Compositio Mathematica **116:** 311–319, 1999.

Majoration de sommes trigonométriques modulo p^n

MOUSSA SAÏBI
Faculté de Mathématiques et d'Informatique, Université de Picardie Jules Verne 33, Rue Saint Leu, 80039 Amiens Cedex, France. e-mail: saïbi@mathinfo.u-piacardie.fr

(Received: 12 March 1997; accepted in final form: 2 January 1998)

Abstract. We give a generic estimation of trigonometric sums defined over closed sub-schemes with semi-stable reduction of the standard affine scheme modulo p^n $(n \geqslant 2)$. We use Greenberg realisation to reduce to trigonometric sums defined over smooths sub-schemes of a finite product of Witt vectors over the finite field of p elements. Using the cohomological interpretation of this sums over a finite field, the sum is directly related to the Fourier–Deligne transformation of the dual pairs of Witt vectors. We deduce the estimation from the properties of the Fourier–Deligne transformation on simple perverse sheaves and pure sheaves.

Mathematics Subject Classification (1991): 14F20.

Key words: Fourier–Deligne transformation, Witt vectors, Greenberg realisation, trigonometric sums.

Introduction

A chaque schéma affine X, de type fini, purement de dimension relative $m \geqslant 0$ sur l'anneau des vecteurs de Witt $W_n(k)$ où k est un corps fini de caractéritique p et $f = (f_1, \ldots, f_r)$ des fonctions sur X qui définissent une immersion fermé sur l'espace affine $\mathbb{A}^r_{W_n(k)}$ et $\psi_{n,k}\colon W_n(k) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ un caractère additif fidèle sur $W_n(k)$ où ℓ est un nombre premier quelconque différent de p, si $k' \supset k$ est une extension finie de k et $\psi_{n,k'}$ le caractère de $W_n(k')$ induit par $\psi_{n,k}$, pour tout r-uple $(a'_1, \ldots, a'_r) \in (W_n(k'))^r$, on peut former la somme trigonométrique:

$$S(a'_1, \ldots, a'_r) = \sum_{x \in X(W_n(k'))} \psi_{n,k'} \left(\sum_{j=1}^{r} a'_j f_j(x) \right),$$

où $(a'_1, \ldots, a'_r) \in (W_n(k'))^r$.

Dans cet article, on donne une estimation générique de ses sommes trigonométriques dans le cas où X est *à réduction semi-stable* sur $W_n(k)$ pour $n \geqslant 2$ (cf. Théorème 2.2): il existe un polynôme non nul $F(y_{1,0}, \ldots, y_{1,n-1}, \ldots, y_{r,0}, \ldots, y_{r,n-1}) \in k[y_{1,0}, \ldots, y_{1,n-1}, \ldots, y_{r,0}, \ldots, y_{r,n-1}]$ (nr variables) et un entier χ

INTERPRINT: J.N.B. PIPS Nr.: 160616 (compkap:mathfam) v.1.15
comp4225.tex; 8/04/1999; 9:54; p.1

dépendant que de X et de f tels que: $|S(a'_1, \dots, a'_r)| \leqslant \chi q'^{mn/2}$ pour toute valeur absolue archimédienne $|\,|$ de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, dès que $(a'_1, \dots, a'_r) \in (W_n(k'))^r$ satisfait

$$F(a'_{1,0}, \dots, a'_{1,n-1}, \dots, a'_{r,0}, \dots, a'_{r,n-1}) \neq 0$$
$$(a'_i = (a'_{1,0}, \dots, a'_{1,n-1}) \in W_n(k'), q' = \mathrm{card}(k')).$$

Pour cela, on utilise la réalisation de Greenberg pour se ramener à des sommes trigonométriques définies sur des k-sous-schémas *lisses* d'un produit fini $(W_{n,k})^r$ de schémas en groupes unipotents des vecteurs de Witt sur le corps fini k. Grâce à l'interprétation cohomologique des sommes trigonométriques sur un corps fini, la somme est directement reliée à la transformation de Fourier–Deligne pour la paire duale unipotente admissible $((W_{n,k})^r, (W_{n,k})^r, \lambda^*(\mathcal{L}_n))$ ([6] 1.5.4.2). On déduit l'estimation, des propriétées de la transformation de Fourier–Deligne sur les groupes unipotents [6].

