J. Can. Math. Vol. **43** (4), 1991 pp. 852–896

SUR LES INTÉGRALES ORBITALES TORDUES POUR LES GROUPES LINÉAIRES: UN LEMME FONDAMENTAL

J-L. WALDSPURGER

RÉSUMÉ. On donne des formules de récurrence qui déterminent des fonctions analogues aux germes de Shalika, pour les groupes linéaires sous une hypothèse de ramification modérée. Ces formules se généralisent au cas où les intégrales orbitales sont *tordues* par un caractère non ramifié. On en déduit un *lemme fondamental* comparant des intégrales orbitales tordues et non tordues pour des fonctions biinvariantes par le compact maximal.

Introduction. Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, E une extension finie de F, non ramifiée, ε un caractère de F^*, m un entier ≥ 1. Posons $r = [E\colon F]$ et supposons que ε est non ramifié d'ordre r. Posons $n = mr$, $G = \mathrm{GL}(n, F)$, $H = \mathrm{GL}(m, E)$. On identifie H à un sous-groupe de G par un plongement convenable (cf. II 1).

Soient $\gamma \in H$ un élément semi-simple G-régulier, c'est-à-dire régulier dans G, et T son commutant dans G. On choisit des mesures sur G et T, donc sur $T\backslash G$ (cf. I 2). Pour $f \in C_c^\infty(G)$, c'est-à-dire pour une fonction $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ localement constante à support compact, on pose

$$I_G^\varepsilon(f,\gamma) = \int_{T\backslash G} \varepsilon \cdot \det(g) f(g^{-1}\gamma g)\, dg.$$

En appliquant cette définition au cas $E = F$, $r = 1$, $\varepsilon = 1$, on définit pour $f \in C_c^\infty(H)$ l'intégrale orbitale $I_H^1(f,\gamma)$, notée simplement $I_H(f,\gamma)$.

A la suite de Langlands et Shelstad, on définit un facteur de transfert $\Delta_G^H(\gamma)$ (cf. II 4).

Notons K le sous-groupe compact maximal usuel de G et $\mathcal{H}_G^K$ l'algèbre des fonctions $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ à support compact et biinvariantes par K. On définit de même l'algèbre $\mathcal{H}_H^K$. On définit alors un homomorphisme $b\colon \mathcal{H}_G^K \longrightarrow \mathcal{H}_H^K$ de la façon suivante. Introduisons les algèbres de polynômes symétriques $C_n = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_n}$ et $C_m = \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_m, Y_1^{-1}, \ldots, Y_m^{-1}]^{\mathfrak{S}_m}$. Notons $\hat{b}\colon C_n \longrightarrow C_m$ l'homomorphisme déduit du changement de variables $X_{jr+k} \longmapsto e^{2\pi ik/r} Y_{j+1}^{1/r}$, pour $0 \leq j < m$, $l \leq k \leq r$ (cf. II 3). Alors b se déduit de $\hat{b}$ grâce à l'isomorphisme de Satake qui identifie $\mathcal{H}_G^K$ à C_n et $\mathcal{H}_H^K$ à C_m.

Le résultat principal de l'article est le théorème suivant.

THÉORÈME. *Soient $f \in \mathcal{H}_G^K$, $\gamma \in H$. Supposons γ semi-simple G-régulier. Supposons que l'algèbre $F(\gamma)$ est un produit d'extensions modérément ramifiées de F. Alors on a l'égalité $\Delta_G^H(\gamma) I_G^\varepsilon(f,\gamma) = I_H(bf,\gamma)$.*

Reçu par les editeurs le 26 février 1991 .
AMS subject classification: 11F85, 22ES0.

Evidemment, l'hypothèse de ramification modérée est une restriction qui devrait être superflue. Notons qu'elle est toujours vérifiée si la caractéristique résiduelle est $> m$. Pour les éventuelles applications globales (à un corps de nombres) elle est donc vérifiée presque partout.

Le théorème a été démontré par Kazhdan quand $m = 1$ ([K1], utilement complété par [He]; le cas $n = 2$ avait auparavant été traité par Labesse et Langlands [LL]), et conjecturé par lui dans le cas général.

Le groupe H n'est pas un sous-groupe endoscopique de G. Néanmoins en modifiant légèrement la situation, on montre que le théorème est un cas particulier du *lemme fondamental* (non démontré en général) bien connu des spécialistes de la formule des traces, cf. II 5.

Notre méthode consiste à établir des formules de récurrence pour les intégrales $I_G^\varepsilon(f,\gamma)$ quand $f \in C_c^\infty(G)$ est biinvariante par un sous-groupe d'Iwahori. Il faut pour cela développer $I_G^\varepsilon(f,\gamma)$ en germes (qui ressemblent aux germes de Shalika sans pourtant être ceux-ci). Ce sont ces germes que l'on détermine par récurrence. Quand $\varepsilon = 1$, que γ est elliptique et que $F(\gamma)/F$ est non ramifiée, cela avait été fait dans un article précédent ([W]). On généralise ces résultats au cas ε d'ordre r, $F(\gamma)/F$ modérément ramifiée. En principe, nos résultats permettent donc de calculer par récurrence les germes (et aussi les germes de Shalika) pour de tels γ (cf. VII 7). Mais la formule obtenue est bien moins élégante (c'est un euphémisme) que dans le cas non ramifié. L'auteur est convaincu qu'il existe une bonne combinatoire, moins naïve que celle utilisée ici, qui devrait permettre de calculer les germes. Une fois les formules de récurrence établies pour $I_G^\varepsilon(f,\gamma)$, et du même coup pour $I_H(bf,\gamma)$, il ne reste plus qu'à les comparer.

Cet article, comme le précédent, doit beaucoup à la démonstration par Clozel d'une conjecture de Howe. Il doit tout autant à un récent article de Hales ([Ha]) qui traite du même sujet. Nous avons emprunté à Hales la définition II 4 et la démonstration des lemmes V 7 et V 8. Plus profondément, c'est en lisant son article que l'on s'est convaincu qu'il n'était pas désespéré de tenter de calculer des traces *tordues* (par le facteur ε), cf. § V.

1. **Notations, rappels.**

I 1. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On note p, resp. q, la caractéristique, resp. le nombre d'éléments de son corps résiduel; o l'anneau des entiers de F. On fixe une uniformisante ϖ. La valuation v, resp. la valeur absole $|\,.\,|$, sont normalisées par les égalités $v(\varpi) = 1$, $|\varpi| = q^{-1}$.

I 2. Soit n un entier ≥ 1. Posons $G = \mathrm{GL}(n,F)$. On note $K = \mathrm{GL}(n,o)$ le sous-groupe compact maximal habituel de G. On munit G de la mesure de Haar pour laquelle $\mathrm{mes}(K) = 1$. On note I le sous-groupe d'Iwahori formé des $g = (g_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K$ tels que $v(g_{ij}) \geq 1$ pour tous (i,j) tels que $q \leq j < i \leq n$. Notons B le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures et D le tore des matrices diagonales. On appelle sous-groupe parabolique standard un sous-groupe parabolique P de G contenant B. Un tel sous-groupe possède un unique sous-groupe de Lévi L standard, c'est-à-dire contenant D. Ces sous-groupes paraboliques, ou de Lévi, standards, sont naturellement paramétrés par l'ensemble $\mathcal{P}(n)$ des partitions non ordonnées de n, i.e., par les suites finies $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ d'entiers $\lambda_i \geq 1$ telles que $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = n$. On note $P(\boldsymbol{\lambda})$ et $L(\boldsymbol{\lambda})$ les sous-groupes correspondant à $\boldsymbol{\lambda}$.

I 3. Soient P un sous-groupe parabolique standard, L son sous-groupe de Lévi standard et U son radical unipotent. Pour $f \in C_c^\infty(G)$ on définit $f^P \in C_c^\infty(L)$ par

$$f^P(\ell) = \delta_P^G(\ell)^{1/2} \int_{K \times U} f(k^{-1} \ell\, uk)\, du\, dk$$

pour tout $\ell \in L$; δ_P^G désigne le module usuel et du est une mesure de Haar sur U telle que $\operatorname{mes}(U \cap K) = 1$.

I 4. On note W le groupe de Weyl de G. On l'identifie si besoin est au groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ou encore au sous-groupe de G formé des matrices de permutation.

I 5. On note $\mathcal{H}^K$, resp. $\mathcal{H}^I$, l'algèbre des fonctions sur G, à valeurs complexes, à support compact et biinvariantes par K, resp. I; $\mathcal{H}_W^I$ la sous-algèbre des éléments de $\mathcal{H}^I$ à support dans K. Il existe un isomorphisme, dit de Satake:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^K &\longrightarrow \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_n} \\ f &\longmapsto \hat{f} \end{aligned}$$

l'exposant $\mathfrak{S}_n$ signifie que l'on prend les invariants par l'action naturelle du groupe $\mathfrak{S}_n$.

I 6. Soit $g \in G$. Nous dirons que g est compact si toutes ses valeurs propres ont même valuation, dans une extension finie de F les contenant toutes. Il revient au même de dire que g est conjugué d'un élément d'un sous-groupe de G dont l'image dans $\mathrm{PGL}(n, F)$ est compacte. On note 1_c la fonction caractéristique du sous-ensemble des éléments compacts de G. Si $N \in \mathbb{Z}$, on note 1_N la fonction caractéristique du sous-ensemble $\{g \in G; v \circ \det(g) = N\}$. Ces notations, on l'espère, ne créent pas de confusion.

I 7. Pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on note $\mathcal{L}_i$ le réseau suivant de F^n:

$$\mathcal{L}_i = \underbrace{o \oplus \cdots \oplus o}_{n-i} \oplus \underbrace{\varpi o \oplus \cdots \oplus \varpi o}_{i}$$

Plus généralement pour $i \in \mathbb{Z}$, écrivons $i = j + kn$, avec $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $k \in \mathbb{Z}$. On pose $\mathcal{L}_i = \varpi^k \mathcal{L}_j$. De même soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathcal{P}(n)$. Pour $i \in \{0, \ldots, t-1\}$, on pose

$$\mathcal{L}_i^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{L}_{\alpha_i'}, \text{ où } \alpha_i' = \alpha_{t+1-i} + \cdots + \alpha_t.$$

Plus généralement, pour $i \in \mathbb{Z}$, écrivons $i = j + kt$, avec $j \in \{0, \ldots, t-1\}$, $k \in \mathbb{Z}$. On pose $\mathcal{L}_i^{\boldsymbol{\alpha}} = \varpi^k \mathcal{L}_j^{\boldsymbol{\alpha}}$.

