Can. J. Math., Vol. XXVII, No. 4, 1975, pp. 792–796

# SYNTHESE HARMONIQUE DES SOUS-GROUPES DISCRETS

N. LOHOUÉ

Dans [**4**] C. S. Herz soulève la question suivante:

Soit $G = SL(2, \mathbf{R})$ le groupe des matrices réelles d'order deux, de déterminant un; soit $H = SL(2, \mathbf{Z})$ le sous-groupe discret de $G$, formé des matrices à coefficients entiers. Existe-t-il une constante absolue $c > 0$ telle que pour toute fonction $f$ de $A_p(H)$ à support fini, on puisse trouver une fonction $\tilde{f}$ de $A_p(G)$, à support compact dont la restriction à $H$ coïncide avec $f$ et $||\tilde{f}||_{A_p(G)} \leqq c||f||_{A_p(H)}$ ?

Une formulation équivalente de ce problème est la suivante:

$H$ est-il un ensemble de synthèse harmonique par rapport aux algèbres $A_p(G)$ ?

Le but de cette note est de donner une solution élémentaire de ce problème pour $p = 2$; nous indiquerons aussi la preuve de la synthèse harmonique des sous-groupes fermés pour $p = 2$. Nous nous référons à [**1**] pour les notations que nous ne rappelons pas dans cette note; en particulier le lecteur pourra se reporter à ce texte pour les définitions de $A_p(G)$ et les propriétés élémentaires que nous ne rappelons pas; toutefois signalons que nous notons $PM_p(G)$ l'espace de Banach dual de $A_p(G)$.

La proposition suivante prouvera deux faits:

(i) Si $p = 2$, tout sous-groupe discret est un ensemble de synthèse harmonique.

(ii) Si $p$ est quelconque, le problème de la synthèse harmonique des sous-groupes discrets se ramène tout simplement à un autre problème ouvert, à savoir si tout convoluteur de $L^p(G)$ est dans $PM_p(G)$, problème qui se résoud facilement quand $p = 2$, grâce au théorème de densité de Von-Neumann-Kaplansky, voir [**3**].

PROPOSITION. *Soit $G$ un groupe unimodulaire. Soit $S$ dans $PM_p(G)$ à support dans un sous-groupe discret $H$ de $G$; $S$ donne lieu a un convoluteur $S'$ de $L^p(H)$ tel que* $||S'||_{\mathrm{CONV}_p(H)} = ||S||_{PM_p(G)}$.

*Preuve de la proposition.* Fixons quelques notations.

(1) *Préliminaires.* Soit $V$ un voisinage compact, symétrique de l'élément neutre $e$ de $G$ tel que $(V\,V) \cap H = e$.

Soit $\Omega$ une fonction de $A_p(G)$ qui satisfait les conditions suivantes:

(a) Le support de $\Omega$ est contenu dans $V$.

(b) $\Omega$ est symétrique: $\tilde{\Omega} = \Omega$ où $\tilde{\Omega}(g) = \Omega(g^{-1})$ et $\Omega * \Omega(e) \neq 0$.

(c) $\Omega \equiv 1$ sur un voisinage de l'élément neutre du groupe.

(d) Pour tout $g \in G$, $(Rg\tilde{\Omega}) \in A_p(G)$; $(Rg\Omega)(u) = \Omega(ug)$.

Reçu le 26 juin, 1973 et sous forme revisée, le 1 avril, 1975.

L'existence d'une telle fonction est évidente; il suffit de choisir un voisinage $W_0$ compact, symétrique de l'élément neutre du groupe tel que $W_0W_0 \subset V$, et de poser $\Omega = \chi_{W_0} * \chi_{W_0}[\text{mes}(W_0)]^{-1}$; mes $(W_0)$ étant la mesure de Haar de $W_0$. Pour tout $h \in H$, posons: $(L_h\Omega)(g) = \Omega(h^{-1}g)$ où $g$ est un point du groupe. Alors

0.0 $\quad (L_h\Omega)S = \lambda_h\delta_h$

où $\lambda_h$ est un nombre complexe, éventuellement nul (si $h$ n'est pas dans le support de $S$) et

$$\operatorname{Sup}_h |\lambda_h| < \infty.$$

En effet, d'après le choix de $V$ et la propriété a) de $\Omega$, le support de $(L_h\Omega)S$ est au plus réduit à un point; il est réduit à un point si $h$ est dans le support de $S$; il est vide dans le cas contraire.

