Can. J. Math., Vol. XXVII, No. 6, 1975, pp. 1222–1228

SUR LES ANNEAUX REFLEXIFS

J. QUERRE

Un anneau commutatif unitaire est dit *réflexif* si tous ses idéaux sont divisoriels [**3**; **6**]. On dira qu'un anneau commutatif unitaire et intègre est un anneau de *Mori*, si ses idéaux divisoriels entiers vérifient la condition de chaîne ascendante [**8**]. Enfin, on appellera provisoirement, *M-anneau*, un anneau de Mori, tel que tout idéal engendré par deux éléments est divisoriel. Un anneau noethérien réflexif est un M-anneau; dans la première partie de cette note, nous établissons la réciproque. La troisième partie étudie la clôture intégrale de certains anneaux locaux réflexifs non noethériens.

1. Preliminaires et rappels.

Théorème 1. *Dans un anneau de Mori, de dimension* 1, *tout idéal entier non nul est contenu dans un nombre fini d'idéaux maximaux.*

Soit A un anneau de Mori de dimension 1, $\mathfrak{A}$ un idéal quelconque non nul et $\mathfrak{A}_r$ son radical; $\mathfrak{A}_r$ est l'intersection des idéaux maximaux qui contiennent $\mathfrak{A}$ donc $\mathfrak{A}_r$ est un idéal divisoriel car chaque idéal maximal est divisoriel (Prop. 1 - p. 347 [**8**]). Il en résulte que A satisfait à la condition de chaîne ascendante pour les idéaux semi-premiers (c'est à dire égaux à leurs radicaux). Suivant le théorème 87 - p. 58 [**5**], $\mathfrak{A}_r$ est l'intersection d'un nombre fini d'idéaux maximaux.

Théorème 2. *Soit A un anneau intègre, tel que, pour chaque idéal maximal $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^{-1}$ soit engendré par deux éléments et $\mathfrak{A}$ un idéal divisoriel tel que* $\operatorname{Ext}_A{}^1(\mathfrak{A}, A) = 0$. *Si $\mathfrak{B}$ est un idéal contenant $\mathfrak{A}$ tel que $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ soit un A-module simple, alors $\mathfrak{B}$ est un idéal divisoriel tel que* $\operatorname{Ext}_A{}^1(\mathfrak{B}, A) = 0$. (Lemme - p. 19 [**6**]).

2. Caracterisation d'un anneau noetherien reflexif.

Soit A un anneau commutatif unitaire et intègre et K son corps des quotients. A tout élément $\alpha \in K$, on associe l'idéal divisoriel entier $\mathfrak{A}_\alpha = \alpha^{-1}A \cap A = A : (A + \alpha A)$.

Théorème 1. *La dimension au sens de Krull d'un M-anneau est* $\leqq 1$.

Il résulte du théorème 2 et de son corollaire 3 [**8**] que si A est un M-anneau, alors tout surordre A-plat est aussi un M-anneau. On peut donc sans restreindre la généralité supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{M}$. Soient x et v deux éléments de $\mathfrak{M}$. On a la chaîne ascendante d'idéaux divisoriels entiers:

$$\mathfrak{A}_{xv^{-1}} \subseteq \mathfrak{A}_{x^2v^{-1}} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_{x^kv^{-1}} \subseteq \ldots$$

Suivant la condition de chaîne, il existe donc un entier n tel que $\mathfrak{A}_{x^nv^{-1}} = \mathfrak{A}_{x^{2n}v^{-1}}$

Reçu le 4 mars, 1974.

