REMARQUE SUR LA MOYENNE ARITHMETIQUE DE FONCTIONS UNIVALENTES CONVEXES

G. LABELLE ET Q. I. RAHMAN

Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions univalentes normalisées convexes dans $|z| < 1$. Nous avons démontré récemment (**3**) que leur moyenne géométrique $F = (fg)^{1/2}$ applique le disque $|z| < (2\sqrt{3} - 3)^{1/2}$ sur un domaine convexe et l'estimation est précise.

Nous voulons ici considérer le même problème pour la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}\{f(z) + g(z)\}$ des deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$.

THÉORÈME. *Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions univalentes normalisées convexes dans $|z| < 1$. Si κ représente la plus petite racine positive de l'équation*

$$1 - 3r + 2r^2 - 2r^3 = 0, \tag{1}$$

alors la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}\{f(z) + g(z)\}$ applique $|z| < \kappa$ sur un domaine convexe.

Il nous faut, pour la preuve du théorème, le lemme suivant.

LEMME. *Si la fonction*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

est univalente normalisée convexe dans $|z| < 1$, alors l'image du cercle $|z| = r < 1$ sous l'application

$$w = z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

est contenue dans le disque

$$\left| w - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leqq \frac{2r}{1 - r^2}.$$

Preuve du lemme. Par hypothèse,

$$\mathrm{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geqq 0$$

dans $|z| < 1$. Donc, $1 + zf''(z)/f'(z)$ peut être représentée par la formule de Herglotz-Stieltjes

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 + e^{i\phi}z}{1 - e^{i\phi}z} d\mu(\phi),$$

Reçu le 20 février 1968 et en forme revisée le 5 juillet 1968.

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-107-8 Published online by Cambridge University Press

où $\mu(\phi)$ est une fonction non-décroissante sur $[-\pi, \pi]$, telle que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\mu(\phi) = 1.$$

Il s'ensuit que

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2e^{i\phi}z}{1-e^{i\phi}z}\, d\mu(\phi).$$

Pour chaque $\phi \in [-\pi, \pi]$, la transformation homographique

$$T_\phi : z \to \frac{2e^{i\phi}z}{1-e^{i\phi}z}$$

applique le cercle $|z| = r < 1$ sur un cercle centré au point $2r^2/(1-r^2)$ dont le rayon est $2r/(1-r^2)$. Le lemme est donc démontré.

Preuve du théorème. Etant donné que les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ sont univalentes normalisées convexes dans $|z| < 1$, on veut déduire que

$$\operatorname{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z) + g''(z)}{f'(z) + g'(z)}\right\} \geqq 0$$

pour $|z| \leqq \kappa$.

On a

$$z\frac{f''(z)+g''(z)}{f'(z)+g'(z)} = z\frac{f''(z)}{f'(z)}\cdot\left(1+\frac{g'(z)}{f'(z)}\right)^{-1} + z\frac{g''(z)}{g'(z)}\cdot\left(1+\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{-1}$$

$$= z\frac{f''(z)}{f'(z)}\cdot\frac{1}{1+Ae^{i\alpha}} + z\frac{g''(z)}{g'(z)}\cdot\frac{1}{1+A^{-1}e^{-i\alpha}}, \text{ disons.}$$

Il est clair que si $|w - a| \leqq d$, $a \geqq 0$, et w_0 est un nombre complexe donné, alors ww_0 appartient au disque centré en $a|w_0|e^{i \arg w_0}$ dont le rayon est $d|w_0|$, c'est-à-dire que

$$\operatorname{Re}(ww_0) \geqq |w_0|\{a\cos(\arg w_0) - d\}.$$

Donc, pour $|z| = r < 1$,

$$\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\cdot\frac{1}{1+Ae^{i\alpha}}\right\} \geqq \frac{1}{\sqrt{(1+A^2+2A\cos\alpha)}} \times\left\{\frac{2r^2}{1-r^2}\cdot\frac{1+A\cos\alpha}{\sqrt{(1+A^2+2A\cos\alpha)}} - \frac{2r}{1-r^2}\right\},$$

$$\operatorname{Re}\left\{z\frac{g''(z)}{g'(z)}\cdot\frac{1}{1+A^{-1}e^{-i\alpha}}\right\} \geqq \frac{1}{\sqrt{(1+A^2+2A\cos\alpha)}} \times\left\{\frac{2r^2}{1-r^2}\cdot\frac{A^2+A\cos\alpha}{\sqrt{(1+A^2+2A\cos\alpha)}} - \frac{2r}{1-r^2}\right\}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-107-8 Published online by Cambridge University Press