0. Notations-rappels

Dans tout ce qui suit, on fixe un nombre premier p, un corps parfait k de caractéristique p et une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Si q est une puissance de p, on désignera par $\mathbb{F}_q$ l'unique sous corps à q éléments de $\bar{k}$. De plus on fixe un nombre premier ℓ différent de p et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ du corps $\mathbb{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques.

On fixe aussi un caractère fidèle, $\psi\colon \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$. On notera ψ_n: $p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ le caractère additif fidèle restriction de ψ à $p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \varinjlim_n p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

Si X est un schéma de type fini sur k, nous dirons $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux sur X pour $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux constructibles. Nous noterons $D^b_c(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la catégorie dérivée des faisceaux ℓ-adiques ([2] (1.1.2) et (1.1.3) si k est fini ou algébriquement clos, [3] (6.3) si k est parfait). La catégorie abélienne artinienne et noethérienne des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers sur X sera notée $\mathrm{Perv}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $W_{n,k}$ le schéma affine en anneaux des vecteurs de Witt de longueur n sur k.

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on considére la paire duale admissible $((W_{n,k})^r, (W_{n,k})^r, \lambda^*(\mathcal{L}_n))$ [6](1.5.4.2) où $\lambda^*(\mathcal{L}_n)$ est la bi-extension universelle de $(W_{n,k})^r \times_k (W_{n,k})^r$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ donnée par: $\mathcal{L}_n$ est le torseur de Lang sur $W_{n,k}$ et λ est le k-morphisme:

$$(W_{n,k})^r \times_k (W_{n,k})^r \to W_{n,k}, \qquad ((x_i), (y_i)) \to \sum_{i=1}^r x_i \,.\, y_i .$$

On rappele que la transformation de Fourier–Deligne [6](2.2.2) pour $((W_{n,k})^r, (W_{n,k})^r, \lambda^*(\mathcal{L}_n))$ est le foncteur:

$$\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}\colon D^b_c((W_{n,k})^r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^b_c((W_{n,k})^r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

https://doi.org/10.1023/A:1000877727301 Published online by Cambridge University Press

$$\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K) = \mathrm{Rpr}'_!(pr^*K \otimes \lambda^*(\mathcal{L}_n)\psi)[nr],$$

où $pr\colon (W_{n,k})^r \times_k (W_{n,k})^r \to (W_{n,k})^r$ et $pr'\colon (W_{n,k})^r \times_k (W_{n,k})^r \to (W_{n,k})^r$ sont les projections canoniques et $\lambda^*(\mathcal{L}_n)\psi$ est le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur $(W_{n,k})^r \times_k (W_{n,k})^r$ obtenu en tordant le $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$-torseur $\lambda^*(\mathcal{L}_n)$ par le caractére ψ.

On a le résultat suivant:

THÉORÈME 0.1 ([5], [6]). (1) *Le foncteur $\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}$ induit une équivalence de catégories abéliennes de Perv $((W_{n,k})^r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sur Perv $((W_{n,k})^r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, et transforme les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers simples sur $(W_{n,k})^r$ en $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers simples sur $(W_{n,k})^r$.*

(2) *Si K est un objet de $D^b_c((W_{n,k})^r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ pur de poids m, alors $\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K)$ est un objet de $D^b_c((W_{n,k})^r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ pur de poids $m + nr$.*

Preuve. (1) C'est le Corollaire (3.2.2) de [6].

(2) Même preuve que le Théorème (2.2.1) de [5] car le morphisme d'oubli des supports $\mathrm{Rpr}'_!(pr^*K \otimes \lambda^*(\mathcal{L}_n)_\psi)[nr] \to \mathrm{Rpr}'_*(pr^*K \otimes \lambda^*(\mathcal{L}_n)_\psi)[nr]$ est un isomorphisme ([6] Théorème 3.2.0) et le foncteur $\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}$ commute à la dualité de Verdier ([6] Corollaire 3.2.1). □

1. **Réalisation de Greenberg** ([1, 4])

1.1. Soient $\mathcal{X}$ un k-schéma et n un entier strictement positif. Le préfaisceau $U \to W_n(\mathcal{O}_\mathcal{X}(U))$ est un faisceau d'anneaux, qu'on notera $W_n(\mathcal{O}_\mathcal{X})$. L'espace annelé $(\mathcal{X}, W_n(\mathcal{O}_\mathcal{X}))$ sera aussi noté $W_n\mathcal{X}$.