et un élément $\alpha = u/v \in K$ avec $u = x^n$ tel que $\mathfrak{A}_{u\alpha} = \mathfrak{A}_\alpha$. Ce qui implique $A : (u\alpha A + A) = A : (\alpha A + A)$ puis $A : (Au^2 + Av) = A : (Au + Av)$. Mais tout idéal engendré par deux éléments de A est divisoriel donc $Au^2 + Av = Au + Av$. En particulier, $u \in Au^2 + Av$ et il existe c et d dans A tel que $u = cu^2 + dv$. Mais $1 - cu \notin \mathfrak{M}$ car $u \in \mathfrak{M}$, donc $1 - cu$ est inversible et $u = d(1 - cu)^{-1}v$, c'est à dire que $u = x^n \in Av$. Ainsi, quels que soient deux éléments de $\mathfrak{M}$, il existe un entier n tel que $x^n \in Av$. Soit donc $\mathfrak{A}$ un idéal entier non nul. Si $v \in \mathfrak{A}$ et $x \in \mathfrak{M}$, il existe n tel que $x^n \in Av \subset \mathfrak{A}$ donc $x \in \operatorname{rad}(\mathfrak{A})$ et $\operatorname{rad}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{M}$. Tout idéal de A est donc $\mathfrak{M}$-primaire donc $\mathfrak{M}$ est de hauteur 1.

THÉORÈME 2. *Un anneau de Mori A, local, de dimension 1, de radical $\mathfrak{M}$ et tel que $\mathfrak{M}^{-1}$ soit engendré par deux éléments est noethérien et réflexif.*

Soit xA un idéal principal de A. Il existe suivant le lemme 2, p. 346 [**8**] un entier $n \geqq 1$ tel que $\mathfrak{M}^n \subset xA$ et $\mathfrak{M}^{n-1} \not\subset xA$. Notons Σ_n l'ensemble des idéaux divisoriels de type fini $\mathfrak{A}$, tel que $\operatorname{Ext}_A{}^1(\mathfrak{A}, A) = 0$, $\mathfrak{M}^n \subset \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{M}^{n-1} \not\subset \mathfrak{A}$. Cet ensemble n'est pas vide car $xA \in \Sigma_n$, donc admet un élément maximal $\mathfrak{N}$. Soit $y \in \mathfrak{M}^{n-1} - \mathfrak{N}$, donc $Ay \subset \mathfrak{M}^{n-1} \subset \mathfrak{N} : \mathfrak{M}$. Posons $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} + Ay$, alors $\mathfrak{M}\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ et suivant le corollaire 1 p. 237 [**9**], $\mathfrak{N}'/\mathfrak{N}$ est un A-module simple. Appliquons le théorème I-2, alors $\mathfrak{N}'$ est un idéal divisoriel de type fini tel que $\operatorname{Ext}_A{}^1(\mathfrak{N}', A) = 0$, avec $\mathfrak{M}^n \subset \mathfrak{N} \subsetneq \mathfrak{N}'$. On ne peut avoir $\mathfrak{M}^{n-1} \not\subset \mathfrak{N}'$ sinon $\mathfrak{N}'$ serait un élément de Σ_n en contradiction avec le caractère maximal de $\mathfrak{N}$ donc $\mathfrak{M}^{n-1} \subset \mathfrak{N}'$. D'autre part, si $\mathfrak{M}^{n-2} \subset \mathfrak{N}'$, alors $\mathfrak{M}^{n-1} \subset \mathfrak{N}'\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, en contradiction avec les hypothèses, donc $\mathfrak{M}^{n-2} \not\subset \mathfrak{N}'$. Ainsi, l'ensemble Σ_{n-1} des idéaux divisoriels de type fini $\mathfrak{A}$, tel que $\operatorname{Ext}_A{}^1(\mathfrak{A}, A) = 0$, $\mathfrak{M}^{n-1} \subset \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{M}^{n-2} \not\subset \mathfrak{A}$ n'est pas vide.

