Can. J. Math., Vol. XXXVIII, No. 4, 1986, pp. 1009-1024

EQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN SUR $SU(2)$ ET LEURS ENVELOPPES D'HOLOMORPHIE

AMÉDÉE DEBIARD ET BERNARD GAVEAU

Introduction. Le problème de la construction d'enveloppes d'holomorphie globales ou d'enveloppes polynomialement convexes n'a été que très peu abordé et peu d'exemples explicites sont connus. Il semble donc qu'il soit intéressant de se limiter d'abord au calcul d'enveloppes d'ensembles homogènes, par l'action d'un groupe agissant par transformations holomorphes. C'est le cas des sphères unité de $\mathbf{C}^n$, des polytores par exemple. En s'inspirant des actions de groupes discutés par Ehrenpreis [**2**] ou par Hua [**3**], nous considérons ici l'action des groupes $SU(2)$ et $U(2)$ sur $\mathbf{C}^3$ identifié à l'ensemble des matrices symétriques complexes 2×2. L'action de $SU(2)$ sur $\mathbf{C}^3$ est en fait l'action canonique de $SU(2)$ sur une famille de quadriques $z_1z_2 - z_3^2 = A$ dégénérant vers la quadrique singulière lorsque A tends vers 0. L'étude des orbites est équivalente à l'étude des équations de Cauchy Riemann sur $SU(2)$, invariantes à gauche. Le spectre de l'algèbre des fonctions annulant une telle équation sur $SU(2)$, qui sont invariantes par l'application antipodale est alors un domaine d'holomorphie de l'une de ces quadriques qui est d'ailleurs topologiquement non trivial.

En ce qui concerne l'action de $U(2)$, nos résultats ne sont que partiels, nous ne sommes pas arrivés à déterminer entièrement l'enveloppe polynomialement convexe d'une orbite de l'action de $U(2)$.

Les § 1 et 2 de ce travail définissent l'action de $SU(2)$ sur $\mathbf{C}^3$, en classifient les orbites en orbites générales et spéciales et en étudient les champs tangents complexes lorsque l'orbite est générale. Le § 3 étudie les structures complexes invariantes à gauche sur $SU(2)/(\pm 1)$ et relie le spectre des algèbres des fonctions holomorphes pour ces structures et des domaines de quadriques complexes que le § 4 décrit topologiquement. Le § 5 décrit certaines parties de l'enveloppe polynomialement convexe d'une orbite de l'action de $U(2)$.

Les résultats ont été annoncés dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [**1**].

1. Action de $SU(2)$ dans $\mathbf{C}^3$ et les champs tangents aux orbites. Nous identifierons désormais $\mathbf{C}^3$ à l'ensemble des matrices 2×2 complexes

Reçu le 9 juillet 1985.

symétriques par l'application

$$(z_1, z_2, z_3) \rightarrow Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det Z = z_1 z_2 - z_3^2$$

$$(1.1) \quad Z\bar{Z} = \begin{pmatrix} |z_1|^2 + |z_3|^2 & z_1\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 z_3 + \bar{z}_3 z_2 & |z_2|^2 + |z_3|^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Tr} Z\bar{Z} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2.$$

Si k est un élément du groupe $SU(2)$ identifié à une matrice unitaire 2×2 de déterminant 1, k agit sur les $Z \in \mathbf{C}^3$ par

$$(1.2) \quad Z \rightarrow kZ{}^tk$$

où ${}^tk$ désigne le transposé de k. On vérifie immédiatement que $kZ{}^tk$ est matrice symétrique. Les seuls invariants de cette action sont $\det Z$ et $\operatorname{Tr} Z\bar{Z}$.

Nous identifierons désormais le sphère unité $S^3 \subset \mathbf{C}^2$ à $SU(2)$ par l'application

$$(1.3) \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in S^3 \rightarrow \begin{pmatrix} \zeta_1 & -\bar{\zeta}_2 \\ \zeta_2 & \bar{\zeta}_1 \end{pmatrix} \in SU(2)$$

où

$$(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{C}^2 \quad \text{et} \quad |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = 1.$$

Fixons un point $Z^0 \in \mathbf{C}^3$ et soit $\mathbf{Z} = kZ^{0t}k$ où k est donnée par (1.3). Un calcul élémentaire donne

$$(1.4) \quad \begin{aligned} z_1 &= z_1^0\zeta_1^2 + 2z_3^0\zeta_1\bar{\zeta}_2 + z_1^0\bar{\zeta}_2^2 \\ z_2 &= z_2^0\bar{\zeta}_1^2 + 2z_3^0\bar{\zeta}_1\zeta_2 + z_1^0\zeta_2^2 \\ z_3 &= z_1^0\zeta_1\zeta_2 + z_3^0(|\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2) - z_2^0\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2. \end{aligned}$$

Nous noterons désormais $\mathcal{O}_{Z^0}$ l'orbite de Z^0 par l'action de $SU(2)$ donc l'ensemble des $kZ^{0t}k$ pour $k \in SU(2)$.

