1 \circ \varphi^{-1} = \theta$. On déduit de la proposition 2 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. *Soient* $\delta = \theta_1 \circ \phi|_V$ *et* $v = u^2|_{[0,1]}$. *Posons* $k = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{2\sqrt{6}}$. *Alors* $\delta \circ r = \theta_1 \circ \phi$ *et* δ *est un homomorphisme continu de* V *dans* $\mathcal{M}_1/I_1$. *De plus* $\delta(v \,\tilde{*}\, V) \subset \mathcal{M}/K$ *et* $\|\delta(v \,\tilde{*}\, f)\|_{\mathcal{M}/K} \leq k\|f\|_1$ *pour tout* $f \in V$.

PREUVE. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Alors $f - r(f) \equiv 0$ sur $[0,1]$, donc $\mathcal{L}\big(f - r(f)\big) \in I$ (voir par exemple [6] lemme 4-4). Ainsi

$$\begin{aligned}
\phi(f) - (\phi \circ r)(f) &= (\rho^{-1} \circ \mathcal{L})(f) - (\rho^{-1} \circ \mathcal{L} \circ r)(f) \\
&= \rho^{-1}\big(\mathcal{L}(f) - (\mathcal{L} \circ r)(f)\big) \in \rho^{-1}(I) = I_1
\end{aligned}$$

Par suite $(\theta_1 \circ \phi)(f) = (\theta_1 \circ \phi \circ r)(f)$, $\big(f \in L^1(\mathbb{R}^+)\big)$. Donc $\delta \circ r = \theta_1 \circ \phi$. Soient $f, g \in V$. On a

$$\begin{aligned}\delta(f \tilde{*} g) &= (\delta \circ r)(f * g) = (\theta_1 \circ \phi)(f * g)\\ &= (\theta_1 \circ \phi)(f) \cdot (\theta_1 \circ \phi)(g)\\ &= \delta(f) \cdot \delta(g),\end{aligned}$$

et δ est un homomorphisme qui est évidemment continu.

Si $f \in V$, on a

$$\begin{aligned}\delta(v \tilde{*} f) &= \delta\Big(r(u^2 * f)\Big) = (\theta_1 \circ \phi)(u^2 * f)\\ &= \theta_1\big(\phi(u^2 * f)\big) \in \mathcal{M}/K \text{ d'après la proposition 2.}\end{aligned}$$

Comme $\|\delta(v \tilde{*} f)\|_{\mathcal{M}/K} = \|(\theta_1 \circ \phi)(u^2 * f)\|_{\mathcal{M}/K} \leq \|\phi(u^2 * f)\|_1$, on a d'après l'inégalité $(**)$

$$\begin{aligned}\|\delta(v \tilde{*} f)\|_{\mathcal{M}/K} &\leq \Big(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{\sqrt{6}}\Big)\|f\|_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \int_0^1 t|f(t)|\, dt\\ &\leq \Big(\frac{1}{4} + \frac{3\pi}{2\sqrt{6}}\Big)\|f\|_1\end{aligned}$$

ce qui montre bien que

$$\|\delta(v \tilde{*} f)\|_{\mathcal{M}/K} \leq k\|f\|_1$$

pour tout $f \in V$, d'où le corollaire.

Soit $\mu = \phi(u)$ l'application $z \mapsto \frac{1-z}{2}$, $z \in \bar{D}$. Alors les polynômes en μ sans terme constant sont denses dans $\mathcal{M}_1$ et dans $\mathcal{M}$ et on a $[\mu^4\mathcal{M}_1]^- = \mathcal{M}_1$ et $[\mu^4\mathcal{M}]^- = \mathcal{M}$.

Posons $D_1 = \theta_1(\mu^4)(\mathcal{M}_1/I_1)$. Alors D_1 est un idéal dense de $\mathcal{M}_1/I_1$ et de même que dans ([5] proposition III-4), on voit que D_1 est une algèbre de Banach pour la norme $\|\theta_1(\mu^4)w\|_{D_1} = \|w\|_{\mathcal{M}_1/I_1}$, $w \in \mathcal{M}_1/I_1$ et que $\theta_1(\mu^5)D_1$ est dense dans $(D_1, \|\cdot\|_{D_1})$.