De proche ne proche, il résulte que l'ensemble Σ_2 des idéaux divisoriels de type fini $\mathfrak{A}$ tel que $\operatorname{Ext}_A{}^1(\mathfrak{A}, A) = 0$ et $\mathfrak{M}^2 \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ n'est pas vide. Notons $\mathfrak{N}$ un élément maximal de Σ_2. Supposons $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{M}$ et $z \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$. On a $\mathfrak{M} \subseteq (\mathfrak{N} : \mathfrak{M}) \cap A$, d'où $(\mathfrak{N} : \mathfrak{M}) \cap A = \mathfrak{M}$. Posons $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} + Az$, donc $z\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ et toujours d'après le théorème I-2, déjà cité, $\mathfrak{N}' \in \Sigma_2$, en contradiction avec le caractère maximal de $\mathfrak{N}$, finalement $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$. Ainsi, le seul idéal premier est de type fini, donc, selon le théorème de Cohen, A est noethérien. Suivant le théorème 3-8, p. 18 [**6**], A est aussi réflexif.

THÉORÈME 3. *Soit A un anneau de Mori. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *A est de dimension 1, et $\mathfrak{M}^{-1}$ est engendré par deux éléments pour chaque idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A.*

(2) *A est un anneau réflexif.*

(3) *Tout idéal de A engendré par deux éléments est divisoriel.*

(1) $\Rightarrow$ (2): Si A est l'anneau de Mori, $A_\mathfrak{M}$ est aussi un anneau de Mori local de dimension 1, de radical $\mathfrak{M}A_\mathfrak{M}$ et $(\mathfrak{M}A_\mathfrak{M})^{-1} = A_\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M}A_\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{-1}A_\mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}^{-1}A_\mathfrak{M}$ est donc engendré par deux éléments, donc $A_\mathfrak{M}$ est suivant le théorème

2, un anneau noethérien. Suivant exercice 10, p. 73 [**5**], et compte tenu du théorème I-2, A est noethérien. Le théorème 3-8 [**6**] montre alors que A est réflexif.

(2) $\Rightarrow$ (3); Evident.

(3) $\Rightarrow$ (1): Soit A un M-anneau et $\mathfrak{M}$ un idéal maximal. Selon la proposition 1, p. 347 [**8**], on a $\mathfrak{M}^{-1} \neq A$. Si $\alpha \in \mathfrak{M}^{-1} - A$, alors $\mathfrak{M} \subseteq A\alpha^{-1} \cap A \subseteq A$. Or $A = A\alpha^{-1} \cap A$ impliquerait $\alpha \in A$ donc $\mathfrak{M} = A\alpha^{-1} \cap A = A : (A + \alpha A)$ puis $A : \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{-1} = A + \alpha A$, car tout idéal engendré par deux éléments est divisoriel par hypothèse. Ainsi, pour chaque idéal maximal, $\mathfrak{M}^{-1}$ est engendré par deux éléments.

THÉORÈME 4. *Soit A un anneau intégralement clos. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est un anneau de Prüfer.*

(b) *Tout idéal engendré par deux éléments est divisoriel.*

(b) $\Rightarrow$ (a): Puisque A est intégralement clos, on a pour $\alpha = a/b$ élément du corps des quotients de A, $\mathfrak{A}_{\alpha^2} \subseteq \mathfrak{A}_\alpha$ d'où $A : \mathfrak{A}_\alpha \subseteq A : \mathfrak{A}_{\alpha^2}$.

L'hypothèse impose $A : \mathfrak{A}_\alpha = A + A\alpha$ d'où $A + A\alpha \subseteq A + A\alpha^2$, et en particulier $\alpha \in A + A\alpha^2$. Ce qui permet de conclure [**2**, Ex. 12 – p. 94].

(a) $\Rightarrow$ (b): Evident.

COROLLAIRE. *Soit A un anneau de Mori intégralement clos. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est un anneau de Dedekind.*

(b) *Tout idéal engendré par deux éléments est divisoriel.*

(c) *A est de dimension* 1.

Résulte des théorèmes 3 et 4.

3. Anneaux généralisés de fractions d'un anneau de Mori. Soit A un anneau intègre et K son corps des quotients. On appelera surordre de A tout anneau B tel que $A \subset B \subset K$. Si Σ est une famille multiplicative d'ideaux entiers de A, l'ensemble:

$A_\Sigma = \{x \in K | x\mathfrak{A} \subseteq A$ pour $\mathfrak{A} \in \Sigma\}$ est un surordre de A appelé *anneau généralisé de fractions de A par Σ* [**4**].