I 8. Les objets précédents, qui étaient relatifs à un corps F et un groupe $G = \mathrm{GL}(n, F)$, peuvent bien sûr être définis si l'on change de corps F ou d'entier n. Le objets relatifs à G peuvent également être généralisés à des produits de groupes linéaires. Si besoin est, pour éviter les confusions, on les indicera par la lettre F ou G (par exemple $|\,.\,|_F$, K_G etc..

I 9. On a déjà introduit l'ensemble $\mathcal{P}(n)$ des partitions non ordonnées de n. Notons $\mathcal{P}^{\circ}(n)$ le sous-ensemble des partitions ordonnées, i.e., des suites $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ d'entiers telles que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_t \geq 1, \qquad \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = n.$$

On notera parfois plus précisément $t(\boldsymbol{\lambda})$ l'entier t ci-dessus, cette notation valant aussi si $\boldsymbol{\lambda}$ n'est pas ordonnée. Pour $\boldsymbol{\lambda}$ comme ci-dessus, on pose

$$S(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j^2$$

et l'on définit la suite $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_t^*)$ de demi-entiers par

$$\lambda_j^* = \Big(\sum_{k=j+1}^{t} \lambda_k - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k\Big)/2.$$

Soient e un entier ≥ 1 et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots,, \lambda_t) \in \mathcal{P}(n)$. On définit les deux partitions suivantes de en:

$$e\boldsymbol{\lambda} = (e\lambda_1, \ldots, e\lambda_t),$$
$$\boldsymbol{\lambda}^e = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t, \lambda_1, \ldots, \lambda_t, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_t),$$

la suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ étant répétée e fois.

Soient $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_u)$ deux éléments de $\mathcal{P}(n)$. On note $M(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ l'ensemble des tableaux $(a_{ij})_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq u}$ d'entiers $a_{ij} \geq 0$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, t\}$, $\sum_{j=1}^{u} a_{ij} = \lambda_i$; pour tout $j \in \{1, \ldots, u\}$, $\sum_{i=1}^{t} a_{ij} = \mu_j$. On note $M^1(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ le sous-ensemble des tableaux pour lesquels $a_{ij} \in \{0, 1\}$ pour tous i, j.

I 10. On note R la PSH-algèbre universelle de Zelevinsky ([Z]). En tant qu'algèbre c'est l'algèbre des polynômes en des variables x_i, $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, i.e.

$$R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots].$$

Pour $N \geq 1$ et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(N)$, posons $x_{\boldsymbol{\lambda}} = x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_t}$. Posons $x_0 = 1$ et formellement $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}^{\circ}(0) = \{0\}$. Alors $\{x_{\boldsymbol{\lambda}}; \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{\circ}(N), N \in \mathbb{N}\}$ est une base de R comme $\mathbb{Z}$-module. Plus précisément notons R_N le $\mathbb{Z}$-module de base $\{x_{\boldsymbol{\lambda}}; \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{\circ}(N)\}$. Alors

$$R = \bigoplus_{N \in \mathbb{N}} R_N,$$

et cette décomposition fait de R un anneau gradué. On a aussi dans R des termes y_i et z_i, $i \in \mathbb{N}$. On définit de même $y_{\boldsymbol{\lambda}}$ et $z_{\boldsymbol{\lambda}}$ pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(N)$. Alors $\{y_{\boldsymbol{\lambda}}; \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{\circ}(N)\}$ est encore une base de R_N. Par contre $\{z_{\boldsymbol{\lambda}}; \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{\circ}(N)\}$ est seulement une base sur $\mathbb{Q}$ de $R_N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Les x_i et y_i sont liés par la formule suivante. Notons

$$X(T) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i T^i, \quad Y(T) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i T^i$$

les séries génératrices en une variable T. Alors on a l'égalité

$$X(T)Y(-T) = 1.$$

D'autre part, R est muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, défini positif. Soit $f \in \mathbb{N}, f \geq 1$. On définit un endomorphisme d'algèbres $\tau_f \in \mathrm{End}\Big(R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\Big)$ par la formule $\tau_f(z_i) = z_{fi}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. On vérifie que $\tau_f(R) \subset R$.

I 11. Soit A un anneau commutatif et N un entier ≥ 1. Considérons l'algèbre, notée $A[[X_1, \ldots, X_N]]_{\mathrm{loc}}$, formée des éléments P du corps $A((X_1, \ldots, X_N))$ pour lesquels il existe $M \in N$ tel que $(X_1 \cdots X_N)^{M_P} \in A[[X_1, \ldots, X_N]]$. Tout élément P de cette algèbre a des coefficients, que nous noterons $c_{\boldsymbol{d}}(P)$, pour $\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z}^N$, définis par

$$P = \sum_{\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z}^N} c_{\boldsymbol{d}}(P) \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}},$$

où bien sûr si $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_N)$, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}} = X_1^{d_1} \cdots X_N^{d_N}$. Soient M un entier $\geq N$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathcal{P}(M)$ (avec $t(\boldsymbol{\lambda}) = N$), $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_t) \in \mathcal{P}(N)$. On définit le sous-ensemble $\Gamma^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}^N$: c'est l'ensemble des $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_N)$ tels que pour tout $h \in \{1, \ldots, N-1\}$,

$$\Big(\sum_{i=1}^{h} d_i\Big)\Big(\sum_{i=h+1}^{N} \lambda_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{h} \lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=h+1}^{N} d_i\Big) \begin{cases} = 0, & \text{s'il existe } j \text{ tel que } h = \mu_1 + \cdots + \mu_j, \\ > 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(On reconnait dans ces formes linéaires les duales des racines simples relatives à des sous-groupes paraboliques de $\mathrm{GL}(M)$). Pour $P \in A[[X_1, \ldots, X_N]]_{\mathrm{loc}}$, on définit $\Gamma^{\boldsymbol{\mu}_P}_{\boldsymbol{\lambda}}$ appartenant à la même algèbre par

$$\Gamma^{\boldsymbol{\mu}_P}_{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{\boldsymbol{d} \in \Gamma^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{Z}}} c_{\boldsymbol{d}}(P) \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}}.$$

Si $\boldsymbol{\lambda} = (1)^N$ ou si $\boldsymbol{\mu} = (N)$, on l'omet de la notation. Enfin pour $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_t) \in \mathcal{P}(N)$, on définit $s_{\boldsymbol{\mu}}(X) \in \mathbb{Z}[X, X^{-1}]^N$ ainsi: pour $j \in \{1, \ldots, t\}$, $i \in \{1, \ldots, \mu_j\}$, posons $k = \mu_1 + \cdots + \mu_{j-1} + i$ et $s_k = X^{i-(\mu_j+1)/2}$; alors

$$s_{\boldsymbol{\mu}}(X) = (s_1, \ldots, s_N).$$

2. La situation.

II 1. On fixe F comme en I 1. Sauf mention du contraire, les termes p, $|\,.\,|$ etc. sont désormais relatifs à F. On fixe une extension finie E de F, non ramifiée, un caractère ε de F^* et un entier $m \geq 1$. Notons $r = [E : F]$. On suppose que ε est non ramifié d'ordre r. Alors $\varepsilon(\varpi)$ est une racine primitive r-ième de l'unité dans $\mathbb{C}^*$. Posons $n = mr$, $G = \mathrm{GL}(n, F)$, $H = \mathrm{GL}(m, E)$. Sauf mention du contraire, les termes K, W etc. sont désormais relatifs à G. On identifie E^m à F^n de la façon suivante: on identifie d'abord E à F^r par un isomorphisme F-linéaire de sorte que $\mathfrak{o}_E$ s'identifie à $\mathfrak{o}_F^r$; alors E^m s'identifie à $F^r \oplus \cdots \oplus F^r$, m fois, que l'on identifie de la façon naturelle à F^n. Alors H s'identifie à un sous-groupe de G.

II 2. Soient $\gamma \in G$ un élément semi-simple régulier et D une distribution sur G telle que pour toute $f \in C_c^\infty(G)$, tout $g \in G$,

$$D[\mathrm{Ad}(g)(f)] = \varepsilon \circ \det(g)^{-1} D(f).$$

Nous dirons qu'une telle distribution est ε-variante. Supposons $\gamma \in \mathrm{Supp}(D)$. On montre alors que γ est conjugué à un élément de H. Cela justifie de se limiter au cas où $\gamma \in H$ dans la définition suivante.

Soient $\gamma \in H$ un élément semi-simple G-régulier, c'est-à-dire régulier dans G, et T son commutant dans H. C'est aussi son commutant dans G. On a choisi une mesure sur G. Comme T est un produit de groupes linéaires sur des extensions de E, on a aussi une mesure sur T, d'où une mesure sur $T\backslash G$. Pour $f \in C_c^\infty(G)$, on pose

$$I_G^\varepsilon(f,\gamma) = \int_{T\backslash G} \varepsilon \circ \det(g) f(g^{-1}\gamma g)\, dg.$$

En appliquant ces définitions au cas $E = F$, $r = 1$, $\varepsilon = 1$, on définit pour $f \in C_c^\infty(H)$ l'intégrale orbitale $I_H^1(f,\gamma)$, notée simplement $I_H(f,\gamma)$.

II 3. On définit un homomorphisme.

$$\hat{b}\colon \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,X_1^{-1},\ldots,X_n^{-1}]^{\mathfrak{S}_n} \longrightarrow \mathbb{C}[Y_1,\ldots,Y_m,Y_1^{-1},\ldots,Y_m^{-1}]^{\mathfrak{S}_m}$$

de la façon suivante: on introduit des racines $Y_i^{1/r}$, on définit un homomorphisme

$$\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,X_1^{-1},\ldots,X_n^{-1}] \longrightarrow \mathbb{C}[Y_1^{1/r},\ldots,Y_m^{1/r},Y_1^{-1/r},\ldots,Y_m^{-1/r}]$$

par $X_{ir+j} \longmapsto \varepsilon(\varpi)^j Y_{i+1}^{1/r}$ pour $0 \leq i < m$, $1 \leq j \leq r$; on vérifie que cet homomorphisme se restreint aux invariants par $\mathfrak{S}_n$ en un homomorphisme $\hat{b}$ dont l'image est bien dans l'algèbre voulue.