On a $\Gamma(\mathcal{X}, W_n(\mathcal{O}_\mathcal{X})) = \mathrm{Mor}_{k\text{-sch}}(\mathcal{X}, W_{n,k})$ avec la structure d'algèbre induite par celle de $W_{n,k}$. Pour tout point $x \in \mathcal{X}$, on a un isomorphisme canonique d'anneaux locaux: $W_n(\mathcal{O}_\mathcal{X})_x \to W_n(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x})$ car le foncteur W_n commute aux limites inductives filtrantes.

Si A est une k-algèbre, $W_n\mathrm{Spec}(A)$ s'identifie canoniquement au schéma $\mathrm{Spec}(W_n(A))$. On voit alors que $W_n\mathcal{X}$ est un $W_n(k)$-schéma.

DÉFINITION 1.2. Soit X un $W_n(k)$-schéma.

Considérons le foncteur $\mathrm{Gr}_n(X)$ suivant:

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}_n(X)\colon (k\text{-schémas}) &\to (\text{ensembles}), \\ \mathcal{Z} &\mapsto \mathrm{Hom}_{W_n(k)}(W_n\mathcal{Z}, X) = X(W_n\mathcal{Z}). \end{aligned}$$

On appelle réalisation de Greenberg de X, un k-schéma $\mathcal{X}$ qui représente le foncteur $\mathrm{Gr}_n(X)$, $X(W_n\mathcal{Z}) = \mathcal{X}(\mathcal{Z})$ pour tout k-schéma $\mathcal{Z}$.

Une réalisation de Greenberg de X sur k est donc un k-schéma $\mathcal{X}$ muni d'un $W_n(k)$-morphisme $\lambda_X\colon W_n\mathcal{X} \to X$ vérifiant la propriété universelle suivante:

https://doi.org/10.1023/A:1000877727301 Published online by Cambridge University Press

Pour tout k-schéma $\mathcal{Y}$ et tout $W_n(k)$-morphisme $g\colon W_n\mathcal{Y} \to X$, il existe un unique k-morphisme $\widetilde{g}\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tel que l'on ait le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ W_n\mathcal{Y} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "W_n(\widetilde{g})"'] & & W_n\mathcal{X}. \arrow[ul, "\lambda_X"'] \end{tikzcd}$$

En d'autre terme, l'application $\widetilde{g} \mapsto \lambda_X \circ W_n(\widetilde{g})$ définit une bijection entre $\mathcal{X}(\mathcal{Y})$ et $X(W_n\mathcal{Y})$. En particulier les points rationnels de X à valeur dans l'anneau $W_n(k)$ sont réalisés comme des points rationnels à valeur dans le corps k du k-schéma $\mathcal{X}$.

Remarque et Exemple 1.3. (1) Par définition la réalisation de Greenberg de X est unique à unique isomorphisme près si elle existe .

(2) Si $X = \mathbb{A}^r_{W_n(k)}$ alors $\mathcal{X} = (W_{n,k})^r$ et le morphisme λ_X est donné sur les anneaux de fonctions régulières par:

$$\begin{aligned} W_n(k)[T_1, \ldots, T_r] &\to \mathrm{Mor}_{k\text{-sch}}((W_{n,k})^r, W_{n,k}) \\ T_i &\mapsto \pi_i \end{aligned}$$

où π_i est la i-ème projection de $(W_{n,k})^r$ sur $W_{n,k}$.

THÉORÈME 1.4 ([4] [1]).

(i) *Soit X un $W_n(k)$-schéma localement de type fini.*
Alors X admet une réalisation de Greenberg $\mathcal{X}$ qui est un k-schéma localement de type fini.

(ii) *La réalisation de Greenberg transforme les immersions ouvertes (resp. fermées) entre $W_n(k)$-schémas localement de type fini en immersions ouvertes (resp. fermées).*

(iii) *Elle respecte les produits fibrés.*

(iv) *Soient X et Y deux $W_n(k)$-schémas de types fini et $f\colon X \to Y$ un $W_n(k)$-morphisme lisse (resp. étale). Alors le k-morphisme $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est lisse (resp. étale).*

Preuve. La propriété (iii) se voit directement sur le foncteur $\mathrm{Gr}_n(X)$. Montrons la propriété (ii).