Nous déduisons de (1.4) que sur l'orbite paramétrée par k de coordonnées $(\zeta_1, \zeta_2) \in S^3$, on a

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial\zeta_1} = (2z_1^0\zeta_1 - 2z_3^0\bar{\zeta}_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + (2\bar{z}_2^0\zeta_1 + 2\bar{z}_3^0\bar{\zeta}_2)\frac{\partial}{\partial\bar{z}_2}$$
$$+ (z_1^0\zeta_2 + z_3^0\bar{\zeta}_1)\frac{\partial}{\partial z_3} + (-\bar{z}_3^0\zeta_2 - \bar{z}_2^0\zeta_2)\frac{\partial}{\partial\bar{z}_3}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-049-8 Published online by Cambridge University Press

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2} = (-2\bar{z}_3^0\bar{\zeta}_1 + 2\bar{z}_2\zeta_2)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + (2z_1^0\zeta_2 + 2z_3^0\bar{\zeta}_1)\frac{\partial}{\partial z_2}$$
$$+ (z_1^0\zeta_1 - z_3^0\bar{\zeta}_2)\frac{\partial}{\partial z_3} + (-\bar{z}_3^0\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2^0\zeta_1)\frac{\partial}{\partial \bar{z}_3}.$$

Notons par ailleurs

$$A = \bar{\zeta}_2\frac{\partial}{\partial \zeta_1} - \bar{\zeta}_1\frac{\partial}{\partial \zeta_2}$$
$$(1.6) \qquad \bar{A} = -\zeta_1\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1}$$
$$[A, \bar{A}] = -\bar{\zeta}_2\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} - \bar{\zeta}_1\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial \zeta_2}.$$

Ce sont les trois champs invariants à gauche sur $SU(2)$, A étant le champ holomorphe tangent à $SU(2) \simeq S^3$ pour la structure complexe induite par le plongement de S^3 dans $\mathbf{C}^2$.

Si C est un champ de vecteurs tangent à l'orbite $\mathcal{O}_{Z^0}$, il est évidemment combinaison linéaire de A, $\bar{A}$ et $[A, \bar{A}]$ lorsque $\mathcal{O}_{Z^0}$ est paramétrisée par $(\zeta_1, \zeta_2) \in S^3$. Si C est de plus invariant à gauche par $SU(2)$ sur $\mathcal{O}_{Z^0}$, c'est une combinaison linéaire à coefficients constants de A, $\bar{A}$ et $[A, \bar{A}]$.

Si C est un champ holomorphe tangent à $\mathcal{O}_{Z^0}$ qu'on peut supposer invariant à gauche par l'action de $SU(2)$, il est facile de voir que ce champ doit être, au point $kZ^{0\,t}k$

$$(1.7) \qquad \bar{z}_1^0 A + \bar{z}_2^0\bar{A} + \bar{z}_3^0[A, \bar{A}]$$

A, $\bar{A}$ et $[A, \bar{A}]$ étant pris en $k \in SU(2)$. Dans (1.7) le tableau des coefficients des $\dfrac{\partial}{\partial \zeta_i}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_i}$ est

$$(\bar{z}_1^0\zeta_2 + \bar{z}_3^0\zeta_1)\frac{\partial}{\partial \zeta_1} - (\bar{z}_1^0\bar{\zeta}_1 + \zeta_2\bar{z}_3^0)\frac{\partial}{\partial \zeta_2}$$
$$+ (\bar{z}_2^0\zeta_2 - \bar{z}_3^0\bar{\zeta}_1)\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} + (-\bar{z}_2^0\zeta_1 + \bar{\zeta}_2\bar{z}_3^0)\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2}.$$

Si nous écrivons que les coefficients de $\dfrac{\partial}{\partial \zeta_1}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1}$ sont nuls simultanément, nous obtenons

$$(1.8) \qquad \begin{aligned} \bar{z}_1^0\zeta_2 + \bar{z}_3^0\zeta_1 &= 0 \\ \bar{z}_2^0\zeta_2 - \bar{z}_3^0\zeta_1 &= 0 \end{aligned}$$

qui doit donc avoir une solution non nulle si et seulement si

$$z_3^0\bar{z}_1^0 + \bar{z}_3^0 z_2^0 = 0,$$

la solution étant dans ce cas

$$\zeta_1 = -\alpha\bar{z}_1^0,\ \zeta_2 = \alpha\bar{z}_3^0$$

(α est telle que $(\zeta_1, \zeta_2) \in S^3$).

De cela, nous déduisons évidemment le lemme

LEMME 1. *Si il existe un point Z de l'orbite $\mathcal{O}_{Z^0}$ tel que*

$$\bar{z}_1 z_3 + z_2\bar{z}_3 = 0,$$

alors cette relation est vraie sur toute l'orbite $\mathcal{O}_{Z^0}$.

Remarque. On peut vérifier cela par un calcul direct sur (1.4).

2. Classification des orbites.

a) *Orbites spéciales et générales.*

LEMME 2. det Z *et* Tr $Z\bar{Z}$ *sont des constantes sur l'orbite $\mathcal{O}_{Z^0}$. On a toujours*

$$\mathrm{Tr}\, Z\bar{Z} \geqq 2|\det Z|$$

avec égalité si et seulement si

$$(2.1)\quad \begin{aligned} &|z_1| = |z_2| \\ &z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2 = 0. \end{aligned}$$

Preuve. On sait déjà que det Z et Tr $Z\bar{Z}$ sont des invariants de l'action de $SU(2)$. Calculons

$$\mathrm{Tr}\, Z\bar{Z} - 4|\det Z|^2 = (\,|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 + 4|z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2|^2$$

d'où le lemme.

Remarque. La première relation (2.1) est conséquence de la seconde lorsque $z_3 \neq 0$.

LEMME 3. *Soit*

$$Z^0 = \begin{pmatrix} z_1^0 & 0 \\ 0 & z_2^0 \end{pmatrix}$$

avec $|z_1^0| = |z_2^0|$. Alors

$$z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2 = 0$$

sur toute l'orbite $\mathcal{O}_{Z^0}$.

Preuve. On utilise (1.4) avec $z_3^0 = 0$. Alors

$$z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2 = (\,|z_1^0|^2 - |z_2^0|^2)(\zeta_1\zeta_2\zeta_1^{-2} - \bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2\zeta_2^2) = 0$$

si $|z_1^0| = |z_2^0|$.