Exemples.

a) Soit $\Sigma = \{\mathfrak{A}^n\}_{n>0}$ avec $\mathfrak{A}$ idéal entier de A, alors $A_\Sigma = A(\mathfrak{A}) = \bigcup_{n>0}(A:\mathfrak{A}^n)$ est un anneau appelé *transformé de Nagata* de l'idéal $\mathfrak{A}$ [**8**].

b) Soit $P = \{\mathfrak{P}\}$ une famille d'idéaux premiers de A et $\Sigma = \{\mathfrak{A} | \mathfrak{A} \not\subset \mathfrak{P}$ pour tout $\mathfrak{P} \in P\}$ alors $A_\Sigma = \bigcap_{\mathfrak{P}\in P} A_\mathfrak{P}$. En particulier un surordre A-plat est un anneau généralisé de fractions.

Si $\mathfrak{A}$ est un idéal fractionnaire de A, alors l'ensemble:

$$\mathfrak{A}_\Sigma = \{x \in K | \text{ il existe } \mathfrak{B} \in \Sigma \text{ tel que } x\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}\}$$

est un idéal fractionnaire de A_Σ et on a $\mathfrak{A}A_\Sigma \subseteq \mathfrak{A}_\Sigma$.

LEMME 1. *Soient* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\{\mathfrak{A}_i;$ *i de* 1 *à* $m\}$ *des idéaux de* A, *alors*
(1) $(\cap_i \mathfrak{A}_i)\mathfrak{B}_\Sigma \subset \cap_i \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_\Sigma \subset \cap_i (\mathfrak{A}_i\mathfrak{B})_\Sigma$
(2) $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})_\Sigma \supset \mathfrak{A}_\Sigma \mathfrak{B}_\Sigma$
(3) $(\mathfrak{A} : \mathfrak{B})_\Sigma \subset \mathfrak{A}_\Sigma : \mathfrak{B}_\Sigma$
(4) *Si* $\mathfrak{B}$ *est un idéal de type fini alors:* $\mathfrak{A}_\Sigma : \mathfrak{B}_\Sigma = (\mathfrak{A} : \mathfrak{B})_\Sigma = \mathfrak{A}_\Sigma : \mathfrak{B}A_\Sigma$

Immédiat.

Notons $I(A)$ le monoïde résidué des idéaux fractionnaires de l'anneau A, $D(A)$ le monoïde des idéaux divisoriels, $F(A)$ le groupe des idéaux fractionnaires principaux et $C(A)$ le monoïde $D(A)/F(A)$ des classes de diviseurs. On notera aussi $\mathfrak{A}_v = (\mathfrak{A}^{-1})^{-1}$.

THÉORÈME 1. *Soient* A *un anneau de Mori et* B *un anneau généralisé de fractions de* A *par la famille multiplicative* Σ. *Alors il existe un épimorphisme multiplicatif croissant* $j : D(A) \to D(B)$ *et un épimorphisme* $\bar{j} : C(A) \to C(B)$ *tel que l'on ait le diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} D(A) & \xrightarrow{j} & D(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(A) & \xrightarrow{\bar{j}} & C(B). \end{array}$$

avec $j(\mathfrak{A}_v) = (\mathfrak{A}_\Sigma)_v = (\mathfrak{A}B)_v = (\mathfrak{A}_v)_\Sigma$.