Si $i\colon Y \to X$ est une immersion fermée définie par un idéal $I \subset \mathcal{O}_X$ et si X admet une réalisation de Greenberg $(\mathcal{X}, \lambda_X)$, on définit un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ de la manière suivante: si f est une section locale de I, on pose $\lambda_X^*(f) = (f_0, \ldots, f_{n-1}) \in W_n(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ où $f_0, \ldots, f_{n-1}$ sont des sections locales de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{I}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ engendré par les $f_0, \ldots, f_{n-1}$ quand f parcourt les sections locales de I. Alors,

https://doi.org/10.1023/A:1000877727301 Published online by Cambridge University Press

si $i\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ l'immersion fermée défini par $I \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, il est clair que $\lambda_X(W_n\mathcal{Y}) \subset Y \subset X$ et que $(\mathcal{Y}, \lambda_X|W_n\mathcal{Y})$ est une réalisation de Greenberg de Y.

Si $j\colon U \to X$ est une immersion ouverte, $\lambda_X^{-1}(U) \subset W_n\mathcal{X}$ est un ouvert et comme $\mathcal{X}$ et $W_n\mathcal{X}$ ont même espace sous-jacent, $\lambda_X^{-1}(U)$ définit une immersion ouverte $j\colon \mathcal{U} \to \mathcal{X}$. Alors, il est clair que $(\mathcal{U}, \lambda_X|W_n\mathcal{U})$ est une réalisation de Greenberg de U.

Maintenant, pour montrer la propriété (i), on se ramène aisément au cas affine (compte-tenu de (ii)).

Si $X = \mathrm{Spec}\,(W_n(k)[T_1, \ldots, T_r])$ on a vu en 1.3 (2) que sa réalisation de Greenberg est donné par $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}\ k[T_{1_0}, \ldots, T_{1_{n-1}}, \ldots, T_{r_0}, \ldots, T_{r_{n-1}}]$ et par $\lambda_X^*(T_i) = (T_{i_0}, \ldots, T_{i_{n-1}}) \in W_n(H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}))$. Si $Y \subset X$ est un sous-schéma fermé défini par des équations composante $f_1 = \cdots = f_s = 0$ $(f_1, \ldots, f_s \in W_n(k)[T_1, \ldots, T_r])$, il résulte de (ii) que sa réalisation de Greenberg existe et est donnée par le sous-schéma fermé $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ défini par les équations $f_{1_0} = \cdots = f_{1_{n-1}} = \cdots = f_{s_0} = \cdots = f_{s_{n1}} = 0$, où on a posé $\lambda_X^*(f_j) = (f_{j_0}, \ldots, f_{j_{n-1}}) \in W_n(H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}))(j = 1, \ldots, s)$, et par $\lambda_Y = \lambda_X|W_n\mathcal{Y}$.

(iv) On utilise le critère des prolongements infinitésimaux. Soient A un anneau artinien, I un idéal de carré nul $I^2 = 0$, et $\mathrm{Spec}(A) \to \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas.

Pour montrer que le k-morphisme $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est lisse (resp. étale) on doit montrer que l'application naturelle $\mathrm{Mor}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{Spec}(A), (\mathcal{X}) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{Y}}\,(\mathrm{Spec}(A/I), (\mathcal{X})$ est surjective (resp. bijective). Or on a un carré commutatif évident

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{X}) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{Spec}(A/I), \mathcal{X}) \\
\int\Big\downarrow & & \int\Big\downarrow \\
\mathrm{Mor}_Y(\mathrm{Spec}(W_n(A)), X) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_Y(\mathrm{Spec}(W_n(A/I)), X)
\end{array}$$

et $W_n(A)$ est un anneau artinien et $W_n(A/I) = W_n(A)/I'$ où $I' =''\ W_n(I)''$ est un idéal de carré nul. D'où la conclusion. $\square$

Remarque 1.5. Si X est un $W_n(k)$-schéma en groupes localement de type fini, il en est de même pour $\mathcal{X}$ et la bijection de 1.2. est un isomorphisme de groupes.

DÉFINITION 1.6. Soit X un $W_n(k)$-schémas localement de type fini.