Convention 4. Nous conviendrons que l'égalité "$z_3\bar{z}_?3\bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2 = 0$" signifie que

$$z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2 = 0 \text{ si } z_3 \neq 0 \text{ et}$$

$$|z_1| = |z_2| \text{ si } z_3 = 0.$$

LEMME 5. *Si l'égalité "$z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2 = 0$" a lieu en un point particulier de $\mathcal{O}_{Z^0}$, elle a lieu partout sur cette orbite et de plus* Tr $Z\bar{Z} = 2|\det Z|$ *sur cette orbite.*

Preuve. On peut supposer que l'égalité a lieu au point particulier Z^0. Alors ou bien

$$z_3^0\bar{z}_1^0 + \bar{z}_3^0 z_2^0 = 0 \quad \text{avec } z_3^0 \neq 0,$$

donc par le Lemme 1, l'égalité a lieu partout et là ou $z_3 \neq 0$ elle entraîne $|z_1| = |z_2|$, donc par densité aussi là ou $z_3 = 0$. Si $z_3^0 = 0$, l'hypothèse signifie que $|z_1^0| = |z_2^0|$ et le Lemme 3 implique

$$z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2 = 0$$

partout. Le Lemme 2 dit que dans ces conditions

$$\mathrm{Tr}\, Z\bar{Z} = 2|\det Z|.$$

Définition 6. On appellera *orbite spéciale* une orbite $\mathcal{O}_{Z^0}$ où l'on a de plus la relation "$z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2 = 0$" au sens de la convention 4 ci-dessus. On voit que, d'après la fin du Lemme 5, les orbites spéciales sont caractérisées par les propriétés équivalentes

(i) Tr $Z\bar{Z} = 2|\det Z|$ en un point un partout

(ii) "$z_3\bar{z}_1 + \bar{z}_3 z_2 = 0$" en un point particulier.

Définition 7. Les *orbites générales* seront les orbites qui ne sont pas spéciales.

b) *dimension des orbites.*

LEMME 8. *Les orbites spéciales sont de dimension réelle 2 et les orbites générales sont de dimension réelle 3.*

Preuve. Une matrice générale de $SU(2)$ s'écrit

$$(2.2) \qquad k = \begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\varphi} & -\sin\theta e^{i\psi} \\ \sin\theta e^{i\psi} & \cos\theta e^{-i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Soient $k_1(\varphi)$, $k_2(\theta)$, $k_3(\psi)$ les trois sous groupes à un paramètre. Les vecteurs tangents à l'orbite en Z^0 sont

$$\frac{d}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=0} k_1(\varphi)Z_0{}^tk_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 2iz_1^0 & 0 \\ 0 & -2iz_2^0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} k_2(\theta)Z_0{}^tk_2(\theta) = \begin{pmatrix} -2z_3^0 & z_1^0 - z_2^0 \\ z_1^0 - z_2^0 & 2z_3^0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{d\psi}\bigg|_{\psi=0} k_3(\psi)Z_0{}^tk_3(\psi) = i\begin{pmatrix} 2z_3^0 & z_1^0 + z_2^0 \\ z_1^0 + z_2^0 & 2z_3^0 \end{pmatrix}.$$

En notations réelles où $\mathbf{C}^3$ est R^6, étudier la dimension de l'espace tangent en Z^0 à l'orbite revient à étudier le rang de la matrice M à 6 lignes et 3 colonnes

$$M = \begin{pmatrix} -2y_1^0 & -2x_3^0 & -2y_3^0 \\ 2x_1^0 & -2y_3^0 & 2x_3^0 \\ 2y_2^0 & 2x_3^0 & -2y_3^0 \\ -2x_2^0 & 2y_3^0 & 2x_3^0 \\ 0 & x_1^0 - x_2^0 & -(y_1^0 + y_2^0) \\ 0 & y_1^0 - y_2^0 & x_1^0 + x_2^0 \end{pmatrix}$$

Lorsque $z_3^0 \neq 0$, cela revient à étudier le rang de l'une des deux matrices M_1 ou M_2 suivantes (où l'on a supprimé l'indice 0)

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2y_1 & -2y_3 & -2x_3 \\ 2x_1 & 2x_3 & -2y_3 \\ 2(y_1 + y_2) & 0 & 4x_3 \\ -2(x_1 + x_2) & 0 & 4y_3 \\ 0 & -(y_1 + y_2) & x_1 - x_2 \\ 0 & x_1 + x_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2y_1 & -2y_3 & -2x_3 \\ 2x_1 & 2x_3 & -2y_3 \\ 2(y_2 - y_1) & -4y_3 & 0 \\ 2(x_1 - x_2) & 4x_3 & 0 \\ 0 & -(y_1 + y_2) & x_1 - x_2 \\ 0 & x_1 + x_2 & y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

1) Si $x_3^0 \neq 0$, le mineur des seconde, troisième et quatrième lignes de M_1 est

$$16x_3^0 \operatorname{Re}(z_1^0\bar{z}_3^0 + \bar{z}_2^0 z_3^0)$$

et le mineur des première, troisième et quatrième lignes de M_2 est

$$16x_3^0 \operatorname{Im}(z_1^0\bar{z}_3^0 + \bar{z}_2^0 z_3^0).$$

Donc si l'orbite est générale, M_1 ou M_2 est de rang 3 et M aussi.

2) Si $y_3^0 \neq 0$, on utilisera les mineurs des première, troisième et quatrième lignes de M_1, ou celui des seconde, troisième et quatrième lignes de M_2 pour vérifier que M est de rang 3 si l'orbite est générale.