On définit un homomorphisme $b\colon \mathcal{H}_G^K \longrightarrow \mathcal{H}_H^K$ de sorte que pour toute $f \in \mathcal{H}_G^K$, on ait $\widehat{bf} = \hat{b}\hat{f}$, cf. I 5.

II 4. Rappelons la définition du facteur de transfert Δ_G^H(cf. [Ha] § 5). Soient $\gamma, \delta \in H$, notons $c_1,\ldots,c_m$, resp. $d_1,\ldots,d_m$ les valeurs propres de γ, resp. δ, dans une extension convenable de E. On pose

$$r(\gamma,\delta) = \prod_{i,j=1}^{m} (c_i - d_j).$$

Pour $\gamma \in H$, on pose

$$\Delta_G^{H,1}(\gamma) = \Bigl| \prod_{\substack{\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(E/F) \\ \sigma \neq \tau}} r(\sigma\gamma,\tau\gamma) \Bigr|_F^{1/2} |\det{}_G(\gamma)|_F^{(m-n)/2}$$

(on vérifie que le produit dont on prend la valeur absolue est un élément de F). Si r est impair, on pose $\Delta_G^{H,2}(\gamma) = 1$. Si r est pair, soit σ_+ l'unique élément d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(E/F)$. On pose

$$\Delta_G^{H,2}(\gamma) = (-1)^{v_E(r(\gamma,\sigma_+\gamma))}.$$

Dans les deux cas, on pose $\Delta_G^H(\gamma) = \Delta_G^{H,1}(\gamma)\Delta_G^{H,2}(\gamma)$.

II 5. Du point de vue de l'endoscopie, la situation ci-dessus s'interprète de la façon suivante. Introduisons les groupes

$$G^* = \{(g,x) \in G \times E^*; \det(g)N_{E/F}(x) = 1\},$$
$$H^* = \{(h,x) \in H \times E^*; N_{E/F}(\det(h)x) = 1\}.$$

On a des homomorphismes évidents $G^* \longrightarrow G$, $G^* \longrightarrow H$. Une fonction $f \in C_c^\infty(G)$, resp. $C_c^\infty(H)$, se relève en une fonction $f^* \in C_c^\infty(G^*)$, resp. $C_c^\infty(H^*)$. On montre que H^* est un groupe endoscopique de G^*. Pour $f \in C_c^\infty(G)$, les intégrales $\Delta_G^H(.)I_G^\varepsilon(f,.)$ ne sont autres que les K-intégrales de f^* relatives à ce sous-groupe endoscopique. Pour $f \in \mathcal{H}_G^K$, le résultat que l'on a en vue n'est autre que le lemme fondamental pour f^* et le groupe endoscopique H^*.

3. **Définition des germes.**

III 1. Soit π une représentation admissible irréductible de G dans un espace V. Supposons $\pi \cong (\varepsilon \circ \det)\pi$. Il existe alors un opérateur $A_\pi^\varepsilon \in \mathrm{Aut}_\mathbb{C}\, V$ tel que

$$A_\pi^\varepsilon \circ \pi(g) = \varepsilon \circ \det(g)^{-1}\pi(g) \circ A_\pi^\varepsilon \tag{1}$$

pour tout $g \in G$. Il est déterminé à un scalaire près. Nous fixons pour toute représentation π comme ci-dessus un opérateur A_π^ε.

LEMME. *Soient $f \in C_c^\infty(G)$. Supposons que pour toute représentation admissible irréductible tempérée π de G telle que $\pi \cong (\varepsilon \circ \det)\pi$, on ait*

$$\mathrm{trace}\, A_\pi^\varepsilon \circ \pi(f) = 0.$$

Alors pour tout $\gamma \in H$ semi-simple G-régulier, on a $I_G^\varepsilon(f,\gamma) = 0$.

DÉMONSTRATION. On peut adapter la démonstration de [BDKV] à notre situation, cf. [He] § 5.5. On peut aussi se ramener au groupe G^* de II 5. On a la suite exacte

$$1 \longrightarrow E^1 \longrightarrow G^* \longrightarrow G' \longrightarrow 1$$

où $E^1 = \{x \in E^*; N_{E/F}(x) = 1\}$, $G' = \{g \in G; v \circ \det(g) \in r\mathbb{Z}\}$. Remarquons que G agit naturellement sur G^* par conjugaison. Alors l'ensemble des représentations π de l'énoncé est en bijection avec l'ensemble des représentations π^* de G^*, admissibles irréductibles tempérées, triviales sur E^1 et telles que $\pi^* \not\cong (\pi^*)^g$ pour tout $g \in G - G'$. Précisément soit π^* une telle représentation et V^* son espace. On peut considérer π^* comme une représentation de G', on pose alors $\pi = \mathrm{Ind}_{G'}^G(\pi^*)$. L'espace V de π se décompose alors en

$$V = \bigoplus_{g\in\Gamma} V_g^*$$

où Γ est un système de représentants de $G'\backslash G$ et V_g^* est l'espace des éléments de V à support dans $G'g$. Cette décomposition est stable par G^* et G^* agit sur V_g^* par la représentation

$(\pi^*)^g$. On peut réaliser A_π^ε comme étant l'operateur qui agit sur V_g^* par $\varepsilon\circ\det(g)$. D'autre part définissons une fonction f' sur G' par

$$f'(g') = \sum_{g\in\Gamma} \varepsilon\circ\det(g)f(g^{-1}g'g),$$

et remontons-la en une fonction f'' sur G^*. On vérifie les égalités

$$I_G^\varepsilon(f,\gamma) = \int_{T^*\backslash G^*} f''(g^{-1}\gamma^* g)\,dg \tag{2}$$

pour $\gamma\in H$ semi-simple G-régulier, où γ^* est un élément de G^* qui se projette sur γ et T^* est son commutant dans G^*;

$$\operatorname{trace} A_\pi^\varepsilon\circ\pi(f) = \operatorname{trace}\pi^*(f'').$$

Soit π_1^* une représentation admissible irréductible de G^*. Si π_1^* n'est pas triviale sur E^1 ou s'il existe $g\in G-G'$ tel que $(\pi_1^*)^g\cong\pi_1^*$, on montre que $\operatorname{trace}\pi_1^*(f'')=0$. Mais alors f'' vérifie les hypothèses de [K2] th.0. Ses intégrales orbitales sont donc nulles. L'égalité (2) implique la conclusion du lemme. ∎

III 2. Soient π une représentation admisible irréductible de G dans un espace V et $\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(n)$. On définit le module de Jacquet $V(\boldsymbol{\lambda})$ relatif au radical unipotent du sous-groupe parabolique $P(\boldsymbol{\lambda})$ et la représentation $\pi(\boldsymbol{\lambda})$ de $L(\boldsymbol{\lambda})$ dans $V(\boldsymbol{\lambda})$, qui est la représentation naturelle tordue par $(\delta_{P(\boldsymbol{\lambda})}^G)^{-1/2}$. Supposons que $\pi\cong(\varepsilon\circ\det)\pi$. L'opérateur A_π^ε passe au quotient et définit un opérateur $A_\pi^\varepsilon(\boldsymbol{\lambda})\in\operatorname{Aut}_{\mathbf{C}}\big(V(\boldsymbol{\lambda})\big)$ qui vérifie une relation analogue à III 1 (1). D'autre part, on définit une fonction $\hat{\chi}_{\boldsymbol{\lambda}}$ sur $L(\boldsymbol{\lambda})$: notons $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_t)$; pour $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_t)\in L(\boldsymbol{\lambda})\cong\mathrm{GL}(\lambda_1,F)\times\cdots\times\mathrm{GL}(\lambda_t,F)$,

$$\hat{\chi}_{\boldsymbol{\lambda}}(\ell)=\begin{cases}1, & \text{si } \big(v\circ\det(\ell_1),\dots,v\circ\det(\ell_t)\big)\in\Gamma_{\boldsymbol{\lambda},\mathbf{Z}}\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

cf. I 11.

LEMME. *Soient π une représentation admissible irréductible de G telle que $\pi\cong(\varepsilon\circ\det)\pi$, et $f\in C_c^\infty(G)$. On a l'égalité*

$$\operatorname{trace} A_\pi^\varepsilon\circ\pi(1_c f) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}(m)} (-1)^{t(\boldsymbol{\lambda})-1}\operatorname{trace} A_\pi^\varepsilon(\boldsymbol{\lambda})\circ\pi(\boldsymbol{\lambda})(\hat{\chi}_{r\boldsymbol{\lambda}}f^{P(r\boldsymbol{\lambda})}).$$

DÉMONSTRATION. On reprend les notations de la démonstration précédente. On a

$$\operatorname{trace} A_\pi^\varepsilon\circ\pi(1_c f) = \operatorname{trace}\pi^*\big((1_c f)''\big) = \operatorname{trace}\pi^*(1_c^* f''),$$

où l'on définit de façon évidente la fonction 1_c^* sur G^*. Ce terme se calcule grâce à [Cl] cor. à la prop. 2.1. En étendant à G^* les définitions précédentes, on obtient

$$\operatorname{trace}\pi^*(1_c^* f'') = \sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}(n)} (-1)^{t(\boldsymbol{\mu})-1}\operatorname{trace}\pi^*(\boldsymbol{\mu})(\hat{\chi}_{\boldsymbol{\mu}}(f'')^{P(\boldsymbol{\mu})}). \tag{1}$$

Soit $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(n)$. S'il n'existe pas de $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m)$ tel que $\boldsymbol{\mu} = r\boldsymbol{\lambda}$, il y a dans le centre de $L(\boldsymbol{\mu})$ un élément z tel que $z \notin G'$. Pour un tel élément

$$\left(\pi^*(\boldsymbol{\mu})\right)^z \cong \pi^*(\boldsymbol{\mu}), \quad \mathrm{Ad}(z)(f'')^{P(\boldsymbol{\mu})} = \eta(f'')^{P(\boldsymbol{\mu})}, \text{ avec } \eta \neq 1.$$