Alors le théorème de synthèse ponctuelle (voir [**1**]) dit que $L_h\Omega \cdot S = \lambda_h\delta_h \cdot \lambda_h$ étant nul si nous sommes sous la seconde hypothèse.

Par ailleurs

$$\langle L_h\Omega \cdot S, L_h\Omega \rangle = \lambda_h$$

et

$$\begin{aligned} |\lambda_h| &\leqq ||L_h\Omega||_{A_p(G)}||S||_{PM_p(G)}||L_h\Omega||_{A_p(G)} \\ &\leqq ||\Omega||^2{}_{A_p(G)}||S||_{PM_p(G)}. \end{aligned}$$

Posons $S' = \sum_{h\in H}\lambda_h\delta_h$ et montrons que $S'$ est un convoluteur de $L^p(H)$.

(2) Soit $U$ une fonction à support fini dans $H$

$$S' * U(h') = \sum_{h\in H} \lambda_h U(h^{-1}h')$$

est bien définie

2.1
$$\begin{aligned} \sum_{h'\in H} S' * U(h')\Omega(h'^{-1}g) &= \sum_{h'\in H}\left(\sum_{h\in H} \lambda_h U(h^{-1}h')\right)\Omega(h'^{-1}g) \\ &= \sum_{h\in H} \lambda_h \sum_{h'\in H} U(h^{-1}h')\Omega(h'^{-1}g) \\ &= \sum_{h\in H} \lambda_h \sum_{h'\in H} U(h_1)\Omega(h_1{}^{-1}h^{-1}g) \\ &= \sum_{h\in H} \lambda_h R_g(U * \Omega)^{\sim}(h). \end{aligned}$$

Mais pour chaque $g$, $R_g(U*\Omega)^{\sim}$ est une fonction de $A_p(G)$, à support compact et:

$$S * (U * \Omega)(g) = \langle S, R_g(U * \Omega)^{\sim}\rangle.$$

2.2. Soit $\Phi$ une fonction de $A_p(G)$, à support compact, qui vaut 1 sur un voisinage du support de $R_g(U * \Omega)^{\sim}$ (nous n'utilisons $\Phi$ que de façon purement algébrique, sa norme n'interviendra en aucune façon); soit $F = \text{Supp}\,(S) \cap \text{Supp}\,(\Phi)$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1975-086-1 Published online by Cambridge University Press

On remarque que $\sum_{h\in F} L_h\Omega \equiv 1$ sur un voisinage du support de $\Phi S$ [**]. Alors:

$$\begin{aligned}(2.3)\quad \langle S, R_g(U*\Omega)^\sim \rangle &= \langle \Phi S, R_g(U*\Omega)^\sim\rangle \\ &= \Big\langle \sum_{h\in F} L_h\Omega\Phi S, R_g(U*\Omega)^\sim \Big\rangle \quad \text{d'après [**]} \\ &= \Big\langle \sum_{h\in F} L_h\Omega S, \Phi R_g(U*\Omega)^\sim \Big\rangle \\ &= \sum_{h\in F} \lambda_h R_g(U*\Omega)^\sim(h).\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après 2.1

$$S * (U * \Omega)(g) = (S' * U) * \Omega(g).$$

2.4. Mais d'après le choix de $\Omega$ on a:

$$\begin{aligned}\text{(i)}\ ||(S' * U) * \Omega||_{L^p(G)} = ||S * (U * \Omega)||_{L^p(G)} &= ||S' * U||_{L^p(H)}||\Omega||_{L^p(G)} \\ &\leqq ||S||_{PM_p(G)}||U * \Omega||_{L^p(G)}.\end{aligned}$$

Comme

$$\text{(ii)}\ ||U * \Omega_{L^p(G)} = ||U||_{L^p(H)}||\Omega||_{L^p(G)}$$

et qu'on a la même relation entre $(S' * U) * \Omega$ et $S * (U * \Omega)$,

$$||S' * U||_{L^p(H)} \leqq ||S||_{PM_p(G)}||U||_{L^p(H)};$$

ce qu'il fallait prouver.