Soit x un point de X. On dit que X est à réduction semi-stable en x s'il existe un k-schéma U, des entiers r et s avec $1 \leqslant s \leqslant r$ et des k-morphismes étales

$$\begin{array}{ccc}
 & U & \\
{}^{\alpha}\swarrow & & \searrow^{\beta} \\
X & & \mathrm{Spec}\ W_n(k)[T_1, \ldots, T_r]/(T_1 \cdot T_2 \cdots T_s - p)
\end{array}$$

tel que $x \in \alpha(U)$.

https://doi.org/10.1023/A:1000877727301 Published online by Cambridge University Press

On dit que X est à réduction semi-stable s'il l'est en x pour tout point x de X.

THÉORÈME 1.7. *Supposons $n \geqslant 2$. Alors, pour tout $W_n(k)$-schéma X localement de type fini à réduction semi-stable, $\mathcal{X}$ est un k-schéma lisse.*

Preuve. D'après 1.4 (iv), il suffit de montrer que, pour tout entier s $(2 \leqslant s \leqslant r)$, la réalisation de Greenberg de Spec $W_n(k)[T_1, \dots, T_r]/(T_1 \cdot T_2 \cdots T_s - p)$ est lisse.

La réalisation de Greenberg de $X = \operatorname{Spec} W_n(k)[T_1, \dots, T_r]/(T_1 \cdot T_2 \cdots T_s - p)$ est obtenue comme suit: Pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on définit les polynômes $P_i = P_i(T_{1_0}, \dots, T_{j_k}, \dots T_{s_i})$ $1 \leqslant j \leqslant s, 0 \leqslant k \leqslant i$ par la relation $(T_{1_0}, \dots, T_{1_{n-1}}) \cdot (T_{2_0}, \dots, T_{2_{n-1}}) \cdots (T_{s_0}, \dots, T_{s_{n-1}}) = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ (produit de vecteurs de Witt). On a $P_0 = T_{1_0}, \dots, T_{s_0}$.

Or l'équation de vecteurs de Witt $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}) = (0, 1, \dots, 0)$ est équivalente à $P_0 = P_1 - 1 = P_2 = \cdots = P_{n-1} = 0$. Donc la réalisation de Greenberg de X est donné par:

$$\mathcal{X} = \operatorname{Spec} k[T_{1_0}, \dots, T_{1_{n-1}}, \dots, T_{r_0}, \dots, T_{r_{n-1}}]/(P_0, P_1 - 1, P_2, \dots, P_{n-1}).$$

Pour montrer que $\mathcal{X}$ est lisse, nous allons utiliser le critère Jacobien, pour cela nous ordonnons les variables comme suit:

$$T_{1_0}, T_{1_1}, \dots, T_{1_{n-1}}; \dots; T_{s_0}, T_{s_1}, \dots, T_{s_{n-1}}; \dots; T_{r_0}, T_{r_1}, \dots, T_{r_{n-1}}.$$

Nous allons montrer par récurrence sur s que pour chaque $i = 1, \dots, n-1$ le polynôme P_i s'écrit $P_i = \Sigma_{j=1}^{s} T_{j_i}(T_{1_0} \dots T_{j-1_0}.T_{j+1_0} \dots T_{s_0})^{p^i} +$ termes independants des variables $T_{1_i}, T_{2_i}, \dots, T_{s_i}$.

Pour $s = 1$, c'est trivial.

Supposons que le résultat est vrai pour $s - 1$.

Considérons le produit $(T_{1_0}, \dots, T_{1_{n-1}}).(T_{2_0}, \dots, T_{2_{n-1}}) \dots (T_{s_0}, \dots, T_{s_{n-1}}) = (P_0, \dots, P_{n-1})$. Ce dernier peut s'écrire $(R_0, \dots, R_{n-1}).(T_{s_0}, \dots, T_{s_{n-1}}) = (P_0, \dots, P_{n-1})$ où les polynômes R_i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ vérifient la propriété ci-dessus par hypothèse de récurrence. En utilisant les composantes fantômes Φ_i, les polynômes P_k pour $0 \leqslant k \leqslant i$ sont alors donnés par la relation: $\Phi_i(R_0, \dots, R_i)$. $\Phi_i(T_{s_0}, \dots, T_{s_i}) = \Phi_i(P_0, \dots, P_i)$, d'où

$$\begin{aligned} &[(R_0)^{p^i} + p(R_1)^{p^{i-1}} + \cdots + p^i R_i][(T_{s_0})^{p^i} + p(T_{s_1})^{p^{i-1}} + \cdots + p^i T_{s_i}] \\ &\quad = [(P_0)^{p^i} + p(P_1)^{p^{i-1}} + \cdots + p^i P_i]. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que les P_k et R_k $(k \leqslant i-1)$ ne dépendent pas des variables $T_{1_i}, T_{2_i}, \dots, T_{s_i}$ et que le polynôme R_i vérifie l'hypothèse de récurrence, en divisant par p^i et ensuite en réduisant modulo p, on voit que le polynôme P_i satisfait la propriété demandée.