Donc trace $\pi^*(\boldsymbol{\mu})\left(\hat{\chi}_{\boldsymbol{\mu}}(f'')^{P(\boldsymbol{\mu})}\right) = 0$. Supposons au contraire $\boldsymbol{\mu} = r\boldsymbol{\lambda}$. On peut choisir l'ensemble Γ de III 1 dans $L(\boldsymbol{\mu})$. Avec une définition évidente, on a alors

$$(f'')^{P(\boldsymbol{\mu})} = (f^{P(\boldsymbol{\mu})})''.$$

On a aussi

$$V(\boldsymbol{\mu}) = \bigoplus_{g\in\Gamma}(V_g^*)(\boldsymbol{\mu}),$$

et $L(\boldsymbol{\mu})$ agit dans $(V_g^*)(\boldsymbol{\mu})$ par $\left(\pi^*(\boldsymbol{\mu})\right)^g$. On démontre alors l'égalité

$$\text{trace}\, \pi^*(\boldsymbol{\mu})\left(\hat{\chi}_{\boldsymbol{\mu}}(f'')^{P(\boldsymbol{\mu})}\right) = \text{trace}\, A_\pi^\varepsilon(\boldsymbol{\mu})(\hat{\chi}_{\boldsymbol{\mu}} f^{P(\boldsymbol{\mu})}).$$

De (1) résulte alors l'égalité du lemme. ∎

III 3. Notons St_m la représentation de Steinberg de $GL(m, F)$ et $\mathrm{St}_m^\varepsilon$ la représentation de G:

$$\mathrm{Ind}_{P\left((m)^r\right)}^G \left(\mathrm{St}_m \otimes (\varepsilon \circ \det)\, \mathrm{St}_m \otimes \cdots \otimes (\varepsilon \circ \det)^{r-1}\, \mathrm{St}_m\right).$$

Plus généralement pour $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(m)$, on note $\mathrm{St}_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon$ la représentation

$$\mathrm{Ind}_{P(r\boldsymbol{\lambda})}^G(\mathrm{St}_{\lambda_1}^\varepsilon \otimes \cdots \otimes \mathrm{St}_{\lambda_t}^\varepsilon).$$

On a l'isomorphisme $\mathrm{St}_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon \cong (\varepsilon \circ \det)\, \mathrm{St}_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon$, ce qui permet d'introduire un opérateur noté $A_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon$ vérifiant III 1 (1) pour $\pi = \mathrm{St}_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon$. Nous allons le normaliser. Notons $V_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon$ l'espace de $\mathrm{St}_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon$ et V_n celui de St_n (remarque sur la notation: pour $\boldsymbol{\lambda} = (m)$, on notera simplement $\mathrm{St}_m^\varepsilon$, etc. au lieu de $\mathrm{St}_{(m)}^\varepsilon$, etc.). L'algèbre $\mathcal{H}_W^I$ agit dans les espaces d'invariants $(V_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon)^I$ et V_n^I. Ce dernier est de dimension 1 et cela définit un caractère de $\mathcal{H}_W^I$ que nous noternons $\mathrm{St}_{n,W}$. On montre que $\mathrm{St}_{n,W}$ intervient avec multiplicité un dans la représentation de $\mathcal{H}_W^I$ sur $(V_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon)^I$. Cela nous définit une droite $D \subset (V_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon)^I$. Elle est stable par tout opérateur vérifiant III 1 (1) car un tel opérateur commute à l'action de $\mathcal{H}_W^I$. On normalise $A_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon$ en lui imposant d'agir par $(-1)^{n-m}$ sur D.

III 4. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $H_{c,a}$ l'ensemble des $\gamma \in H$, semi-simples et G-réguliers, compacts et tels que $v_E \circ \det_H(\gamma) = a$.

PROPOSITION. *Soit $a \in \mathbb{Z}$, posons $e = m/\operatorname{pgcd}(m,a)$. Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^\circ(m/e)$, il existe une unique fonction*

$$s_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon : H_{c,a} \longrightarrow \mathbb{C}$$

de sorte que pour toute $f \in \mathcal{H}^I$, tout $\gamma \in H_{c,a}$, on ait l'égalité

$$I_G^\varepsilon(f, \gamma) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^\circ(m/e)} s_{\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon(\gamma)\, \text{trace}\, A_{e\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{e\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon(1_{ar} 1_c f).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-049-5 Published online by Cambridge University Press

REMARQUE. On peut aussi bien considérer $s^{\varepsilon}_{\boldsymbol{\lambda}}$ comme une fonction sur $\bigcup H_{c,a}$, union sur les a tels que pgcd(m, a) soit fixé; cela justifie de ne pas indiquer le a dans la notation.

La démonstration est analogue à celle de [W] prop. 2.4, en utilisant bien sûr les lemmes III 1 et III 2. Voir aussi [Ha] § 1. ∎

III 5. Nous allons expliciter le lemme III 2. dans le cas où $\pi = \mathrm{St}^{\varepsilon}_m$.

LEMME. *Pour toute $f \in C^{\infty}_c(G)$, on a l'égalité*

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_m \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_m(1_c f) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m)} (-1)^{t(\boldsymbol{\lambda})-1} \operatorname{trace}\Big(\bigotimes_{j=1}^{t(\boldsymbol{\lambda})} A^{\varepsilon}_{\lambda_j} \circ |\,.\,|^{\lambda^*_j} \mathrm{St}^{\varepsilon}_{\lambda_j}\Big)(\hat{\chi}_{r\boldsymbol{\lambda}} f^{p(r\boldsymbol{\lambda})}).$$

DÉMONSTRATION. Posons $\pi = \mathrm{St}^{\varepsilon}_m$, $V = V^{\varepsilon}_m$, soit $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m)$. Posons $\boldsymbol{\mu} = r\boldsymbol{\lambda}$ et introduisons la représentation $\pi(\boldsymbol{\mu})^{ss}$ et l'espace $V(\boldsymbol{\mu})^{ss}$, semi-simplifiés de $\pi(\boldsymbol{\mu})$ et $V(\boldsymbol{\mu})$. Grâce à [BZ], on calcule aisément

$$V(\boldsymbol{\mu})^{ss} = \bigoplus_{a \in M\left((m)^r, \boldsymbol{\mu}\right)} V^a$$
$$\pi(\boldsymbol{\mu})^{ss} \cong \bigoplus \pi^a,$$

où pour $a = (a_{ij}) \in M\big((m)^r, \boldsymbol{\mu}\big)$, π^a est la représentation de $L(\boldsymbol{\mu})$:

$$\bigotimes_{j=1}^{t(\boldsymbol{\mu})} \operatorname{Ind}^{\mathrm{GL}(\mu_j,F)}_{P(a_{1j},\ldots,a_{rj})}\Big(\bigotimes_{i=1}^{r}(\varepsilon^{i-1} \circ \det)|\,.\,|^{a^*_{ij}} \mathrm{St}_{a_{ij}}\Big)$$

et V^a son espace; ici a^*_{ij} est la suite associée à la partition $(a_{i.})$ de m, cf. I 9. Remarquons que π^a est irréductible et que $\pi(\boldsymbol{\mu})^{ss}$ est sans multiplicité. De $A^{\varepsilon}_{\pi}(\boldsymbol{\mu})$ se déduit un automorphisme $A^{\varepsilon}_{\pi}(\boldsymbol{\mu})^{ss}$ de $V(\boldsymbol{\mu})^{ss}$. Pour toute $f' \in C^{\infty}_c\big(L(\boldsymbol{\mu})\big)$, on a l'égalité

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{\pi}(\boldsymbol{\mu}) \circ \pi(\boldsymbol{\mu})(f') = \operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{\pi}(\boldsymbol{\mu})^{ss} \circ \pi(\boldsymbol{\mu})^{ss}(f').$$

La relation III 1 (1) montre que pour $a = (a_{ij}) \in M\big((m)^r, \boldsymbol{\mu}\big)$, on a $A^{\varepsilon}_{\pi}(\boldsymbol{\mu})^{ss}(V^a) = V^b$, où $b = (b_{ij})$ est tel que $b_{ij} = a_{i-1\,j}$, $i-1$ étant vu modulo r. Seuls contribuent à la trace les a tels que $a = b$, i.e., l'unique tableau $a = (a_{ij})$ pour lequel $a_{ij} = \lambda_j$ pour tous i, j. Considérons ce a. On a

$$\pi^a = \bigotimes_{j=1}^{t(\boldsymbol{\mu})} |\,.\,|^{\lambda^*_j} \mathrm{St}^{\varepsilon}_{\lambda_j}.$$

Il reste à identifier l'action de $A^{\varepsilon}_{\pi}(\boldsymbol{\mu})^{ss}$ sur π^a. Remarquons qu'en fait V^a est facteur direct dans V. On le voit en calculant les caractères centraux des représentations π^b et en constatant que π^a est la seule de ces représentations dont le caractère central soit

$$(z_1, \ldots, z_{t(\boldsymbol{\mu})}) \longmapsto \prod_{j=1}^{t(\boldsymbol{\mu})} {}^{\mu_j(r-1)/2}(z_j)|z_j|^{\mu_j \lambda^*_j},$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-049-5 Published online by Cambridge University Press

où l'on a identifié le centre de $L(\boldsymbol{\mu})$ à $(F^*)^{t(\boldsymbol{\mu})}$. Rappelons que $V^{I_G} \cong V(\boldsymbol{\mu})^{I_L}$, où $L = L(\boldsymbol{\mu})$, et que l'action de $\mathcal{H}_L^I$ sur $V(\boldsymbol{\mu})^{I_L}$ s'obtient en identifiant $\mathcal{H}_L^I$ à une sous-algèbre de $\mathcal{H}_G^I$ et en restreignant à cette sous-algèbre la représentation de $\mathcal{H}_G^I$ dans V^{I_G}. De plus on a l'égalité $\mathcal{H}_G^I = \mathcal{H}_L^I \mathcal{H}_{W,G}^I$. On a défini en III 3 une droite $D \subset V^{I_G}$. Elle est stable par $\mathcal{H}_{W,G}^I$. Comme V^{I_G} est irréductible (sous $\mathcal{H}_G^I$), on a donc $V^{I_G} = \mathcal{H}_L^I D$, ou encore $V(\boldsymbol{\mu})^{I_L} = \mathcal{H}_L^I D$. La projection D^a de D sur le facteur direct V^{a,I_L} est donc non nulle. On voit que $\mathcal{H}_{W,L}^I$ agit sur D^a par son caractère de Steinberg. Donc D^a n'est autre que $\otimes_{j=1}^{t(\boldsymbol{\mu})} D_j$ où $D_j \subset (V_{\lambda_j}^{\varepsilon})^I$ est la droite définie en III 3. Par définition $A_\pi^\varepsilon(\boldsymbol{\mu})$ et donc aussi $A_\pi^\varepsilon(\boldsymbol{\mu})^{ss}$, agit sur D^a par $(-1)^{n-m}$; on obtient l'égalité

$$A_\pi^\varepsilon(\boldsymbol{\mu})^{ss}|_{V^a} = \bigotimes_{j=1}^{t(\boldsymbol{\mu})} A_{\lambda_j}^\varepsilon.$$