3) Si $z_3^0 = 0$, M devient de rang 3 si et seulement $|z_1^0| \neq |z_2^0|$ donc si l'orbite est générale et sinon elle est de rang 2. (sauf au cas où $Z^0 = 0$).

Il reste donc à voir que si $z_3^0 \neq 0$, et $z_1^0\bar{z}_3^0 + \bar{z}_2^0 z_3^0 = 0$, M est de rang 2 On va montrer que dans ces conditions $\mathcal{O}_{Z^0}$ se paramétrise par deux paramètres. Soit donc $\mathcal{O}_{Z^0}$ une orbite spéciale. Posons $\det Z = A$. Par le Lemme 5,

$$\operatorname{Tr} Z\bar{Z} = 2|A|$$

et l'orbite $\mathcal{O}_{Z^0}$ est définie par le système

$$(\mathrm{I})\begin{cases} z_1z_2 - z_3^2 = A \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2 = 2|A| \\ \text{“}\bar{z}_1z_3 + z_2\bar{z}_3 = 0\text{”}. \end{cases}$$

LEMME 9. *Le système* (I) *est équivalent au système* (II)

$$(\mathrm{II})\begin{cases} |z_1|^2 + |z_3|^2 = |A| \\ \arg z_3 = \theta_0/2 \text{ où } \theta_0 = \operatorname{Arg} A + \pi \\ |z_1| = |z_2| \\ \arg z_2 = -\arg z_1 + \theta_0 - \pi. \end{cases}$$

Preuve. Si $z_3 = 0$, la dernière équation de (I) signifie que $|z_1| = |z_2|$ par convention et cela a donc lieu partout sur $\mathcal{O}_{Z^0}$ par densité, donc

$$|z_1|^2 + |z_3|^2 = |z_2|^2 + |z_3|^2 = |A|$$

par la seconde équation de (I), ce qui donne les première et troisième équations de (II). De plus

$$A = z_1z_2 - z_3^2 = -\frac{z_3}{\bar{z}_3}|A|$$

d'où

$$\arg z_3 = \frac{\arg A + \pi}{2} = \frac{\theta_0}{2}$$

et la relation $\bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_3 = 0$ implique alors la dernière relation de (II). Réciproquement, les première et troisième équations de (II) impliquent la seconde équation (I) et on a

$$z_2 = |z_1|e^{i(\theta_0 - \pi - \arg z_1)}$$
$$z_1 z_2 = -|z_1|^2 e^{i\theta_0}$$
$$z_3^2 = |z_3|^2 e^{i\theta_0}$$
$$z_1 z_2 - z_3^2 = -(|z_1|^2 + |z_3|^2)e^{i\theta_0} = |A|e^{i\arg A} = A.$$

Ce qui est la première équation (I) et de même si $z_3 \neq 0$, on obtient

$$\bar{z}_1 z_3 + z_2 \bar{z}_3 = 0.$$

Lorsque $z_3 = 0$, la convention 4 donne encore (I).

Fin du Lemme 8. L'équivalence (I) $\Leftrightarrow$ (II) du Lemme 9 montre qu'une orbite spéciale est paramétrée par deux paramètres $|z_1|$ et arg z_1 par exemple.

LEMME 10. *L'action de* $SU(2)$ *est transitive sur l'ensemble des* $Z \in \mathbf{C}^3$ *avec* det $Z = A$, Tr $Z\bar{Z} = B$, $(B \geqq 2|A|)$.

Preuve. Le cas $B = 2|A|$ est conséquence du Lemme 9. Supposons $B > 2|A|$. Soit E est ensemble, il existe $Z^0 \in E$ diagonale car il suffit de prendre

$$z_1^0 = |z_1^0|e^{i(\alpha+\theta)}, \quad z_2^0 = |z_2^0|e^{(\beta-\theta)}$$

avec $\alpha + \beta = \arg A$ et $|z_1^0|^2$, $|z_2^0|$ moines réelles positives de

$$\xi^2 - B\xi + |A|^2 = 0,$$

donc $\frac{1}{2}(B \pm \sqrt{B^2 - |A|^2})$.

On peut supposer $A > 0$ par rotation des coordonnées d'abord, il y a transitivité de l'action de $SU(2)$ sur l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} |z_1^0|e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & |z_2^0|e^{-i\alpha} \end{pmatrix}_{0 \leqq \alpha \leqq 2\pi}$$

car il suffit de faire agir la matrice $k(\varphi, \theta, \varphi)$ avec $\psi = 0$, $\varphi = \alpha/2$, $\theta = 0$.

Soit alors Z dans E, Z^0 diagonale dans E; alors $Z\bar{Z}$ et $Z_0\bar{Z}_0$ sont hermitiennes de même trace et déterminant, donc de mêmes valeurs propres et il existe $k \in SU(2)$ avec

$$kZ\bar{Z}k^{-1} = Z_0\bar{Z}_0.$$

Soit $W = kZ^tk$.

Alors $W\bar{W} = Z_0\bar{Z}_0$, donc

$$|W_1|^2 + |W_3|^2 = |z_1^0|^2,$$
$$|W_2|^2 + |W_3|^2 = |z_2^0|^2$$

par (1.1) et

$$W_1\bar{W}_3 + W_3\bar{W}_2 = 0.$$

Si donc $W_3 \neq 0$, W serait élément d'un orbite spéciale. On a supposé $|B| > 2|A|$ de l'orbite générale; donc $W_3 = 0$, W est diagonale et donc

$$W_1 = |z_1^0|e^{i\alpha}$$

$$W_2 = |z_2^0|e^{-i\alpha}$$

$$W_3 = 0$$

car

$$A = \det W = W_1W_2$$

et on voit que l'action de $SU(2)$ est transitive sur ces matrices diagonales.