LEMME 4. *$D_1 \subset \mathcal{M}/K$ et l'injection canonique $(D_1, \|\cdot\|_{D_1}) \longrightarrow (\mathcal{M}/K, \|\cdot\|_{\mathcal{M}/K})$ est continue.*

PREUVE. Posons $\beta(z) = \big(\frac{1}{(1+z)^2}\big)$, $(\operatorname{Re} z \geq 0)$, de sorte que $\beta = \mathcal{L}(u^2)$ et posons $\mathcal{D} = \theta(\beta)(A_0/I)$. Alors d'après ([5] proposition III-4) $\mathcal{D}$ est une algèbre de Banach pour la norme $\|\theta(\beta)w\|_{\mathcal{D}} = \|w\|_{A_0/I}$, $w \in A_0/I$. Soit $\tilde{\mathcal{L}} = \theta \circ \mathcal{L}|_V$. D'après ([5] proposition III-6) il existe un homomorphisme injectif continu $\varphi: (\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}}) \longrightarrow V$ tel que $\tilde{\mathcal{L}} \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.

On a $\tilde{\rho}(D_1) \subset \mathcal{D}$. Donc $i = \delta \circ \varphi \circ (\tilde{\rho}|_{D_1})$ est un homomorphisme bien défini de D_1 dans $\mathcal{M}_1/I_1$. Comme $\tilde{\mathcal{L}}(v) = \theta(\beta)$, on a

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathcal{L}} \circ \varphi)\big(\theta(\beta^2) \cdot w\big) &= \theta(\beta^2) \cdot w\\ &= \theta(\beta)\big(\theta(\beta) \cdot w\big)\\ &= \tilde{\mathcal{L}}(v) \cdot \Big((\tilde{\mathcal{L}} \circ \varphi)\big(\theta(\beta) \cdot w\big)\Big)\\ &= \tilde{\mathcal{L}}\Big(v \tilde{*} \varphi\big(\theta(\beta) \cdot w\big)\Big).\end{aligned}$$

Donc $\varphi\big(\theta(\beta^2)\cdot w\big) = v\tilde{*}\varphi\big(\theta(\beta)\cdot w\big)$ pour tout $w \in A_0/I$ car $\tilde{L}$ est injectif ([5] remarque II-4).

Soit $u_1 \in \mathcal{M}_1/I_1$. On a $\tilde{\rho}\big(\theta(\mu^4)\cdot u_1\big) = \theta(\beta^2)\tilde{\rho}(u_1)$. Donc

$$\begin{aligned} i\big(\theta_1(\mu^4)u_1\big) &= (\delta\circ\varphi\circ\tilde{\rho}|_{D_1})\big(\theta_1(\mu^4)\cdot u_1\big)\\ &= \delta\Big(\varphi\big(\theta(\beta)^2\tilde{\rho}(u_1)\big)\Big)\\ &= \delta\Big(v\,\tilde{*}\,\varphi\big(\theta(\beta)\tilde{\rho}(u_1)\big)\Big). \end{aligned}$$

D'après le corollaire 3, $i\big(\theta_1(\mu^4)\cdot u_1\big) \in \mathcal{M}/K$ et

$$\begin{aligned} \|i\big(\theta_1(\mu^4)\cdot u_1\big)\|_{\mathcal{M}/K} &\le k\|\varphi[\theta(\beta)\tilde{\rho}(u_1)]\|_1 \le k\|\varphi\|\,\|\theta(\beta)\tilde{\rho}(u_1)\|_{\mathcal{D}}\\ &\le k\|\varphi\|\,\|\tilde{\rho}(u_1)\| = k\|\varphi\|\,\|u_1\|\\ &= k\|\varphi\|\,\|\theta(\mu^4)u_1\|_{D_1}. \end{aligned}$$

Ainsi $i(D_1) \subset \mathcal{M}/K$ et i est continu. Montrons pour conclure que $i = \mathrm{Id}_{D_1}$. On a $\tilde{\rho}\circ\theta_1\circ\phi = \rho\circ\theta_1\circ(\rho^{-1}\circ L) = \theta\circ L$. Donc $\tilde{\rho}\circ\delta = \theta\circ L|_V = \tilde{L}$. Par suite $\delta = \tilde{\rho}^{-1}\circ\tilde{L}$. D'où $i = \delta\circ\varphi\circ\tilde{\rho}|_{D_1} = \tilde{\rho}^{-1}\circ(\tilde{L}\circ\varphi)\circ\tilde{\rho}|_{D_1} = \tilde{\rho}^{-1}\circ\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}\circ\tilde{\rho}|_{D_1} = \mathrm{Id}_{D_1}$. Ceci achève la preuve du Lemme. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 5. *Les algèbres quotients $\mathcal{M}/K$ et $\mathcal{M}_1/I_1$ sont similaires et l'injection naturelle j: $\mathcal{M}/K \longrightarrow \mathcal{M}_1/I_1$ est un s-homomorphisme.*

PREUVE. On a $D_1 \supset \theta_1(\mu^4)(\mathcal{M}/K) = \theta_1(\mu^4\mathcal{M})$ qui est dense dans $\mathcal{M}/K$ puisque $\mu^4\mathcal{M}$ est dense dans $\mathcal{M}$. Donc D_1 est dense dans $\mathcal{M}/K$. Comme D_1 possède un idéal principal dense et est dense dans $\mathcal{M}_1/I_1$ le théorème résulte immédiatement du lemme 4.