Cela achève la démonstration. ∎

4. **Les fonctions utilisées.**

IV 1. Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathcal{P}(n)$. On note $I_{\boldsymbol{\alpha}}$ le sous-groupe parahorique de G, en fait de K, associé à $\boldsymbol{\alpha}$. C'est l'image réciproque dans K, par l'application de réduction, du sous-groupe parabolique standard de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ dont le sous-groupe de Lévi standard est $\mathrm{GL}(\alpha_1, \mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\alpha_t, \mathbb{F}_q)$. Notons $f_{\boldsymbol{\alpha}}^0$ la fonction caractéristique de $I_{\boldsymbol{\alpha}}$ divisée par $\mathrm{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}})$. Plus généralement introduisons l'élément

$$\zeta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & & 1 \\ \varpi & & 0 \end{bmatrix}$$

de G. On sait qu'il engendre $N_G(I)/I$, où $N_G(I)$ est le normalisateur de I dans G. Soient $d, e \in \mathbb{Z}$. Supposons $e \geq 1$, e divise n et soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n/e)$. On note $f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}$ la fonction caractéristique de $\zeta^{nd/e} I_{\boldsymbol{\alpha}^e}$ divisée par $\mathrm{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}^e})$. Remarquons que $\zeta^{n/e}$ normalise $I_{\boldsymbol{\alpha}^e}$ et que

$$\bigcup_{d \in \mathbb{Z}} \zeta^{nd/e} I_{\boldsymbol{\alpha}^e}$$

est un sous-groupe de G d'image compacte dans $\mathrm{PGL}(n, F)$. Le support de $f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}$ est donc formé d'éléments compacts.

IV 2. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n)$. Par analogie avec ce qui précède, on définit la *sous-algèbre parahorique* Lie $I_{\boldsymbol{\alpha}}$ de $M(n, o)$ associée à $\boldsymbol{\alpha}$. On note $f_{\boldsymbol{\alpha}}$ la fonction caractéristique de $G \cap$ (Lie $I_{\boldsymbol{\alpha}}$), divisée par $\mathrm{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}})$. Elle n'est pas à support compact mais pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $1_a f_{\boldsymbol{\alpha}}$ l'est. Introduisant une variable X, on note $f_{\boldsymbol{\alpha}}^X$ la fonction $G \longrightarrow \mathbb{C}[X, X^{-1}]$ définie par

$$f_{\boldsymbol{\alpha}}^X(g) = X^{v \circ \det(g)} f_{\boldsymbol{\alpha}}(g)$$

pour tout $g \in G$.

IV 3. Soient $f, f' \in C_c^\infty(G)$. On note $f \sim_K f'$ si $f - f'$ est annulée par toute distribution invariante par conjugaison sous K.

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-049-5 Published online by Cambridge University Press

LEMME. *Soient $d, e \in \mathbb{Z}$. Supposons $e \geq 1$, e divise n,* $\operatorname{pgcd}(d,e) = 1$. *Soient $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n/e)$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(n)$. Posons $P = P(\boldsymbol{\lambda})$, $L = L(\boldsymbol{\lambda})$.*

(i) Soit $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(n/e)$, supposons $\boldsymbol{\lambda} = e\boldsymbol{\mu}$. Alors

$$(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e})^P \sim_{K_L} \sum_{a=(a_{ij})\in M(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\mu})} \bigotimes_{j=1}^{t(\boldsymbol{\mu})} f_{(a_{\cdot j})}^{d,e}.$$

(ii) Supposons qu'il n'existe pas de $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(n/e)$ telle que $\boldsymbol{\lambda} = e\boldsymbol{\mu}$. Alors $(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e})^P =$ 0.

$\big((a_{\cdot j})$ est la partition évidente de μ_j; $f_{(a_{\cdot j})}^{d,e}$ est une fonction sur $\mathrm{GL}(\lambda_j, F)\big)$.

DÉMONSTRATION. Posons $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^e$. Notons W' le sous-ensemble des éléments $w \in W$ de longueur minimale dans leur classe $W_L w W_{L(\boldsymbol{\beta})}$. Soit U le radical unipotent de P. On a la décomposition en union disjointe

$$K = \bigcup_{w\in W'} (K \cap U) K_L w I_{\boldsymbol{\beta}}.$$

Comme $f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}$ est biinvariante par $I_{\boldsymbol{\beta}}$, on calcule, pour $\ell \in L$:

$$(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e})^P(\ell) =$$
$$\sum_{w\in W'} \operatorname{mes}[(K\cap U)K_L w I_{\boldsymbol{\beta}}]\delta_P^G(\ell)^{1/2} \int_{K_L\times K\cap U\times U} f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}(w^{-1}k^{-1}h^{-1}\ell uhkw)\, du\, dh\, dk.$$

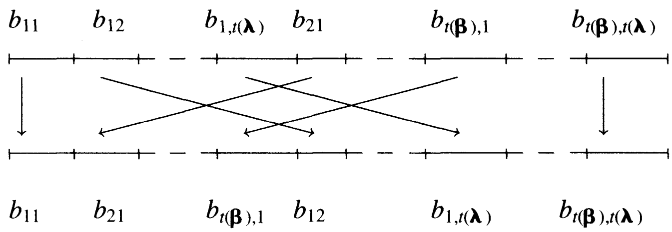
Dans chaque terme, l'intégrale sur $K \cap U$ est absorbée par l'intégrale sur U. Pour $w \in W'$, $\ell \in L$, posons

$$f_w(\ell) = \delta_P^G(\ell)^{1/2} \int_U f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}(w^{-1}\ell uw)\, du.$$

On obtient

$$(1) \qquad (f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e})^P = \sum_{w\in W'} \operatorname{mes}[(K\cap U)K_L w I_{\boldsymbol{\beta}}] \int_{K_L} \operatorname{Ad}(k) f_w\, dk.$$

Il y a une bijection entre $M(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda})$ et W': Au tableau $b = (b_{ij})$, on associe deux décompositions de $\{1, \ldots, n\}$ en intervalles, et l'élément w qui permute ces intervalles, sans changer l'ordre à l'intérieur de ceux-ci, conformément au croquis suivant:



Fixons un tableau $b = (b_{ij}) \in M(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda})$, soit $w \in W'$ son élément associé. Nous allons calculer la fonctioin f_w. On a défini les réseaux $\mathcal{L}_i^{\boldsymbol{\beta}}$, pour $i \in \mathbb{Z}$ (cf. I 7). Notons $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ la base standard de F^n. Pour $j \in \{1, \ldots, t(\boldsymbol{\lambda})\}$, posons $\lambda'_j = \lambda_1 + \cdots + \lambda_j$ et notons V_j le sous-espace de F^n de base (e_k), $\lambda'_{j-1}+1 \leq k \leq \lambda'_j$. L'ensemble $\zeta^{nd/e} I_{\boldsymbol\beta}$, resp. le groupe L, resp. le groupe P n'est autre que

$$\begin{aligned} &\{g \in G; \forall i \in \mathbb{Z}, g\mathcal{L}_i^{\boldsymbol\beta} = \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha)}^{\boldsymbol\beta}\}, \\ \text{resp.} \quad &\{g \in G; \forall j \in \{1,\dots,t(\boldsymbol\lambda)\}, \quad gV_j = V_j\}, \\ \text{resp.} \quad &\{g \in G; \forall j \in \{1,\dots,t(\boldsymbol\lambda)\}, \quad gV_j \subset \bigoplus_{k=1}^{j} V_k\}. \end{aligned}$$

Notons $p_j \colon V \longrightarrow V_j$ la projection de noyau $\oplus_{k\neq j} V_k$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, posons $\mathcal{L}_i^w = w\mathcal{L}_i^{\boldsymbol\beta}$. Nous allons démontrer que pour $\ell \in L$, $u \in U$, les conditions (i) et (ii) suivantes sont équivalentes:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} (i) & w^{-1}\ell uw \in \zeta^{nd/e} I_{\boldsymbol\beta}; \\ (ii) & \forall i \in \mathbb{Z}, \ell\mathcal{L}_i^w = \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha)}^w, u\mathcal{L}_i^w = \mathcal{L}_i^w. \end{cases}$$

Supposons (i) vérifiée. Alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $w^{-1}\ell uw\mathcal{L}_i^{\boldsymbol\beta} = \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha)}^{\boldsymbol\beta}$, i.e. $\ell u\mathcal{L}_i^w = \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha)}^w$. Pour $i \in \mathbb{Z}, j \in \{1,\dots,t(\boldsymbol\lambda)\}$, posons $\mathcal{L}_{ij}^w = \mathcal{L}_i^w \cap V_j$. Des définitions résulte l'égalité

$$\mathcal{L}_i^w = \bigoplus_{j=1}^{t(\boldsymbol\lambda)} \mathcal{L}_{ij}^w.$$

Comme $\ell u \in P$, on obtient pour tous i, j l'inclusion

$$\ell u\mathcal{L}_{ij}^w \subset \bigoplus_{k=1}^{j} \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha),k}^w$$

d'où

$$p_j\ell u\mathcal{L}_{ij}^w \subset \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha),j}^w.$$

Mais pour tout $v \in V_j$, on a $p_j\ell u(v) = \ell(v)$. D'où $\ell\mathcal{L}_{ij}^w \subset \mathcal{L}_{i+_dt(\boldsymbol\alpha),j}^w$, puis $\ell\mathcal{L}_i^w \subset \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha)}^w$. Mais d'après (i),

$$[\mathcal{L}_i^w : \ell\mathcal{L}_i^w]^{-1} = |\det \ell| = q^{-nd/e} = [\mathcal{L}_i^{\boldsymbol\beta} : \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha)}^{\boldsymbol\beta}]^{-1} = [\mathcal{L}_i^w : \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha)}^w]^{-1}.$$

L'inclusion précédente est donc une égalité: $\ell\mathcal{L}_i^w = \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha)}^w$. On en déduit immédiatement l'égalité $u\mathcal{L}_i^w = \mathcal{L}_i^w$. D'où (ii). La réciproque est immédiate.