On trouve alors

$$\operatorname{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z) + g''(z)}{f'(z) + g'(z)}\right\} \geqq 1 + \frac{2r^2}{1 - r^2} - \frac{2r}{1 - r^2}\cdot\frac{1 + A}{\sqrt{(1 + A^2 + 2A\cos\alpha)}}$$
$$\geqq \frac{1 + r^2}{1 - r^2} - \frac{2r}{1 - r^2}\cdot\frac{1 + A}{\sqrt{(1 + A^2 + 2A(1 - 8r^2 + 8r^4))}},$$

car (**1**)

$$|\arg f'(z)| \leqq 2\sin^{-1}r, \qquad |\arg g'(z)| \leqq 2\sin^{-1}r,$$

et donc pour $r \leqq 1/\sqrt{2}$,

$$\cos\alpha \geqq \cos(4\sin^{-1}r) = 1 - 8r^2 + 8r^4.$$

Mais on a, évidemment,

$$\frac{1 + A}{\sqrt{(1 + A^2 + 2A(1 - 8r^2 + 8r^4))}} \leqq \frac{1}{|1 - 2r^2|}.$$

On déduit que pour $r < 1/\sqrt{2}$,

$$\operatorname{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z) + g''(z)}{f'(z) + g'(z)}\right\} \geqq \frac{1}{1 - r^2}\left(1 + r^2 - \frac{2r}{1 - 2r^2}\right)$$
$$= \frac{1 - 3r + 2r^2 - 2r^3}{(1 - r)(1 - 2r^2)},$$

et le théorème s'ensuit.

Le théorème dit que la borne supérieure $r_k^{(a)}$ des rayons des disques fermés, centrés à l'origine, dans lesquels la moyenne arithmétique de deux fonctions univalentes normalisées convexes arbitraires dans $|z| < 1$ est convexe est au moins 0.3966 . . . .

Nous allons montrer ici que $r_k^{(a)} < 0.403515\ldots$. Pour ce faire, prenons

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^{i\phi}z}, \qquad g(z) = \frac{z}{1 - e^{-i\phi}z}.$$

Si $z = re^{i\theta}$, alors pour $0 < r < 1$,

$$\operatorname{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z) + g''(z)}{f'(z) + g'(z)}\right\}$$
$$= |(1 - 2z\cos\phi + z^2\cos 2\phi)(1 - 2z\cos\phi + z^2)|^{-2}$$
$$\times \{(1 - 6r^2\cos 2\theta + 6r^6\cos 2\theta - r^8)$$
$$+ (-6r\cos\theta + 24r^3\cos\theta + 6r^3\cos 3\theta - 2r^5\cos 3\theta - 6r^7\cos\theta)\cos\phi$$
$$+ (8r^2 + 12r^2\cos 2\theta - 36r^4 - 24r^4\cos 2\theta - 12r^6\cos 2\theta + 4r^8)\cos^2\phi$$
$$+ (-36r^3\cos\theta - 8r^3\cos 3\theta + 60r^5\cos\theta + 4r^5\cos 3\theta + 12r^7\cos\theta)\cos^3\phi$$
$$+ (36r^4 + 24r^4\cos 2\theta - 24r^6 - 4r^8)\cos^4\phi - 48r^5\cos\theta\cos^5\phi + 16r^6\cos^6\phi\}.$$

Donc, $\frac{1}{2}\{f(z) + g(z)\}$ cessera d'être convexe dès que r excédera la plus petite racine positive de l'équation