Nous pouvons conclure cette étude ainsi:

THEOREME 1. *Outre l'orbite réduite à* (0), *les orbites de l'action de* $SU(2)$ *sur* $\mathbf{C}^3$ *se décomposent en 2 classes*

1) *les orbites générales de dimension réelle 3 définies par les 2 équations*

$$\mathrm{Tr}\, Z\bar{Z} = B \quad \det Z = A, \quad B > 2|A|.$$

2) *Les orbites spéciales de dimension réelle 2 définies par les 3 équations*

$$\mathrm{Det}\, Z = A$$

$$\mathrm{Tr}\, Z\bar{Z} = 2|A|$$

$$\text{“}z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_2z_3 = 0\text{”}$$

(*avec la convention 4*).

3) *Le long des orbites générales, il y a un champ holomorphe tangent donné par* (1-7)

$$\bar{z}_1^0A + \bar{z}_2^0\bar{A} + \bar{z}_3^0[A, \bar{A}]$$

un point $kZ^{0t}k$ *de l'orbite* $\mathcal{O}_{Z^0}$.

4) *Le long des orbites spéciales, il n'y a pas de champ holomorphe tangent.*

5) *La paramétrisation d'une orbite générale par* (ζ_1, ζ_2) *de* (1.3) *est une paramétrisation* 2.1.

Preuve. Tout a été démontré sauf 4) qui est évident car les orbites spéciales sont de dimension réelle 2 et ne sont pas des variétés complexes et 5) qui est évident par (1.4).

On peut encore déduire de la démonstration du Lemme 10 le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *L'ensemble des orbites $\mathcal{O}_{Z^0}$ de $SU(2)$ est indexé par les triplets*

$$(r_1, r_2, \alpha), \quad 0 < \alpha \leqq 2\pi, r_1 \geqq r_2 \geqq 0$$

par la bijection

$$(r_1, r_2, \alpha) \to \mathcal{O}_{\begin{pmatrix} r_1 e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}}.$$

3. Structures complexes sur $SU(2)/\{\pm 1\}$ et quadriques complexes.

LEMME 11. *A un isomorphisme près, les seules structures de Cauchy-Riemann (structures CR) sur $SU(2)/\{\pm 1\}$ invariantes à gauche sont du type $A + ue^{i\alpha}\bar{A}$ où $0 \leqq u < 1$, $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$.*

Preuve. Un champ complexe général invariant à gauche sur $SU(2)$ se présente sous la forme (1.7)

$$\bar{z}_1^0 A + \bar{z}_2^0 \bar{A} + \bar{z}_3^0 [A, \bar{A}]$$

et il peut être considéré comme le champ complexe tangent à $\mathcal{O}_{Z^0}$ au point $kZ^{0t}k$. Mais évidemment le corollaire du Théorème 1, permet, en faisant une translation à droite par un élément de $SU(2)$ de ramener l'origine de l'orbite à $z_3^0 = 0$, $z_1^0 = r_1 e^{i\alpha} z_2^0 = r_2$, $r_1 \geqq r_2$ donc le champ à

$$r_1 e^{-i\alpha} A + r_2 \bar{A}.$$

Mais les orbites sont plongées dans $\mathbf{C}^3$; nous pouvons alors, dans $\mathbf{C}^3$ effectuer une homothétie complexe de façon à nous ramener à

$$z_1^0 = 1, \quad z_2^0 = ue^{-i\alpha}, \quad u = \frac{r_2}{r_1},$$

grâce aux formules (1.4). Evidemment $r_1 > r_2$ car l'orbite est générale.

Notation. Soit $A_{ue^{+i\alpha}}$ l'algèbre des fonctions continues sur $SU(2)/\{\pm 1\} = SO(z)$ annulant $\bar{A} + ue^{-i\alpha}A \quad (0 \leqq u < 1)$.

THEOREME 2. *Le spectre de l'algèbre $A_{ue^{i\alpha}}$ est exactement le domaine $D_{ue^{i\alpha}}$ borné de la quadrique $Q_{ue^{i\alpha}}$ d'équation $(Q_{ue^{i\alpha}}) z_1 z_2 - z_3^2 = ue^{i\alpha}$ intersection de $q_{ue^{i\alpha}}$ avec la boule de $\mathbf{C}^3$*

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2 \leqq 1 + u^2.$$

Preuve. Réalisons $SO(3)$ et $\bar{A} + ue^{-i\alpha}A$ comme l'orbite

$$\mathcal{O}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ue^{i\alpha} \end{pmatrix}}$$

et le champ antiholomorphe invariant à gauche tangent à cette orbite. Ici $u < 1$ car l'orbite est générale pour supporter un champ holomorphe tangent. Toute fonction f de notre algèbre $A_{ue^{i\alpha}}$ induit sur cette orbite une fonction de la classe CR sur le bord du domaine

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2 \leqq 1 + u^2$$

sur la variété complexe $Q_{ue^{i\alpha}}$. Ce domaine est défini par une fonction strictement plurisous-harmonique et donc la fonction f se prolonge holomorphiquement au domaine de cette quadrique $\bar{D}_{ue^{i\alpha}}$.

On peut réénoncer cela un peu différemment.

THEOREME 3. *L'enveloppe polynomialement convexe d'une orbite $\mathcal{O}_{Z^0}$ est*
1) *égale à $\mathcal{O}_{Z^0}$ si cette orbite est spéciale*
2) *égale à l'ensemble des points $D_{A,B}$ des points*

$$D_{A,B} = \{Z/\mathrm{Det}\ Z = A,\ \mathrm{Tr}\ Z\bar{Z} \leqq B\}$$

si $B > 2|A|$ *et si* $\mathcal{O}_{Z^0} = \{Z/\det Z = A,\ \mathrm{Tr}\ Z\bar{Z} = B\}$.