Fixons $j \in \{1,\dots,t(\boldsymbol\lambda)\}$. On a $V_j \cong F^{\lambda_j}$ et la suite $(b_{.j}) = (b_{ij})_{1\leq i\leq t(\boldsymbol\beta)}$ est une partition de λ_j (généralisée en ce sens qu'on accepte des termes nuls, mais cela importe peu). Par analogie avec les réseaux $\mathcal{L}_i^{\boldsymbol\beta}$, on peut définir les réseaux $\mathcal{L}_i^{(b_{.j})}$ de V_j. Il est facile de vérifier l'égalité

$$\mathcal{L}_{ij}^w = \mathcal{L}_i^{(b_{.j})}.$$

Soit $\ell = (\ell_1,\dots,\ell_{t(\boldsymbol\lambda)}) \in L$. La condition (ii) relative à ℓ est équivalente à: pour tout $j \in \{1,\dots,t(\boldsymbol\lambda)\}$, ℓ_j vérifie

$$\text{(3)} \qquad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \ell_j\mathcal{L}_{ij}^w = \mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol\alpha),j}^w$$

Pour j fixé, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe ℓ_j vérifiant (3) est que $[\mathcal{L}_{ij}^w : \mathcal{L}_{i+1,j}^w] = [\mathcal{L}_{i+dt(\boldsymbol{\alpha}),j}^w : \mathcal{L}_{i+1+dt(\boldsymbol{\alpha}),j}^w]$ pour tout i, i.e. d'après ce qui précède, $b_{ij} = b_{i-dt(\boldsymbol{\alpha}),j}$ pour tout i, l'indice i étant considéré mod $t(\boldsymbol{\beta})$. Comme $t(\boldsymbol{\beta}) = et(\boldsymbol{\alpha})$ et pgcd$(d, e) = 1$, la condition est équivalente à $b_{ij} = b_{i+t(\boldsymbol{\alpha}),j}$ pour tout i. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des couples (ℓ, u) vérifiant (2) (ii) soit non vide est donc

$$\forall j \in \{1, \ldots, t(\boldsymbol{\lambda})\}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad b_{ij} = b_{i+t(\boldsymbol{\alpha}),j}. \tag{4}$$

Si cette condition est vérifiée, on a pour tout j

$$\sum_{i=1}^{t(\boldsymbol{\alpha})} b_{ij} = \lambda_j / e$$

et e divise λ_j. Si donc il existe j tel que e ne divise pas λ_j, (4) n'est pas vérifiée et $f_w = 0$. Cela étant vrai pour tout $w \in W'$, l'égalité (1) implique l'assertion (ii) du lemme. Soit maintenant $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(n/e)$, supposons $\boldsymbol{\lambda} = e\boldsymbol{\mu}$. Les éléments $b \in M(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda})$ vérifiant (4) sont en bijection avec $M(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu})$: à b on associe le tableau a formé des $t(\boldsymbol{\alpha})$ premières lignes de b. Soit donc $a \in M(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu})$, $b \in M(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda})$ l'élément associé. Remarquons que pour tout j, $(b_{.j}) = (a_{.j})^e$. Des descriptions ci-dessus résulte que pour $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_{t(\boldsymbol{\lambda})}) \in L$, $u \in U$, la condition (2) (ii) est équivalente à

$$\begin{cases} \forall j \in \{1, \ldots, t(\boldsymbol{\lambda})\}, \ell_j \in \zeta^{\lambda_j d/e} I_{(a_{.j})^e} & \text{(où il s'agit d'objets relatifs à } \mathrm{GL}(\lambda_j, F)), \\ w^{-1}uw \in I_{\boldsymbol{\beta}}. \end{cases}$$

Si ℓ vérifie cette condition, on a $\delta_P^G(\ell) = 1$. On calcule alors, pour $\ell \in L$

$$f_w(\ell) = \mathrm{mes}\big(U \cap \mathrm{Ad}(w)(I_{\boldsymbol{\beta}})\big)\, \mathrm{mes}(I_{\boldsymbol{\beta}})^{-1} \prod_{j=1}^{t(\boldsymbol{\lambda})} \mathrm{mes}(I_{(a_{.j})}e) f_{(a_{.j})}^{d,e}(\ell_j). \tag{5}$$

On calcule:

$$\mathrm{mes}[(K \cap U)K_L w I_{\boldsymbol{\beta}}]\, \mathrm{mes}\big(\big(U \cap \mathrm{Ad}(w)(I_{\boldsymbol{\beta}})\big)\, \mathrm{mes}(I_{\boldsymbol{\beta}})^{-1} \prod_{j=1}^{t(\boldsymbol{\lambda})} \mathrm{mes}(I_{(a_{.j})}e) = 1.$$

Comme

$$\int_{K_L} \mathrm{Ad}(k) f_w \, dk \sim_{K_L} f_w,$$

le (i) de l'énoncé résulte des égalités (1) et (5). ∎

IV 4.

LEMME. *Soient* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(n)$. *Posons* $P = P(\boldsymbol{\lambda})$, $L = L(\boldsymbol{\lambda})$. *On a la relation*

$$(f_{\boldsymbol{\alpha}}^X)^P \sim_{K_L} \sum_{a=(a_{ij}) \in M(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})} \bigotimes_{j=1}^{t(\boldsymbol{\lambda})} f^{X_j}(a_{.j}),$$

où pour $j \in \{1, \dots, t(\boldsymbol{\lambda})\}$, *on a posé* $X_j = q^{(n-\lambda_j)/2}X$.

DÉMONSTRATION. Notons Lie(P), Lie(U) les algèbres de Lie de P et de son radical unipotent, vues comme sous-algèbres de $M(n, F)$. On a $U = \{1 + u; u \in \mathrm{Lie}(U)\}$. Pour $\ell \in L$, on a donc

$$\begin{aligned}(f_{\boldsymbol{\alpha}}^X)^P(\ell) &= X^{v\mathrm{odet}(\ell)}\delta_P^G(\ell)^{1/2}\int_{K\times\mathrm{Lie}(U)} f_{\boldsymbol{\alpha}}\left(k^{-1}\ell(1+u)k\right)du\,dk,\\ &= X^{v\mathrm{odet}(\ell)}\delta_P^G(\ell)^{1/2}J(\ell)\int_{K\times\mathrm{Lie}(U)} f_{\boldsymbol{\alpha}}\left(k^{-1}(\ell+u)k\right)du\,dk,\end{aligned}$$

où $J(\ell)$ est le jacobien de l'application $u \mapsto \ell^{-1}u$. Pour $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_{t(\boldsymbol{\lambda})})$, on calcule

$$\delta_P^G(\ell)^{1/2}J(\ell) = \prod_{j=1}^{t(\boldsymbol{\lambda})} |\ell_j|^{(\lambda_j-n)/2}.$$

D'après nos définitions, on a donc

$$X^{v\mathrm{odet}(\ell)}\delta_P^G(\ell)^{1/2}J(\ell) = \prod_{j=1}^{t(\boldsymbol{\lambda})} X_j^{v\mathrm{odet}(\ell_j)}.$$

Il reste à calculer le terme intégral. C'est une simple adaptation de la démonstration du lemme précédent. ∎

5. **Quelques calculs de traces.** V 1. Dans tout le paragraphe 5, nous supposerons que la mesure de Haar sur G vérifie mes$(I) = 1$, contrairement à ce que l'on a supposé jusqu'ici. Cela ne modifie pas les résultats car les distributions qui interviennent sont proportionnelles à la mesure, tandis que les fonctions $f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}, f_{\boldsymbol{\alpha}}^X$ lui sont par définition inversement proportionnelles. Nous poserons pour simplifier la notation $\mathcal{H} = \mathcal{H}^I$, $\mathcal{H}_W = \mathcal{H}_W^I$.

V 2. Nous avons besoin d'un certain nombre de rappels concernant l'algèbre $\mathcal{H}$. Elle est engendrée par des éléments $(T_i)_{1\le i\le n-1}$, $(X_i)_{1\le i\le n}$ et leurs inverses $(X_i^{-1})_{1\le i\le n}$. Les T_i engendrent la sous-algèbre $\mathcal{H}_W$. Pour tout i, on a la relation

$$(T_i + 1)(T_1 - q) = 0.$$

Notons s_i la symétrie élémentaire attachée à la permutation $(i, i+1)$. Soit $w \in W$, choisissons une décomposition réduite $w = s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ et posons $T_w = T_{i_1}\cdots T_{i_k}$. Alors T_w est bien défini et n'est autre que la fonction caractéristique de l'ensemble IwI. L'ensemble $\{T_w; w \in W\}$ est une base de $\mathcal{H}_W$. Le caractère de Steinberg $\mathrm{St}_{n,W}$ de $\mathcal{H}_W$ est donné par $T_w \mapsto (-1)^{l(w)}$, où $l(w)$ est la longueur de w. Ce caractère intervient avec multiplicité un dans la représentation régulière gauche de $\mathcal{H}_W$ sur elle-même. La droite qui se transforme par ce caractère est celle portée l'élément

(1) $$\theta = \sum_{w\in W}(-q)^{-l(w)}T_w.$$

Les X_i engendrent une algèbre de polynômes commutative. Notons $C = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}]$ cette algèbre et Q son corps de fractions. Posons $\mathcal{H}_Q =$

$\mathcal{H} \otimes_C Q$. C'est encore une algèbre car $Q = C \otimes_{C'} Q'$, où C' est le centre de $\mathcal{H}$ et Q' son corps des fractions. Pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on définit un élément de $\mathcal{H}_Q$:

$$\tau_i = T_i(X_i - X_{i+1})(X_i - qX_{i+1})^{-1} - (1-q)X_{i+1}(X_i - qX_{i+1})^{-1}.$$

Plus généralement pour $w \in W$, choisissons une décomposition $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ et posons $\tau_w = \tau_{i_1} \cdots \tau_{i_k}$. Lusztig ([L]§ 5) montre que τ_w est bien défini et que l'application $w \longmapsto \tau_w$ est un homomorphisme de groupes. On a l'égalité

$$\tau_w X_i = X_{wi}\tau_w,$$

pour tous $w \in W$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. De plus, on a l'égalité de Q-espaces (à droite):

$$\mathcal{H}_Q = \bigoplus_{w \in W} \tau_w Q.$$

Plus précisément, posons

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j),$$

notons $C_{(\Delta)}$ l'anneau des fractions c/Δ^k, pour $c \in C$, $k \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{H}_{(\Delta)} = \mathcal{H} \otimes_C C_{(\Delta)}$. On a $C_{(\Delta)} \subset Q$, $\mathcal{H}_{(\Delta)} \subset \mathcal{H}_Q$. Pour $w \in W$, posons

$$\operatorname{inv}(w) = \{(i,j);\quad 1 \leq i < j \leq n,\ wj < wi\},$$
$$d_w = \prod_{(i,j) \in \operatorname{inv}(w)} (X_i - qX_j).$$

Alors

$$\mathcal{H}_{(\Delta)} = \bigoplus_{w \in W} \tau_w d_w C_{(\Delta)}. \tag{2}$$

V 3. Pour $h \in \{1, \ldots, m\}$, posons $J_h = \{(h-1)r+1, \ldots, hr\}$. Posons $L = L\big((r)^m\big)$.