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-107-8 Published online by Cambridge University Press

$$
\begin{aligned}
(2)\quad P(r, \cos\theta, \cos\phi) \equiv\ & 1 + (-6\cos\theta\cos\phi)r \\
& + (-6\cos 2\theta + 8\cos^2\phi + 12\cos 2\theta\cos^2\phi)r^2 \\
& + (24\cos\theta\cos\phi + 6\cos 3\theta\cos\phi - 36\cos\theta\cos^3\phi - 8\cos 3\theta\cos^3\phi)r^3 \\
& + (-36\cos^2\phi - 24\cos 2\theta\cos^2\phi + 36\cos^4\phi + 24\cos 2\theta\cos^4\phi)r^4 \\
& + (-2\cos 3\theta\cos\phi + 60\cos\theta\cos^3\phi + 4\cos 3\theta\cos^3\phi - 48\cos\theta\cos^5\phi)r^5 \\
& + (6\cos 2\theta - 12\cos 2\theta\cos^2\phi - 24\cos^4\phi + 16\cos^6\phi)r^6 \\
& + (-6\cos\theta\cos\phi + 12\cos\theta\cos^3\phi)r^7 + (-1 + 4\cos^2\phi - 4\cos^4\phi)r^8 = 0,
\end{aligned}
$$

où θ et ϕ sont des paramètres variant chacun dans $[0, 2\pi)$.

Une étude, faite avec l'aide de l'ordinateur électronique CDC 3400 du centre de calcul de l'Université de Montréal, a montré que $P(0.40351360, 1, C)$ est strictement positif si $-1 \leqq C \leqq 1$ et que $P(0.40351530, 1, C)$ est négatif pour certaines valeurs de C dans $[-1, 1]$. Donc

$$r_k^{(a)} < 0.40351530.$$

Nous ne savons pas quel choix de θ et ϕ donne la plus petite racine positive de l'équation en r (2). Nous avons donné à r chacune des valeurs 0.39661, 0.39700, 0.39800, 0.39900, 0.40000, 0.40100, 0.40200, 0.40300, 0.40400 et fait varier $\cos\theta$ sur l'ensemble

$$\{0, \pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.3, \pm 0.4, \pm 0.5, \pm 0.6, \pm 0.7, \pm 0.8, \pm 0.9\}.$$

Dans chaque cas, l'ordinateur n'a trouvé aucune valeur de $C \in [-1, 1]$ satisfaisant l'équation

$$P(r, \cos\theta, C) = 0.$$

Nous avons aussi essayé $\cos\theta = 0.99900$ et $\cos\theta = 0.9950$; l'ordinateur n'a fourni aucune racine de (2) plus petite que celle obtenue plus haut avec $\cos\theta = 1$.

On vient donc de montrer que

$$(3)\qquad 0.39660000 < r_k^{(a)} < 0.40351530.$$

Remarquons que les calculs effectués par l'ordinateur électronique ne prouvent pas d'une façon définitive que le théorème n'est pas précis.

Le théorème est intéressant en relation avec le fait que la moyenne arithmétique de deux fonctions univalentes normalisées convexes n'est pas nécessairement univalente dans $|z| < \rho$ si $\rho > 1/\sqrt{2}$. Ce fait a été remarqué par le professeur M. S. Robertson, mais très peu de personnes le connaissaient car il n'a jamais été publié. Le professeur W. K. Hayman ne connaissait pas l'observation du professeur Robertson comme le montre son livre récent (**2**, problème 6.11) qui contient la conjecture que toute combinaison linéaire convexe de deux fonctions univalentes normalisées convexes est univalente étoilée dans $|z| < 1$. Indépendamment du professeur Robertson, plusieurs personnes (en particulier, les professeurs T. H. MacGregor et A. W. Goodman) ont montré que la conjecture est fausse.

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-107-8 Published online by Cambridge University Press

Comme conséquence immédiate de (3) et du fait qu'une fonction $f(z)$ est univalente normalisée convexe dans $|z| < 1$ si et seulement si $zf'(z)$ est univalente normalisée étoilée dans $|z| < 1$, on a ce qui suit.

COROLLAIRE. *Si $r_*^{(a)}$ représente la borne supérieure des rayons des disques fermés, centrés à l'origine, dans lesquels la moyenne arithmétique de deux fonctions univalentes normalisées étoilées arbitraires dans $|z| < 1$ est étoilée, alors*

$$0.39660000 < r_*^{(a)} < 0.40351530.$$

En fait,

$$r_*^{(a)} = r_k^{(a)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Bieberbach, *Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen* Math. Z. *4* (1919), 295–305.
2. W. K. Hayman, *Research problems in function theory* (The Athlone Press, London, 1967).
3. G. Labelle and Q. I. Rahman, *Remarque sur la moyenne géométrique de fonctions univalentes convexes,* C. R. Acad. Sci. Paris *266* (1968), 209–210.

Université de Montréal,
Montréal, Québec

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-107-8 Published online by Cambridge University Press