Preuve. Comme det Z est polynôme complexe, il est clair que l'enveloppe polynomiale en question est contenue dans det $Z = A$. De même comme la boule de $\mathbf{C}^3$, Tr $Z\bar{Z} \leqq B$ est polynomialement convexe, l'enveloppe polynomialement convexe est contenue dans l'ensemble D_{AB}

$$D_{AB} = \{\det Z = A\} \cap \{\mathrm{Tr}\ Z\bar{Z} \leqq B\}.$$

Si $B > 2|A|$, tout point Z de D_{AB} est dans l'enveloppe polynomialement convexe à cause du principe du maximum appliqué sur la variété complexe det $Z = A$.

Si $B = 2|A|$, il nous faut, pour conclure, montrer que

$$D_{A,2|A|} = \mathcal{O}_{Z^0}$$

ce qui est évident parce que précisément $2|A|$ est le minimum de la fonction Tr $Z\bar{Z}$ sur la quadrique Det $Z = A$.

4. Etude topologique des domaines $D_{A,B}$. Pour $B > 2|A|$, nous avons défini les domaines

$$D_{A,B} = \{Z/\mathrm{Det}\ Z = A,\ \mathrm{Tr}\ Z\bar{Z} \leqq B\}$$

situé sur la quadrique complexe (Q_A) d'équations Det $Z = A$. Ces domaines sont strictement pseudoconvexes.

THEOREME 4. *Le domaine $D_{A,B}$ contient une classe d'homologie réelle de dimension réelle 2 définie par l'orbite spéciale*

$$\mathrm{Det}\ Z = A \quad \mathrm{Tr}\ Z\bar{Z} = 2|A|.$$

Preuve. Remarquons que $2|A|$ est le minimum de la fonction Tr $Z\bar{Z}$ sur Det $Z = A$. Il suffit de voir, par la théorie de Morse que le lieu des points où ce minimum est atteint est exactement l'orbite spéciale de dimension 2. Or celle-ci est définie par les 3 équations

$$\text{Det } Z = A, \text{ Tr } Z\bar{Z} = 2|A|, \text{“}z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3 = 0\text{”}$$

et le Lemme 2 et la convention 4 nous disent précisément que les deux premières équations entraînent la troisième.

Remarque 1. Lorsque $A \to 0$, cette classe d'homologie tend vers le point 0 de la quadrique singulière Det $Z = 0$. C'est donc la classe évanescente que nous avons ainsi réalisée explictement.

Remarque 2. Le domaine $D_{A,B}$ est strictement pseudoconvexe. C'est clairement un domaine d'holomorphie car Det $Z = 0$ est une variété de Stein. Pourtant,

$$H^2(D_{A,B}, \mathbf{R}) \neq 0$$

et donc il n'est pas topologiquement trivial.

Nous considérons maintenant la quadrique $\mathbf{Q}_1$ d'équation

$$z_1 z_2 - z_3^2 = 1.$$

Réalisons cette quadrique comme $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ en posant

$$x = \frac{z_2}{1 + iz_3} \qquad -y^{-1} = \frac{z_1}{1 + iz_3} = \frac{1 - iz_3}{z_2}$$

x, y étant les coordonnées inhomogènes de chaque $\mathbf{P}^1$. Un calcul montre alors que l'action de $SU(2)$ sur $\mathbf{Q}_1$ définie au § 1, devient l'action suivante sur $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$

$$(x_0, y_0) \to \left(x = \frac{i\bar{\zeta}_1 x_0 + \zeta_2}{\bar{\zeta}_2 x_0 + i\zeta_1}, y = \frac{\bar{\zeta}_1 y_0 - i\zeta_2}{-i\bar{\zeta}_2 y_0 + \zeta_1}\right)$$

et donc elle se sépare variable par variable dans les coordonnées (x, y). De plus, la fonction Tr $Z\bar{Z}$ devient

$$\text{Tr } Z\bar{Z} = 2 + 4\frac{|1 + \bar{x}y|^2}{|x - y|^2}$$

et donc dire que Tr $Z\bar{Z} = A$ c'est dire que

$$\left|\frac{x - y}{1 + x\bar{y}}\right|^2 = \frac{4}{A - 2}$$

(d'où $A \geqq 2$ nécessairement) soit encore

$$d(x, y) = \text{Arc tg } \sqrt{\frac{4}{A - 2}}$$

où $d(x, y)$ est la distance entre x, y sur $\mathbf{P}^1$ pour la métrique projective.

Le cas $A = 2$ correspond à l'orbite dégénérée spéciale, donc à

$$d(x, y) = \frac{\pi}{2},$$

donc à l'ensemble des couples de points de $\mathbf{P}^1$ dont la distance est maximale; le domaine

$$D_{1,A} = \{Z/\text{Tr } Z\bar{Z} \leqq A\}$$

devient donc

$$D_{1,A} = \left\{(x, y) \in \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1/\text{tg } d(x, y) \geqq \sqrt{\frac{4}{A-2}}\right\}.$$

Son bord est l'hypersurface Tr $Z\bar{Z} = A$ qui, pour $A > 2$ est un fibré sur $\mathbf{P}^1$ par

$$(x, y) \in \{\text{Tr } Z\bar{Z} = A\} \rightarrow y \in \mathbf{P}^1$$

dont la fibre est l'ensemble des points

$$\left\{x \in \mathbf{P}^1/\text{tg } d(x, y) = \sqrt{\frac{4}{A-2}}\right\}$$

donc l'ensemble des points x de $\mathbf{P}^1$ à distance fixée de y.