(3) Montrons que $||S||_{PM_p(G)} \leqq ||S'||_{\mathrm{CONV}_p(H)}$ ou, ce qui revient au même que

$$||S||_{\mathrm{CONV}_p(G)} \leqq ||S'||_{\mathrm{CONV}_p(H)}.$$

Comme $G$ est unimodulaire, il existe une mesure $d\mu(\dot{x})$ sur $H/G$ telle que

$$\int_G f(x)dx = \int_{H/G} d\mu(\dot{x}) \int_H f(xh)dh.$$

Alors pour toute fonction $\Phi$ sur $G$ à support compact,

$$\begin{aligned}\int_G |S * \Phi(x)|^p dx &\leqq \int_{H/G}\left(\int_H |S' * (R_x\Phi)(h)|^p dh\right) d\mu(\dot{x}) \\ &\leqq ||S'||^p_{\mathrm{CONV}_p(H)}||\Phi||^p_{L^p(G)}.\end{aligned}$$

*Remarques.* (1) Si $p = 2$, on déduit de cette proposition que tout sous-groupe discret est un ensemble de synthèse harmonique.

En effet, comme $S'$ est un convoluteur de $L^2(H)$, $S'$ est dans $PM_2(H)$; on voit facilement que la forme linéaire $f \to \langle S', \mathrm{Res}_H f\rangle$ que est continue puisque la norme de $\mathrm{Res}_H f$ dans $A_2(G)$ est dominée par celle de $f$ d'après [**4**], coïncide avec $S$ comme forme linéaire sur $A_2(G)$.

Il s'ensuit que si $f$ est nulle sur $H$, $\langle S, f \rangle = 0$, ce qui donne la synthèse harmonique.

A cette étape, il nous semble utile de rappeler comment on prouve qu'un convoluteur de $L^2(G)$ est dans $PM_2(G)$ [**1**].

En effet, $\mathrm{CONV}_2(G)$ est le bi-commutateur de l'algèbre de Von-Neumann engendrée par les translations à gauche, le théorème de densité de Kaplansky dit alors que tout opérateur de convolution est limite ultra-forte d'un filtre $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mu_\alpha$ étant une combinaison linéaire finie d'opérateurs de translations à gauche.

Pour $p \neq 2$, un tel résultat semble douteux. D'ailleurs on retrouve la même difficulté quand on veut utiliser le raisonnement précédent pour prouver qu'un sous-ensemble discret infini est un ensemble de synthèse harmonique pour $A_2(G)$.

On peut de toutes les façons prouver que si $S$ est dans $PM_p(G)$ à support discret, alors $S$ est dans $\mathrm{CONV}_p(G_d)$ où $G_d$ est le groupe $G$ muni de la topologie discrète (même raisonnement que ci-dessus). Il s'en suit que pour $p = 2$, il existe un filtre $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de mesures à support fini tel que:

$$||\mu_\alpha||_{PM_2(G_d)} \leqq ||S||_{\mathrm{CONV}_2(G_d)} \leqq ||S||_{\mathrm{CONV}_2(G)}; \; \mu_\alpha \rightarrow S \text{ sur } A_2(G_d).$$

Mais la situation se gâte sérieusement ici pour deux raisons: d'une part on ne peut plus contrôler le support de $\mu_\alpha$, par le théorème de densité de Von-Neumann-Kaplansky, d'autre part ce contrôle ne nous avancerait pas beaucoup puisque $\mu_\alpha$ converge faiblement sur $A_2(G_d)$ et qu'à priori la restriction d'une fonction $f$ de $A_2(G)$ à un sous-ensemble discret infini n'a aucune raison d'être telle que $\lim_\alpha \langle f, \mu_\alpha \rangle = \langle f, S \rangle$.

Par ailleurs, il convient de remarquer qu'il ne faut pas du tout espérer trouver brutalement par Kaplansky des $\mu_\alpha$ tels que $||\mu_\alpha||_{PM_2(G)} \leqq ||S||_{\mathrm{CONV}_2(G)}$, inégalité qui arrangerait un peu la situation. On peut signaler à ce propos que $SU(2)$ contient un sous-groupe libre à deux générateurs et d'après J. Dieudonné [**2**] il existe une mesure $\mu$ sur $SU(2)$ à support fini telle que:

$$||\mu||_{PM_2[SU(2)_d]} < ||\mu||_{PM_2[SU(2)]}.$$

Nous espérons revenir sur cette question dans le futur.