Si $\mathfrak{A}$ est un idéal de A, il existe suivant le théorème 1 [**8**, p. 341], un idéal de type fini tel que $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ et $A : \mathfrak{C} = A : \mathfrak{A}$. Suivant le lemme ci-dessus $B : \mathfrak{C}_\Sigma = B : \mathfrak{C}B$. De plus $\mathfrak{C}_\Sigma \subset \mathfrak{A}_\Sigma$ et $\mathfrak{A}_\Sigma(A : \mathfrak{A})_\Sigma \subset B$ d'où $(A : \mathfrak{A})_\Sigma \subset B : \mathfrak{A}_\Sigma \subset B : \mathfrak{C}_\Sigma = B : \mathfrak{C}B$. On a aussi $(A : \mathfrak{A})_\Sigma = (A : \mathfrak{C})_\Sigma = B : \mathfrak{C}B$ d'où $B : \mathfrak{A}_\Sigma = B : \mathfrak{C}B$. De plus $B : \mathfrak{A}B = B : \mathfrak{A}_\Sigma = B : \mathfrak{C}_\Sigma = (A : \mathfrak{A})_\Sigma$. Finalement $(\mathfrak{A}B)_v = (\mathfrak{A}_\Sigma)_v = (\mathfrak{A}_v)_\Sigma$ et j est un morphisme multiplicatif.

Soit $\mathfrak{A}'$ un idéal entier de B et $\alpha \in \mathfrak{A}'$, donc il existe $\mathfrak{B} \in \Sigma$ tel que $\alpha\mathfrak{B} \subset A$ puis $\alpha\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}' \cap A$ et $\alpha \in (\mathfrak{A}' \cap A)_\Sigma$, c'est-à-dire $\mathfrak{A}' \subseteq (\mathfrak{A}' \cap A)_\Sigma$. Posons $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \cap A$. On a $\mathfrak{A}B \subset \mathfrak{A}_v'$ puis $(\mathfrak{A}B)_v \subset \mathfrak{A}_v'$ donc $\mathfrak{A}_\Sigma \subseteq \mathfrak{A}_v'$, mais ci-dessus on a montré que $\mathfrak{A}_v' \subseteq \mathfrak{A}_\Sigma$ d'où $\mathfrak{A}_v' = \mathfrak{A}_\Sigma$.

Si $\mathfrak{A}'$ n'est pas un idéal entier de B, il existe $d \in K$ tel que $d\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}$ est un idéal entier de B d'où $(d\mathfrak{A}')_v = \mathfrak{B}_\Sigma = (\mathfrak{B}' \cap A)$ puis $\mathfrak{A}_v' = d^{-1}\mathfrak{B}_\Sigma = \mathfrak{B}_\Sigma : dB$ et suivant le lemme 1 $\mathfrak{A}_v' = (d^{-1}\mathfrak{B})_\Sigma$.

Finalement, j est surjectif. Par ailleurs $j\ (F(A)) \subseteq F(B)$, ce qui implique que j induit un épimorphisme $\bar{j} : C(A) \to C(B)$.

Ce résultat généralise le théorème 2 [**8**].

COROLLAIRE 1. *Tout anneau généralisé de fractions d'un anneau de Mori est un anneau de Mori. En particulier, tout anneau généralisé de fractions d'un anneau de Krull* (*resp. factoriel*) *est un anneau de Krull* (*resp. factoriel*).

Immédiat avec le théorème.

Rees et Nagata [**7**] ont construit le transformé de Nagata d'un anneau noethérien qui n'est pas noethérien. Notons par contre que si A est noethérien tout anneau généralisé de fractions de A est de Mori.

COROLLAIRE 2. *Tout surordre A-plat d'un anneau noethérien réflexif est un anneau noethérien réflexif.*

Soit B un surordre A-plat d'un anneau A noetherien réflexif. Selon le corollaire précédent, B est un anneau de Mori. Si $\mathfrak{A}' = uB + vB (u, v \in K$, corps des quotients de A et $B)$ alors $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}B$ avec $\mathfrak{A} = uA + vB$ d'où selon le théorème 2 [**8**] $\mathfrak{A}_v' = (\mathfrak{A}B)_v = B : (B : \mathfrak{A}B) = B\mathfrak{A}_v = B\mathfrak{A}$. Il suffit d'appliquer le théorème II - 3 pour obtenir le résultat. (Autre démonstration avec le théorème d'Akizuki).