LEMME. *On a l'égalité*

$$f^0_{(r)^m} = \operatorname{mes}(I_{(r)}m)^{-1}\Big(\sum_{w \in W_L} \tau_w\Big) \prod_{h=1}^{m} \prod_{\substack{i,j \in J_h \\ i<j}} (X_i - qX_j)(X_i - X_j)^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $m = 1$. Par définition, on a

$$f^0_r = (\operatorname{mes} K)^{-1} \sum_{w \in W} T_w.$$

Montrons que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a l'égalité

$$(T_i + 1)f^0_r = (q+1)f^0_r. \tag{1}$$

On écrit

$$f_r^0 = (\text{mes}\, K)^{-1}(T_i + 1) \sum_{w\in W; 1(s_i w)>l(w)} T_w,$$

et il suffit de vérifier que

$$(T_i + 1)^2 = (q + 1)(T_i + 1),$$

ce qui est immédiat.

On vérifie la relation

$$T_i + 1 = (1 + \tau_i)(X_i - qX_{i+1})(X_i - X_{i+1})^{-1}. \tag{2}$$

Ecrivons

$$f_r^0 = \sum_{w\in W} \tau_w x_w,$$

avec des coefficients $x_w \in Q$. En utilisant (2), on calcule

$$\begin{aligned}(T_i + 1)f_r^0 &= \sum_{w\in W} (\tau_w + \tau_{s_i w})(X_{w^{-1}i} - qX_{w^{-1}(i+1)})(X_{w^{-1}i} - X_{w^{-1}(i+1)})^{-1} x_w \\ &= \sum_{w\in W} \tau_w x'_w,\end{aligned}$$

où

$$x'_w = [(X_{w^{-1}i} - qX_{w^{-1}(i+1)})x_w + (qX_{w^{-1}i} - X_{w^{-1}(i+1)})x_{s_i w}](X_{w^{-1}i} - X_{w^{-1}(i+1)})^{-1}.$$

D'après (1), on a l'égalité $x'_w = (q + 1)x_w$. On en déduit $x_{s_i w} = x_w$. Les x_w sont donc tous égaux. Notons x leur valeur commune. On obtient

$$f_r^0 = \Big(\sum_{w\in W} \tau_w\Big)x. \tag{3}$$

Notons w_0 l'élément de W de longueur maximale. Exprimons les τ_w en fonction des T_w. On voit que T_{w_0} n'intervient que dans l'expression de τ_{w_0} et que son coefficient est

$$\prod_{1\leq i<j\leq r} (X_i - X_j)(X_i - qX_j)^{-1}.$$

Exprimons maintenant f_r^0 en fonction des T_w grâce à la formule (3). En comparant le coefficient de T_{w_0} obtenu avec celui de la formule initiale, on obtient l'égalité

$$x = (\text{mes}\, K)^{-1} \prod_{1\leq i<j\leq r} (X_i - qX_j)(X_i - X_j)^{-1}.$$

Le cas général $m \geq 1$ se déduit par induction du cas $m = 1$ ci-dessus. ∎

V 4. Soit $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ un caractère non ramifié du tore diagonal D de G. Posons $\pi = \text{Ind}_B^G(\chi)$, soit V son espace. C'est l'espace des fonctions $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$, invariantes à droite par un sous-groupe ouvert, et telles que

$$f(dug) = \chi(d)\delta_B^G(d)^{1/2} f(g)$$

pour tous $d \in D$, $g \in G$, u dans le radical unipotent U de B. On peut identifier V^I à $\mathcal{H}_W$ par l'application $\varphi\colon \mathcal{H}_W \longrightarrow V^I$ définie ainsi: à $h \in \mathcal{H}_W$, on associe l'unique fonction $\varphi(h) \in V$ telle que pour tout $k \in K$,

$$\varphi(h)(k) = h(k^{-1}).$$

Pour $h, h' \in \mathcal{H}_W$, on vérifie la formule

$$\pi(h)\big(\varphi(h')\big) = \varphi(hh').$$

Notons $\mathcal{H}[\chi]$ l'idéal à gauche de $\mathcal{H}$ engendré par $\{X_i - \chi_i(\varpi);\quad 1 \leq i \leq n\}$. L'espace $\mathcal{H}/\,\mathcal{H}[\chi]$ est un $\mathcal{H}$-module à gauche. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{H}_W \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim\varphi"] & \\ \mathcal{H}/\,\mathcal{H}[\chi] \arrow[rr, "\sim"] & & V^I \end{tikzcd}$$

les flèches obliques sont des isomorphismes de $\mathcal{H}_W$-modules, la flèche horizontale est un isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules.

Notons $C(\chi)$ le localisé de C au point $(X_1, \ldots, X_n) = \big(\chi_1(\varpi), \ldots, \chi_n(\varpi)\big)$ et $\mathcal{H}_{(\chi)} = \mathcal{H} \otimes_C C_{(\chi)}$. Notons $\mathcal{P}_{(\chi)}$ l'idéal maximal de $C_{(\chi)}$ et $\mathcal{H}_{(\chi)}[\chi] = \mathcal{H} \otimes_C \mathcal{P}_{(\chi)}$. Il est clair que l'on a l'isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules

$$\mathcal{H}/\,\mathcal{H}[\chi] \cong \mathcal{H}_{(\chi)}/\,\mathcal{H}_{(\chi)}[\chi].$$

Supposons que χ vérifie

(1) $$\chi_i(\varpi) \neq q\chi_j(\varpi) \text{ pour tous } i,j \text{ tels que } 1 \leq i < j \leq n.$$

Alors, pour tout $w \in W$, $\tau_w \in \mathcal{H}_{(\chi)}$. Supposons de plus que χ est régulier, i.e.

(2) $$\chi_i(\varpi) \neq \chi_j(\varpi) \text{ pour tous } i,j \text{ tels que } 1 \leq i < j \leq n.$$

D'après V 2 (2), l'image de $\{\tau_w; w \in W\}$ dans $\mathcal{H}_{(\chi)}/\,\mathcal{H}_{(\chi)}[\chi]$ forme une base (sur $\mathbb{C}$) de ce dernier espace.

Les éléments τ_w définissent des opérateurs d'entrelacement de la façon suivante. Supposons pour simplifier que χ vérifie (1). Soit $w \in W$. On définit de façon naturelle le caractère w et l'opérateur

$$\begin{aligned} A_w\colon \mathcal{H}_{(w\chi)}/\,\mathcal{H}_{(w\chi)}[w\chi] &\longrightarrow \mathcal{H}_{(\chi)}/\,\mathcal{H}_{(\chi)}[\chi] \\ h &\longmapsto h\tau_w. \end{aligned}$$

C'est un homomorphisme de $\mathcal{H}$-modules. Dans $\mathcal{H}_{(\chi)}/\,\mathcal{H}_{(\chi)}[\chi]$ intervient le caractère de Steinberg de $\mathcal{H}_W$, avec multiplicité un: il intervient sur la droite portée par l'image naturelle dans $\mathcal{H}_{(\chi)}/\,\mathcal{H}_{(\chi)}[\chi]$ de l'élément θ (cf. V 2(1)). Montrons que, qvec un léger abus de notations, on a l'égalité

(3) $$A_w\theta = (-1)^{l(w)}\theta.$$

On doit montrer que pour tout $w \in W$, $\theta\tau_w = (-1)^{l(w)}\theta$. Il suffit de traiter le cas où w est une symétrie élémentaire s_i. On écrit alors

$$\theta = \theta_i(1 - q^{-1}T_i),$$

où

$$\theta_i = \sum_{w \in W; l(w) < l(ws_i)} (-q)^{-l(w)} T_w.$$

Il suffit alors de vérifier que

$$(1 - q^{-1}T_i)\tau_i = -(1 - q^{-1}T_i),$$

ce qui est immédiat.

V 5. Appliquons les constructions ci-dessus au caractère

$$\chi = \left(|\,.\,|^{(m-1)/2}, \ldots, |\,.\,|^{(1-m)/2}, \varepsilon|\,.\,|^{(m-1)/2}, \ldots, \varepsilon|\,.\,|^{(1-m)/2}, \ldots, \varepsilon^{r-1}|\,.\,|^{(1-m)/2}\right).$$

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, écrivons $i = hm + k$, avec $h \in \{0, \ldots, r-1\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, alors

$$\chi_i(\varpi) = \varepsilon(\varpi)^h q^{k-(m+1)/2}.$$

Le caractère χ vérifie (1) et (2) de V 4. Introduisons les intervalles $\Delta_h = \{(h-1)m + 1, \ldots, hm\}$ pour $h \in \{1, \ldots, r\}$ et l'élément $v \in W$ qui conserve chaque intervalle et inverse l'ordre dans chacun d'eux. La représentation $\mathrm{St}_m^\varepsilon$ est une sous-représentation de $\mathrm{Ind}_B^G \chi$. Son espace V_m^ε est l'image de l'opérateur d'entrelacement relatif à v, pourvu que celui-ci soit normalisé de façon à être défini et non nul. C'est bien le cas de l'opérateur A_v. On vérifie que pour $w \in W$, $d_w\tau_v \in \mathcal{H}_{(\chi)}[\chi]$ si et seulement s'il existe $h \in \{1, \ldots, r\}$ tel que w ne soit pas croissant sur Δ_h. Notons W' l'ensemble des $w \in W$ qui sont croissants sur Δ_h, pour tout $h \in \{1, \ldots, r\}$. De V 2 (2) résulte que l'image de $\{\tau_{wv}; w \in W'\}$ dans $\mathcal{H}_{(\chi)} / \mathcal{H}_{(\chi)}[\chi]$ est une base de $(V_m^\varepsilon)^I$.