(2) Il est important de remarquer encore qu'une idée de démonstration issue de l'analyse harmonique commutative ne marche pas non plus. En effet, une idée classique pour prouver qu'un sous-ensemble $E$ est de synthèse harmonique consiste à relever des fonctions de l'algèbre de restrictions par un procédé de convolution. Mais dans le cas des sous-groupes discrets, ce procédé naturel est inefficace.

En effet, on peut prouver la:

PROPOSITION. *Soient $G = SL(2, \mathbf{R})$ et $H = SL(2, \mathbf{Z})$, pour toute fonction*

https://doi.org/10.4153/CJM-1975-086-1 Published online by Cambridge University Press

$\Omega$: $G \to \mathbf{R}$, *continue, a support compact* $V$, *tel que* $VV^{-1} \cap H = \{e\}$, *il existe une fonction* $f$ *de* $A_2(H)$ *telle que la fonction*

$$\Phi(g) = \sum_{h \in H} f(h)\Omega(h^{-1}g)$$

*ne soit pas dans* $A_2(G)$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, le phénomène de Kunze et Stein [**5**] montrerait facilement que pour tout $q > 2$, $A_2(\mathbf{Z})$ est un sous-espace de $L^q(\mathbf{Z})$; ce qui bien évidement est faux.

Pour terminer indiquons la preuve générale de la proposition.

PROPOSITION. *Soit* $G$ *un groupe localement compact; soit* $H$ *un sous-groupe fermé de* $G$; $H$ *est un ensemble de synthèse bornée par rapport a* $A_2(G)$:

*Pour toute pseudo-mesure* $S$ *sur* $G$, *à support dans* $H$, *il existe un ensemble* $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *de mesures a support fini, portées par* $H$ *telles que*

(i) $||\mu_\alpha||_{PM_2(G)} \leqq ||S||_{PM_2(G)}$;

(ii) *pour toute fonction* $f \in A_2(G)$,

$$\lim_\alpha \int_G f(x) d\mu_\alpha(x) = \langle f, S \rangle.$$

*Preuve.* Soit $N_H$ l'algèbre de Von-Neumann engendrée dans $PM_2(G)$ par les opérateurs de convolution avec les mesures à support fini, portées par $H$; il a été prouvé dans [**6**] que si $S$ dans $PM_2(G)$, à support dans $H$, $S$ appartient à $N_H$. Le théorème de densité de Kaplansky, voir [**3**] prouve qu'il existe un ensemble filtrant $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de mesures à support fini, qui vérifient la conclusion de la proposition.

*Remarques.* La preuve de cette proposition est un peu artificielle parce que nous avons utilisé un théorème difficile à prouver, pour conclure, en l'occurence le théorème démontré dans [**6**]. C'est cette raison qui nous a poussé à donner une démonstration élémentaire pour les sous-groupes discrets.

BIBLIOGRAPHIE

**1.** P. Eymard, *Algèbres* $A_p$ *et convoluteurs de* $L^p(G)$, Sém. N. Bourbaki, 22ème année, exposé *367*, Paris.

**2.** J. Dieudonne, *Sur le produit de composition, II*, J. Math. Pures Appl. *39* (1960), 275–292.

**3.** J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, 2ème éd (Gauthier-Villars, Paris, 1969).

**4.** C. S. Herz, *Conference on harmonic analysis*, Maryland, Lecture Notes *226* (Springer-Verlag, 1972).

**5.** R. A. Kunze and E. M. Stein, *Uniformly bounded representations and harmonic of* 2 *real unimodular groups*, I. A. J. Maths. *82* (1960), 1–62.

**6.** M. Takesaki and N. Tatsuuma, *Duality and subgroups, II*, J. Functional Analysis *11* (1972), 184–185.

*Université Paris-Sud,*
*Centre d'Orsay*
91-*ORSAY* (*France*)

https://doi.org/10.4153/CJM-1975-086-1 Published online by Cambridge University Press