4. Cloture integrale de certains anneaux locaux reflexifs.

LEMME 1. *Un anneau local réflexif dont l'idéal maximal est principal est un anneau de valuation.*

Soit A un anneau local réflexif de radical $\mathfrak{M} = Aa$. Si $x \in \bar{A} - A$ en notant par $\bar{A}$ la clôture intégrale de A alors $A[x]$ est un idéal fractionnaire et $A : A[x]$ un idéal entier d'où $A : A[x] \subset \mathfrak{M}$ puis $Aa^{-1} \subseteq A[x]$. Ainsi

$$a^{-1} = b_0 + b_1x + \ldots b_{n-1}x^{n-1} + x^n \quad (b_i \in A \text{ de } 0 \text{ à } n - 1).$$

Donc

$$1 = ab_0 + ab_1x + \ldots ab_{n-1}x^{n-1} + ax^n$$

d'où $1 \in \mathfrak{M}A[x]$ et $A[x] = \mathfrak{M}A[x]$. D'après le lemme de Nakayama $A[x] = 0$. Cette contradiction montre que $\bar{A} = A$. Selon [**3**, Théorème 5.1, p. 167] A est un anneau de valuation.

Soit A un anneau local réflexif, de radical $\mathfrak{M}$; donc $\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{M}$ ou A; si $\mathfrak{M}$ est inversible, il est principal, donc A est un anneau de valuation. Ecartons ce cas, alors $\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{M}$ et $B = \mathfrak{M}^{-1}$ est un surordre district de A. Si D est un anneau tel que $A \subsetneq D \subsetneq B$, alors $A : D$ est un idéal de A et $A : D \subsetneq \mathfrak{M}$. Or $D \subsetneq B$ implique $\mathfrak{M} \subsetneq A : D$ d'où $\mathfrak{M} = A : D = A : B$ d'où $D = B$ et contradiction. Il n'y a donc aucun anneau compris entre A et B. Si $\alpha \in B - A$, alors $B = A[\alpha]$ et $\alpha \in A : \mathfrak{M}$ implique $\mathfrak{M} = A \cap A\alpha^{-1}$ d'où $B = A : \mathfrak{M} = A : [A : (A + A\alpha)] = A + \alpha A$; B est un A-module de type fini donc α est entier sur A et $B \subset \bar{A}$.

LEMME 2. *Si $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$ sont deux idéaux distincts de B tel que $\mathfrak{A}' \cap A = \mathfrak{B} \cap A$, alors $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B}' = \mathfrak{A}' \cap A$, donc $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B}'$ est un idéal de A.*

On a $\mathfrak{A}' \cap A = (\mathfrak{A}' \cap A) \cap (\mathfrak{B}' \cap A) \subseteq \mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B}'$. Si $\mathfrak{A}' \cap A \subsetneq \mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B}'$, alors il existerait $\alpha \in \mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B}' - A$. Or $B = A[\alpha]$. Si $x \in \mathfrak{A}'$, alors

$$x = d_0 + d_1\alpha + \ldots d_n\alpha^n \text{ ou } d_i \in A$$

donc

$$d_0 = x - d_1\alpha - \ldots d_n\alpha^n \in \mathfrak{A}' \cap A = \mathfrak{B}' \cap A$$

et

$$x = d_0 + d_1\alpha + \ldots + d_n\alpha^n \in \mathfrak{B}'$$

donc contradiction, c'est à dire $\mathfrak{A}' \cap A = \mathfrak{B}' \cap \mathfrak{A}'$.