5. Action de $U(2)$ sur $\mathbf{C}^3$ et enveloppes polynomialement convexes des orbites. a) Réalisons toujours $\mathbf{C}^3$ par les matrices 2×2 symétriques complexes. Alors $U(2)$ agit par la formule analogue à (1.2)

(5.1) $\quad Z \rightarrow kZ^tk$

et cette action se décompose en l'action (1.2) de $SU(2)$ et l'action

$$Z \rightarrow e^{i\chi}Z \quad (\chi \in [0, 2\pi[\,)$$

de sorte que si Ω_{Z^0} est l'orbite de Z^0 par cette action de $U(2)$, on a

(5.2) $$\Omega_{Z^0} = \bigcup_{\chi \in [0,2\pi]} e^{i\chi} \cdot \mathcal{O}_{Z^0}.$$

Les invariants algébriques de cette action sont Tr $Z\bar{Z}$ et $|\text{Det } Z|^2$.

Définition 12. On appellera encore orbite spéciale de $U(2)$ une orbite Ω_{Z^0} telle que $\mathcal{O}_{Z^0}$ soit spéciale (donc aussi les $e^{i\chi}\mathcal{O}_{Z^0}$); elle est alors de dimension réelle 3.

b) Commençons par décrire l'enveloppe polynomialement convexe d'une orbite spéciale Ω_{Z^0} de $U(2)$. Une orbite spéciale de $SU(2)$ définie par un A réel positif est paramétrée par

$$\begin{aligned} z_1(e^{i\theta}, \rho) &= \rho e^{i\theta} \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \\ z_2(e^{i\theta}, \rho) &= \rho e^{-i\theta} \quad\ 0 \leqq \rho \leqq \sqrt{A}. \\ z_3(e^{i\theta}, \rho) &= \pm i\sqrt{A - \rho^2}. \end{aligned}$$

Une orbite spéciale Ω de $U(2)$ est donc paramétrée par

$$(5.3)\qquad (\Omega)\quad z_2(e^{i\chi}, e^{i\theta}, \rho) = \rho e^{-i(\theta-\chi)}$$
$$z_3(e^{i\chi}, e^{i\theta}, \rho) = \pm i e^{i\chi}\sqrt{A-\rho^2}.$$

Pour $\rho \leqq \sqrt{A}$, définissons alors le bidisque Δ_ρ^2 défini par

$$(5.4)\qquad (\Delta_\rho^2)\begin{cases} z_1 = \rho\zeta^2\zeta' \\ z_2 = \rho\zeta' \qquad |\zeta|, |\zeta'| \leqq 1 \\ z_3 = \pm i\sqrt{A-\rho^2\zeta\zeta'} \end{cases}$$

de sorte que sur Δ_ρ^2 on a

$$\rho^2(z_1z_2 - z_3^2) = Az_1z_2.$$

La frontière distinguée de Δ_ρ^2 est dans Ω et donc

$$(5.5)\qquad \hat{\Omega} \supset \bigcup_{0\leqq\rho\leqq\sqrt{A}} \Delta_\rho^2,$$

où $\hat{\Omega}$ est l'enveloppe polynomialement convexe de Ω, d'où

THEOREME 6. *L'enveloppe polynomialement convexe $\hat{\Omega}$ de l'orbite spéciale Ω définie par* (5.3) *contient la réunion des bidisques Δ_ρ^2* $(0 \leqq \rho \leqq \sqrt{A})$ *défini par* (5.4).

c) L'élément général de $U(2)$ est

$$e^{i\chi}\begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\varphi} & -\sin\theta e^{-i\psi} \\ \sin\theta e^{i\psi} & \cos\theta e^{-i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Soient z_1^0, z_2^0 deux réels positifs et

$$Z^0 = \begin{pmatrix} z_1^0 & 0 \\ 0 & z_2^0 \end{pmatrix}.$$

L'orbite Ω_{Z^0} est, lorsque $z_1^0 > z_2^0$ (donc lorsqu'elle est non spéciale), paramétrée par 4 angles θ, φ, ψ, χ

$$z_1(\theta, \varphi, \psi, \chi) = e^{i\chi}(z_1^0\cos^2\theta e^{2i\varphi} + z_2^0\sin^2\theta e^{-2i\psi})$$
$$(5.6)\qquad z_2(\theta, \varphi, \psi, \chi) = e^{i\chi}(z_1^0\sin^2\theta e^{2i\psi} + z_2^0\cos^2\theta e^{-2i\varphi})$$
$$z_3(\theta, \varphi, \psi, \chi) = e^{i\chi}\frac{\sin 2\theta}{2}(z_1^0 e^{i(\varphi+\psi)} - z_2^0 e^{-i(\varphi+\psi)}).$$

On peut toujours se ramener au cas Z^0 diagonal z_i^0 réels positifs et ici $z_1^0 > z_2^0$ car une orbite de $U(2)$ contient toujours un tel élément. Passons alors en représentation exponentielle