REMARQUE 6. Comme A_0/I est isomorphe à $\mathcal{M}_1/I_1$ et comme la similarité est une relation transitive ([2] proposition 7-5), il résulte du théorème 5 que les algèbres $\mathcal{M}/K$, $\mathcal{M}_1/I_1$ et V sont similaires entre elles puisque A_0/I est similaire à V ([5] théorème III-8).

En fait le double diagramme commutatif suivant (où i, i_1 et j sont les injections canoniques) fait apparaître directement les similarités entre $\mathcal{M}/K$, $\mathcal{M}_1/I_1$ et l'algèbre de Volterra V:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] & \mathcal{M}_1/I_1 & \mathcal{M}/K \arrow[l, "j"'] \\ & D_1 \arrow[ul, "\varphi\circ\tilde{\rho}"] \arrow[u, "i_1"'] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

En effet, comme $\tilde{\rho}(D_1) = \theta(\beta)\mathcal{D}$, on a $(\varphi\circ\tilde{\rho})(D_1) = \varphi\big(\theta(\beta)\mathcal{D}\big) = v\,\tilde{*}\,\varphi(\mathcal{D})$. Donc $(\varphi\circ\tilde{\rho})(D_1)$ est un idéal dense de V puisque $\varphi(\mathcal{D})$ est un idéal de V dense dans V ([5] preuve du théorème III-8). Le double diagramme fait donc bien apparaître, grâce à D_1, les trois relations de similarité. Notons également que $\delta: V \longrightarrow \mathcal{M}_1/I_1$ est un s-homomorphisme.

REMARQUE 7. Kahane a montré [4] que si I est un idéal fermé de A^+ tel que $h(I) = \{z_0\}$ avec $|z_0| = 1$, alors $I = J\cap A^+$ où $J = G_{t,z_0}\cdot\mathcal{M}_{1,z_0}$ pour un certain $t > 0$, avec

$\mathcal{M}_{1,z_0} = \{f \in A(D \mid f(z_0) = 0\}$ et $G_{t,z_0}(z) = \exp\left(t\frac{z+z_0}{z-z_0}\right)$. Il est clair que la démonstration du théorème 5, qui correspond au cas $z_0 = t = 1$, s'étend trivialement au cas général.

Si $h(I) = \{z_0\}$, $|z_0| < 1$, alors il est immédiat que $I = \{f \in A^+ \mid f(z_0) = \cdots = f^{(k)}(z_0) = 0\}$ pour un certain $k \geq 1$ et A^+/I est évidemment isomorphe à $A(D)/J$ où J est l'idéal défini de manière analogue dans $A(D)$. On a donc toujours similarité entre $\mathcal{M}_{z_0}/I$ et $\mathcal{M}_{1,z_0}/J$ pour un cetain idéal fermé J de $A(D)$ si $h(I)$ est un singleton $\{z_0\}$ et $\mathcal{M}_{z_0} = A^+ \cap \mathcal{M}_{1,z_0}$.

RÉFÉRENCES

1. C. Bennett et J. E. Gilbert, *Homogeneous algebras on the circle, ideals of analytic functions*, Ann. Inst. Grenoble (3)**22**(1972), 1–19.

2. J. Esterle, *Quasimultipliers, representations of H^∞ and the closed ideal problem for commutative Banach algebras*. Lecture Notes in Math. **975**, 1983, 66–162.

3. J. P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

4. ———, *Idéaux primaires fermés dans certaines algèbres de Banach de fonctions analytiques*. Lecture Notes in Math. **336**, 1973, 5–14.

5. K. Koua, *Similarité entre l'algèbre de Volterra et un quotient d'algèbre uniforme*, (à paraître).

6. E. Strouse, *Closed ideals in convolution algebras and the Laplace transform*, Michigan J. **35**(1988), 185–196.

Laboratoire associé au CNRS n° 226
U.F.R. Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I
351 cours de la Libération
33405 Talence Cedex
France

Adresse Principale:
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques
Université Nationale
22 B.P. 582 Abidjan 22
Côte d'Ivoire