LEMME 3. *L'anneau B est local. Si $\mathfrak{M}_1$ est son idéal maximal alors $\mathfrak{M}_1 = A : \mathfrak{M}_1$ Si $\mathfrak{M}_1$ est principal alors $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1^2$, sinon $\mathfrak{M}_1^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$.*

Puisque B est entier sur A, selon le lemme précédent, B admet au plus deux idéaux maximaux $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ tel que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$. S'il existait $\mathfrak{A}'$ tel que $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{M}'$, alors $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}' \cap A = \mathfrak{M}' \cap A$, d'où $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{A}' = \mathfrak{M}$. Il n'y a donc aucun idéal propre entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ et entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}''$ et il existe $\beta = \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}$ et $\gamma \in \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + \beta B$ et $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} + \gamma B$. Or $\beta \in A[\alpha] = A + \alpha A$ donc $\beta = u + v\alpha$ avec $u, v \in A$. Ainsi $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + v\alpha B \subseteq \mathfrak{M} + \alpha B \neq B$. Finalement, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} + \alpha B$.

On a $\mathfrak{M}_1^2 \subseteq \mathfrak{M} \subseteq A$ donc $\mathfrak{M}_1 \subseteq A : \mathfrak{M}_1 \subset$ B. Etablissons que $A : \mathfrak{M}_1$ est un idéal de B. D'une part $(A : \mathfrak{M}_1) : (A : \mathfrak{M}_1) = [A : (A : \mathfrak{M}_1)] : \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M}_1$ puis $B(A : \mathfrak{M}_1) = (A + \alpha A)(A : \mathfrak{M}_1) = (A : \mathfrak{M}_1) + \alpha(A : \mathfrak{M}_1)$, d'autre part $\alpha\mathfrak{M}_1 = \alpha\mathfrak{M} + \alpha^2 A$ avec $\alpha^2 A \subset \mathfrak{M}_1^2 \subset \mathfrak{M}$ d'où $\alpha\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_1$ et $\alpha \in (\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M}_1)$ donc $\alpha(A : \mathfrak{M}_1) \subset (A : \mathfrak{M}_1)$ et $B(A : \mathfrak{M}_1) \subseteq (A : \mathfrak{M}_1)$. Nécessairement $A : \mathfrak{M}_1 \neq B$ sinon $A : \mathfrak{M}_1 = A : \mathfrak{M}$ puis $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$ car $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_1$ divisoriels dans A alors $\alpha \in \mathfrak{M}$ contrairement à l'hypothèse. Finalement $\mathfrak{M}_1 = A : \mathfrak{M}_1$.

On a $(B : \mathfrak{M}_1)\mathfrak{M}_1 = (A : \mathfrak{M}\mathfrak{M}_1)\mathfrak{M}_1 = (\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M})\mathfrak{M}_1 \subseteq B$. Si $(\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M})\mathfrak{M}_1 = B$ alors $\mathfrak{M}_1$ est inversible dans B donc principal et on peut adopter $\mathfrak{M}_1 = \alpha B$ d'où $\alpha B = A : \alpha B$ c'est-à-dire $\alpha^2 B = \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1^2$. Si $(\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M})\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1$ alors $\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M}$ d'où $\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M}_1$ donc $A : \mathfrak{M}_1\mathfrak{M} = A : \mathfrak{M}_1^2$. Puisque $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_1^2$ sont des divisoriels de l'anneau A, $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1^2$.

THÉORÈME 1. *Si l'idéal maximal $\mathfrak{M}_1$ de B est principal alors B est un anneau de valuation réflexif, clôture intégrale de A.*

Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de B. On a

$$B : (B : \mathfrak{A}) = A : \mathfrak{M}(A : \mathfrak{A}\mathfrak{M}) = [A : (A : \mathfrak{A}\mathfrak{M})] : \mathfrak{M};$$

mais $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ est un idéal de A d'où $B : (B : \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\mathfrak{M} : \mathfrak{M} = \mathfrak{A}\alpha^2 : \alpha^2 B = \mathfrak{A}$. Ainsi B est un anneau local réflexif dont l'idéal maximal est principal. Selon le lemme 1, B est un anneau de valuation donc $\bar{A} = B$.