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{2}\Big[z_1^0\Big(e^{i(2\varphi+\chi)} + \frac{1}{2}(e^{i(2\varphi+2\theta+\chi)} + e^{i(2\varphi-2\theta+\chi)})\Big) \\
&\quad + z_2^0\Big(e^{i(\chi-2\psi)} - \frac{1}{2}(e^{i(-2\psi+2\theta+\chi)} + e^{i(-2\psi+2\theta+\chi)})\Big)\Big] \\
z_2 &= \frac{1}{2}\Big[e_1^0\Big(z^{i(2\psi+\chi)} - \frac{1}{2}(e^{i(2\psi+2\theta+\chi)} + e^{i(2\psi-2\theta+\chi)})\Big) \\
&\quad + z_2^0\Big(e^{i(-2\varphi+\chi)} + \frac{1}{2}(e^{i(-2\varphi+2\theta+\chi)} + e^{i(-2\varphi-2\theta+\chi)})\Big)\Big] \\
z_3 &= \frac{1}{4i}[z_1^0(z^{i(\varphi+\psi+\chi+2\theta)} - e^{i(\varphi+\psi+\chi-2\theta)}) \\
&\quad - z_2^0(e^{i(-\varphi-\psi+2\theta+\chi)} - e^{i(-\varphi-\psi-2\theta+\chi)})].
\end{aligned}$$

Posons

$$\chi = 2(\varphi + \psi) + 2\theta + \alpha \tag{5.7}$$

$$\zeta_1 = e^{i\varphi},\ \zeta_2 = e^{i\psi},\ \zeta_3 = e^{2i\theta},\ \zeta_4 = e^{i\alpha}.$$

On a alors lorsque ζ_i prennent les valeurs (5.7)

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\zeta_1^2\zeta_4}{4}[z_1^0\zeta_1^2\zeta_2^2(\zeta_3 + 1)^2 - z_2^0(\zeta_3 - 1)^2] \\
z_2 &= \frac{\zeta_2^2\zeta_4}{4}[-z_1^0\zeta_1^2\zeta_2^2(\zeta_3 - 1)^2 + z_2^0(\zeta_3 + 1)^2] \\
z_3 &= \frac{\zeta_1\zeta_2(\zeta_3 - 1)(\zeta_3 + 1)\zeta_4}{4i}[z_1^0\zeta_1^2\zeta_2^2 - z_2^0].
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Mais alors (5.8) définit une application

$$F_{Z^0}:(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \in \Delta^4 \mapsto (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3 \tag{5.9}$$

du 4-disque unité Δ^4, telle que l'image de la frontière distinguée $(\partial\Delta)^4$ par F_{Z^0} est exactement l'orbite Ω_{Z^0} et donc $F_{Z^0}(\Delta^4)$ est contenue dans l'enveloppe polynomialement convexe $\hat{\Omega}_{Z^0}$ de Ω_{Z^0}.

Par ailleurs, on a par un calcul direct

$$\det Z|_{Z\in F_{Z^0}(\Delta^4)} = (\zeta_1\zeta_2)^4(\zeta_3\zeta_4)^2 z_1^0 z_2^0 \tag{5.10}$$

et donc on déduit que l'intersection de $F_{Z^0}(\Delta^4)$ avec l'ensemble

$$|\det Z|^2 = A^2 = |z_1^0 z_2^0|^2$$

est exactement l'orbite Ω_{Z^0}, puisque pour que

$$|\det Z|^2 = |z_1^0 z_2^0|^2 \quad \text{sur } F_{Z^0}(\Delta^4),$$

il faut et il suffit d'après (5.10) que tous les ζ_i soient de module 1, ce qui

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-049-8 Published online by Cambridge University Press

nous donne $F_{Z^0}(\partial\Delta)^4$ c'est-à-dire d'après ce qui précède Ω_{Z^0}.

Par ailleurs, l'enveloppe polynomialement convexe de Ω_{Z^0} contient aussi

$$|\det Z|^2 = A^2 \quad \operatorname{Tr} Z\bar{Z} \leqq B$$

(où $A = \det Z_0$ et $B \leqq \operatorname{Tr} Z_0\bar{Z}_0$), puisque pour tout χ, $e^{i\chi}Z_0$ engendre une $SU(2)$-orbite $\mathcal{O}_{e^{i\chi}Z_0}$ dont l'enveloppe polynomialement convexe est

$$(5.11) \quad \hat{\mathcal{O}}_{e^{i\chi}Z_0} = \{Z/\det Z = e^{2i\chi}A, \operatorname{Tr} Z\bar{Z} \leqq B\}$$

d'après le Théorème 4.

Soit donc un couple (r_1, r_2) avec

$$(5.12) \quad \begin{aligned} r_1r_2 &= A \\ r_1^2 + r_2^2 &\leqq B. \end{aligned}$$

Définissons l'application

$$F_{(r_1,r_2)}:\Delta^4 \to \mathbf{C}^3$$

par les formules (5.8) où z_1^0 et z_2^0 sont remplacés par r_1, r_2.

Alors $F_{(r_1,r_2)}(\Delta^4)$ est un ensemble tel que l'image de la frontière distinguée est dans

$$|\det Z|^2 = A^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr} Z\bar{Z} \leqq B$$

donc dans un ensemble du type (5.11) et par conséquent $F_{(r_1,r_2)}(\Delta^4)$ est encore dans l'enveloppe polynomialement convexe $\hat{\Omega}_{Z^0}$ de Ω_{Z^0}, puisque (5.11) y est déjà, d'où

THEOREME 7. *L'ensemble $\hat{\Omega}_{Z^0}$ contient l'ensemble*

$$\bigcup_{\substack{r_1r_2=A \\ r_1^2+r_2^2\leqq B}} F_{(r_1,r_2)}(\Delta^4)$$

où

$$A = \det Z^0, \quad b = \det Z^0\bar{Z}^0.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Debiard et B. Gaveau, CR. Acad. Sci. Paris *299* (1984), 741-744.
2. L. Ehrenpreis, Bull. Amer. Math. Soc. *81* (1975), 1109-1111.
3. L. K. Hua, *Harmonic analysis in classical domains*, American Math. Soc. Transl. (1981).

Université Paris 13,
Paris, France;
Université Paris 6,
Paris, France