De cette propriété de P_i, on déduit:

$$\partial P_i / \partial T_{j_k} = \begin{cases} (T_{1_0} \dots \hat{T}_{j_0} \dots T_{s_0})^{p^i} & \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant s \text{ et } k = i \\ 0 & \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant r \text{ et } k \geqslant i+1, \end{cases}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000877727301 Published online by Cambridge University Press

où le chapeau signifie que la variable est omise.

De ces considérations, on en déduit que la matrice jacobienne

$$(\partial P_i/\partial T_{jk})_{(0\leqslant i\leqslant n-1, 1\leqslant j\leqslant r, 1\leqslant k\leqslant n-1)}$$

est de rang maximal n si et seulement si au plus une des variables $T_{1_0}, T_{2_0}, \ldots, T_{s_0}$ est nulle. Or, si $s \geqslant 2$ et si parmi les s variables $T_{1_0}, T_{2_0}, \ldots, T_{s_0}$ deux au moins sont nulles, on a $P_1 = 0$ car $P_1 = \Sigma_{j=1}^{s} T_{j_1}(T_{1_0}\ldots \widehat{T_{j_0}} \ldots T_{s_0})^p$, ce qui contredit la relation $P_1 = 1$. D'où le théorème. □

2. Sommes trigonométriques

On suppose que k est un corps fini à q éléments.

2.1. Soit X un schéma affine, de type fini, *à réduction semi-stable* purement de dimension relative $m \geqslant 0$ sur $\mathrm{Spec}(W_n(k))(n \geqslant 2)$, et soit $f = (f_1, \ldots, f_r): X \to \mathbb{A}^r_{W_n(k)}$ des fonctions sur X qui définissent une immersion fermé vers l'espace affine $\mathbb{A}^r_{W_n(k)}$.

Soit $\psi_{n,k}: W_n(k) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ le caractère additif sur $W_n(k)$ induit par ψ_n définie par $W_n(k) \xrightarrow{W_n(\mathrm{tr})} W_n(\mathbb{F}_p) = p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_n} \mathbb{Q}_\ell^*$ où tr: $k \to \mathbb{F}_p$ est la trace de k. Pour chaque r-uple $(a_1, \ldots, a_r) \in (W_n(k))^r$, on peut former la somme trigonométrique:

$$S(a_1, \ldots, a_r) = \sum_{x\in X(W_n(k))} \psi_{n,k}\left(\sum_{j=1}^{r} a_j f_j(x)\right).$$

Plus généralement, si $k' \supset k$ est une extension finie et $\psi_{n,k'}$ le caractère de $W_n(k')$ induit par ψ_n, pour tout r-uple $(a'_1, \ldots, a'_r) \in (W_n(k'))^r$, on peut former la somme trigonométrique:

$$S(a'_1, \ldots, a'_r) = \sum_{x\in X(W_n(k'))} \psi_{n,k'}\left(\sum_{j=1}^{r} a'_j f_j(x)\right).$$

On a alors le résultat suivant:

THÉORÈME 2.2. *Pour tout $W_n(k)$-morphisme $f: X \to \mathbb{A}^r_{W_n(k)}$ comme ci-dessus, il existe un polynôme non nul $F(y_{1,0}, \ldots, y_{1,n-1}, \ldots, y_{r,0}, \ldots, y_{r,n-1}) \in k[y_{1,0}, \ldots, y_{1,n-1}, \ldots, y_{r,0}, \ldots, y_{r,n-1}]$ (nr variables) et un entier χ dépendant que de X et de f tels que: $|S(a'_1, \ldots, a'_r)| \leqslant \chi q'^{mn/2}$, pour toute valeur absolue archimédienne $|\,|$ de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, dès que $(a'_1, \ldots, a'_r) \in (W_n(k'))^r$ satisfait $F(a'_{1,0}, \ldots, a'_{1,n-1}, \ldots, a'_{r,0}, \ldots, a'_{r,n-1}) \neq 0$ $(a'_i = (a'_{1,0}, \ldots, a'_{1,n-1}) \in W_n(k')$ et $q' = \mathrm{card}(k')$).*

2.3. *Pour montrer ce théorème, on va utiliser la même méthode que celle de* [5]. *Pour cela, on va se ramener à une situation où tout est défini sur* k.