THÉORÈME 2. *Si l'idéal $\mathfrak{M}$ est régulier pour $B = B_0$ alors B_0 est réflexif et son idéal maximal $\mathfrak{M}_1$ (supposé non principal dans B_0) est régulier pour $B_1 = B_0 : \mathfrak{M}_1$. Il existe alors une suite croissante d'anneaux locaux réflexifs entiers:*

$$A \subset B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_i \subset \ldots \bar{A}$$

avec $B_i/B_{i-1} \cong A/\mathfrak{M}$; B_{i-1}/A étant un $A/\mathfrak{M}$ espace vectoriel de dimension i.

$B : (B : \mathfrak{A}) = A : \mathfrak{M}(A : \mathfrak{A}\mathfrak{M}) = [A : (A : \mathfrak{A}\mathfrak{M})] : \mathfrak{M}$; si $\mathfrak{A}$ est un idéal de B, $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ est un idéal de A donc $B : (B : \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\mathfrak{M} : \mathfrak{M}$. Mais si $\mathfrak{M}$ est régulier dans le monoïde $I(B)$ des idéaux fractionnaires de B, alors $\mathfrak{A}\mathfrak{M} : \mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ et B est un anneau réflexif.

Puisque B est local et réflexif selon le lemme précédent, $B : \mathfrak{M}_1 = B_1 = B + \beta B$ avec $\beta \in B_1 - B$ donc $\mathfrak{M}B_1 = \mathfrak{M}B + \beta\mathfrak{M}$, $B = \mathfrak{M} + \beta\mathfrak{M}$; d'autre part, $\mathfrak{M}_1 = B : (B + \beta B) = A : \mathfrak{M}(B + \beta B) = A : (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}\beta) = A : \mathfrak{M}_1$ donc, puisque A est réflexif, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}\beta = \mathfrak{M}B_1$.

Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ deux idéaux de B_1 tel que $\mathfrak{A}\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{M}_1$ donc $\mathfrak{A}\mathfrak{M}B_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{M}B_1$ puis $\mathfrak{A}\mathfrak{M} = \mathfrak{B}\mathfrak{M}$ et enfin dans le monoïde résidué $I(A)$ des idéaux fractionnaires de A, $\mathfrak{A}\mathfrak{M} : \mathfrak{M} = \mathfrak{B}\mathfrak{M} : \mathfrak{M}$ c'est-à-dire $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Ainsi $\mathfrak{M}_1$ est régulier pour B_1.

Si l'on pose $B_i = B_{i-1} : \mathfrak{M}_i$ et $B_0 = B$ alors:

$$A \subset B_0 \subset B_1 \subset \ldots\ldots \subset B_i \subset \ldots \bar{A}$$

B_i est un anneau local réflexif, de plus $B_i/B_{i-1} \cong B_{i-1}/\mathfrak{M}_i$. Par ailleurs $B = A + \mathfrak{M}_1$ d'où $B/\mathfrak{M}_1 \cong A/\mathfrak{M}$ et de proche en proche $B_{i-1}/\mathfrak{M}_i \cong A/\mathfrak{M}$.

Remarque. Si A est *noethérien*, c'est un anneau de Gorenstein. On a alors le résultat $l(\bar{A}/A) = l(A/\bar{A}^{-1})$ [**1**, p. 19 - corollaire].

Bibliographie

1. H. Bass, *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Zeit., *82* (1963), 8–28.

2. N. Bourbaki, *Algèbre commutative* (Hermann-Paris).

3. W. Heinzer, *Integral domains in which each non-zero ideal is divisorial*, Mathematika, *15* (1968), 164–169.

4. ——— *Quotient overrings of integral domains*, Mathematika, *17* (1970), 139–148.

5. I. Kaplansky, *Commutative rings* (Allyn and Bacon, Boston, 1970).

6. E. Matlis, *Reflexive domains*, J. Algebra, *8* (1968), 1–33.

7. I. Nagata, *Local rings* (Interscience, New York, 1972).

8. J. Querre, *Sur une propriété des anneaux de Krull*, Bull. Sci. Math. 2ème serie, *95* (1971), 341–354.

9. O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra, Vol. I* (Van Nostrand, New York, 1958).

Université de Bretagne Occidentale,
Brest, France