Soit $\mathcal{X}$ la réalisation de Greenberg de X, d'après 1.4 (i) et 1.7, $\mathcal{X}$ est un schéma de type fini, *lisse* ($n \geqslant 2$), purement de dimension relative $mn \geqslant 0$ sur k. Soit $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r)\colon \mathcal{X} \to (W_{n,k})^r$ les fonctions sur $\mathcal{X}$ déduite de celles de f, d'après 1.4 (ii) f est une immersion fermé.

D'après 1.2, la somme trigonométrique $S(a'_1, \dots, a'_r)$ sur X peut s'interpréter comme une somme trigonométrique sur $\mathcal{X}$:

$$S(a'_1, \dots, a'_r) = \sum_{x \in \mathcal{X}(k')} \psi_{n,k'}\left(\sum_{j=1}^{r} a'_j \tilde{f}_j(x)\right).$$

Considérons $K = \tilde{f}_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell[mn] \in ob D^b((W_{n,k})^r, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. C'est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau pervers et pur de poids mn. Soit $L = \mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K)$ le transformé de Fourier–Deligne de K associée à la paire duale canonique $((W_{n,k})^r, (W_{n,k})^r, \lambda^*(\mathcal{L}_n))$.

D'après ce qui précède et la formule des traces de Grothendieck, on a:

$$t_L(a'_1, \dots, a'_r) = (-1)^{nr+mn} S(a'_1, \dots, a'_r),$$

où t_L est la trace du $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau pervers L.

Comme dans [5], on déduit le Théorème 2.2 d'un énoncé cohomologique.

THÉORÈME 2.4. *Il existe un ouvert dense U de $(W_{n,k})^r$ tel que le complexe $\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K)_{|U}$ soit concentré en degré $-nr$ et $\mathcal{H}^{-nr}(\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K))_{|U}$ soit un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse pur de poids mn.*

Preuve. D'aprés (0.1), $\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K)$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau pervers et pur de poids $mn + nr$. On déduit alors le résultat en prenant pour U l'ouvert de lissité de $\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K)$. □

Preuve du Théorème 2.2. Il suffit de prendre pour F un polynôme non nul qui s'annule sur $(W_{n,k})^r - U$.

Pour $a' = (a'_1, \dots, a'_r) \in (W_n(k'))^r$ satisfaisant $F(a'_{1_0}, \dots, a'_{1_{n-1}}, \dots, a'_{r_0}, \dots, a'_{r_{n-1}}) \neq 0$ et donc $a' \in U(k')$ on a:

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K)}(a'_1, \dots, a'_r) &= \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}^*, (\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K))_{a'}) \\ &= (-1)^{nr}\, \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}^*, (\mathcal{H}^{-nr}(\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K))_{a'}) \end{aligned}$$

d'où

$$|t_{\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K)}(a'_1, \dots, a'_r)| \leqslant \chi q'^{mn/2}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000877727301 Published online by Cambridge University Press

où $\chi = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathcal{H}^{-nr}(\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K))_{a'}$ est indépendant de $a' \in U$ car $\mathcal{H}^{-nr}(\mathcal{F}_{(W_{n,k})^r,!}(K))$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur U. □

Bibliographie

1. Bosch, S., Lütkebohmert, W. and Raynaud, M.: *Néron Models*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 21, Springer, Berlin, 1990.
2. Deligne, P.: La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES* **52** (1981).
3. Ekedahl, T.: *On the Adic Formalism, The Grothendieck Festschrift*, Volume II, Progr. Math. Birkhäuser, Basel, 1990.
4. Greenberg, M.: Schemata over local rings, *Ann. of Math.* **73** (1961), 624–628.
5. Katz, N. M. and Laumon, G.: Transformation de Fourier et majoration des sommes exponentielles, *Publ. Math. IHES* **62** (1985), 361–418.
6. Saïbi, M.: Transformation de Fourier–Deligne sur les groupes unipotents, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **46**(5) (1996), 1205–1242.

https://doi.org/10.1023/A:1000877727301 Published online by Cambridge University Press