Définissons un automorphisme $h \longmapsto h_\varepsilon$ de $\mathcal{H}$ par $h_\varepsilon(g) = \varepsilon \circ \det(g)^{-1} h(g)$ pour tout $g \in G$. On a les relations

$$(X_i)_\varepsilon = \varepsilon(\varpi)^{-1} X_i \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\},$$
$$(T_i)_\varepsilon = T_i \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Notons $a \in W$ la permutation

$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, m, m+1, \ldots, n \\ n-m+1, \ldots, n, 1, \ldots, n-m \end{pmatrix}$$

Alors $h \longmapsto h_\varepsilon$ se prolonge en un isomorphisme de $\mathcal{H}_{(\chi)}$ sur $\mathcal{H}_{(a\chi)}$. On vérifie grâce à V 4 (3) que l'application $h \longmapsto A_a(h_\varepsilon)$ définit un automorphisme de $\mathcal{H}_{(\chi)} / \mathcal{H}_{(\chi)}[\chi]$ qui a même restriction à $(V_m^\varepsilon)^I$ que A_m^ε.

V 6.

PROPOSITION. *Soit $f \in \mathcal{H}$. Supposons f biinvariante par $I_{(r)^m}$. Alors on a l'égalité*

$$\operatorname{trace} A_m^\varepsilon \circ \mathrm{St}_m^\varepsilon(f) = \operatorname{trace} \mathrm{St}_m^\varepsilon(f).$$

DÉMONSTRATION. D'après V 2 (2), il existe une matrice $(x_{w,y})_{w,y \in W}$, à coefficients dans $C_{(\Delta)}$, telle que pour tout $w \in W$,

$$f_\varepsilon \tau_{wa} = \sum_{y \in W} \tau_y x_{w,y}.$$

De V 5 résulte que trace $A_m^\varepsilon \circ \mathrm{St}_m^\varepsilon(f)$ est l'image dans $C_{(\chi)}/\mathcal{P}_{(\chi)} \cong \mathbb{C}$ de l'élément

(1) $$\sum_{w \in W'} x_{wv,wv}.$$

Soit $w \in W'$. Je dis que s'il existe $i < j$ appartenant à un même intervalle Δ_k dont les images wi, wj appartiennent à un même intervalle J_h (cf. V 3), alors $f^0_{(r)^m}\tau_{wva} \in \mathcal{H}_{(\chi)}[\chi]$. Comme w est croissant sur Δ_k, l'hypothèse ci-dessus pour (i,j) implique la même hypothèse pour $(i, i+1)$. On suppose donc $j = i+1$. Grâce à V 3, on a une égalité

$$f^0_{(r)^m}\tau_{wva} = f' \prod_{h=1}^m \prod_{s,t \in J_h, s<t} (X_{s'} - qX_{t'})(X_{s'} - X_{t'})^{-1}$$

où f' est un certain élément de $\mathcal{H}_{(\chi)}$ et où l'on a posé pour simplifier $s' = (wva)^{-1}(s)$, $t' = (wva)^{-1}(t)$. Le couple $(s,t) = \big(wi, w(i+1)\big)$ intervient dans le produit ci-dessus. Pour ce couple, on a $t' = s' - 1$, avec s' et $s' - 1$ dans un même intervalle $\Delta_{k'}$. Alors $\chi_{s'}(\varpi) - q\chi_{t'}(\varpi) = 0$, donc le produit intervenant dans l'expression ci-dessus appartient à $\mathcal{P}_{(\chi)}$. D'où l'assertion.

Comme $f = ff^0_{(r)^m}$ par hypothèse, il résulte de ce qui précède que l'on peut se limiter dans (1) aux $w \in W'$ tels que si i, j appartiennent à un même intervalle Δ_k, avec $i \neq j$, alors wi et wj n'appartiennent pas à un même intervalle J_h. Posons, comme en V 3, $L = L\big((r)^m\big)$, notons $u \in W$ la permutation

$$u\big((h-1)m + k\big) = (m-k)r + h, \quad 1 \le h \le r,\ 1 \le k \le m.$$

On vérifie que l'ensemble des éléments wv, pour $w \in W'$ vérifiant l'hypothèse ci-dessus, est égal à $W_L u$. Donc (1) est égal à

(2) $$\sum_{w \in W_L} x_{wu,wu}.$$

Posons $f = \sum_{y \in W} \tau_y x_y$, $f^0_{(r)^m} = \Big(\sum_{z \in W_L} \tau_z\Big) x$, avec des coefficients x_y, $x \in C_{(\Delta)}$, cf. V 3. Soit $w \in W_L$. On a les égalités

$$\begin{aligned} f_\varepsilon \tau_{wua} = f_\varepsilon f^0_{(r)^m}\tau_{wua} &= \Big(\sum_{y \in W} \tau_y (x_y)_\varepsilon\Big)\Big(\sum_{z \in W_L} \tau_z\Big) x \tau_{wua} \\ &= \sum_{y \in W, z \in W_L} \tau_{yzwua} (wua)^{-1} x (zwua)^{-1} (x_y)_\varepsilon, \end{aligned}$$

où l'on définit de façon naturelle l'action de W sur $C_{(\Delta)}$. Le coefficient $x_{wu,wu}$ est la somme des coefficients intervenant ci-dessus, pour les y, z tels que $yzwua = wu$, i.e., $y = wua^{-1}u^{-1}w^{-1}z^{-1}$. Remarquons que $wua^{-1}u^{-1}w^{-1} \in W_L$. L'égalité implique $y \in W_L$ et on peut prendre $y \in W_L$ comme indice de sommation. Notons que $a^{-1}x \equiv x \bmod \mathcal{P}_{(\chi)}$. Alors

$$x_{wu,wu} \equiv \sum_{y \in W_L} (wu)^{-1}x(wu)^{-1}y(xy)_\varepsilon \bmod \mathcal{P}_{(\chi)},$$

et trace $A_m^\varepsilon \circ \mathrm{St}_m^\varepsilon(f)$ est égale à l'image dans $C_{(\chi)}/\mathcal{P}_{(\chi)}$ de

$$\sum_{w,y \in W_L} (wu)^{-1}x(wu)^{-1}y(x_y)_\varepsilon.$$

Remarquons que le a a disparu de cette formule. On peut répéter le raisonnement pour calculer trace $\mathrm{St}_m^\varepsilon(f_\varepsilon)$. On obtient exactement la même formule. De plus $\mathrm{St}_m^\varepsilon(f) = \mathrm{St}_m^\varepsilon(f_\varepsilon)$, puisque $\mathrm{St}_m^\varepsilon = (\varepsilon \circ \det)\,\mathrm{St}_m^\varepsilon$. D'où la proposition. ■

V 7.

LEMME. *Soient d, $e \in \mathbb{Z}$ et D une distribution sur G. Suppposons $e \geq 1$, e divise n et D ε-variante (cf. II 2). Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathcal{P}(n/e)$. Supposons qu'il existe $i \in \{1, \ldots, t\}$ tel que α_i ne soit pas divisible par r. Alors $D(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}) = 0$.*

DÉMONSTRATION (D'APRÈS[HA], LEMME 3.5). Fixons $i \in \{i, \ldots, t\}$ tel que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ ne soit pas divisible par r. Notons a cette somme et $\boldsymbol{\beta}$ la partition $\boldsymbol{\beta} = (\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_t, \alpha_1, \ldots, \alpha_i)$. On vérifie que

$$I_{\boldsymbol{\beta}^e} = \zeta^a I_{\boldsymbol{\alpha}^e} \zeta^{-a}.$$

D'où $f_{\boldsymbol{\beta}}^{d,e} = \mathrm{Ad}(\zeta^a) f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}$, et $D(f_{\boldsymbol{\beta}}^{d,e}) = \varepsilon(\varpi)^{-a} D(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e})$, où $\varepsilon(\varpi)^{-a} \neq 1$. Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que l'on a aussi $D(f_{\boldsymbol{\beta}}^{d,e}) = D(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e})$. Pour cela, introduisons le groupe $I' = I_{(n/e)^e}$ et son premier sous-groupe de congruence I'_1: c'est l'image réciproque dans K, par l'application de réduction, du radical unipotent du sous-groupe parabolique standard de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ associé à la partition $(n/e)^e$. Pour toute classe $A \in I'/I'_1$ (vue comme sous-ensemble de I'), notons $f_A^{d,e}$ la fonction caractéristique de $\zeta^{nd/e}A$. On a l'égalité

$$f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e} = \mathrm{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}^e})^{-1} \sum_{A \in I_{\boldsymbol{\alpha}^e}/I'_1} f_A^{d,e}$$

Posons $L = L\big((n/e)^e\big)$. Si $k \in K_L$ et $A \in I'/I'_1$, il existe une classe notée $k.A \in I'/I'_1$ telle que

$$k\zeta^{nd/e}Ak^{-1} = \zeta^{nd/e}k.A.$$

Cela définit une action de K_L sur I'/I'_1. Notons Γ l'ensemble d'orbites associé. Si A, $B \in I'/I'_1$ sont dans la même orbite, il existe $k \in K_L$ tel que $f_A^{d,e} = \mathrm{Ad}(k) f_B^{d,e}$, d'où $D(f_A^{d,e}) = D(f_B^{d,e})$. Si nous fixons un système de représentants $\{A(\gamma); \gamma \in \Gamma\} \subset I'/I'_1$ de Γ, on obtient

$$D(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}) = \mathrm{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}^e})^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} |(I_{\boldsymbol{\alpha}^e}/I'_1) \cap \gamma|\, D(f_{A(\gamma)}^{d,e}).$$

Remarquons que I'/I'_1 s'identifie naturellement à $\mathrm{GL}(n/e, \mathbb{F}_q)^e$. Identifions donc un élément $A \in I'/I'_1$ à un e-uplet $(A_1, \ldots, A_e) \in \mathrm{GL}(n/e, \mathbb{F}_q)^e$. On montre (cf. [Ca] 3.7) que l'application

$$\psi : I'/I'_1 \longrightarrow \mathrm{GL}(n/e, \mathbb{F}_q)$$
$$A \longmapsto A_1 A_{d+1} \cdots A_{(e-1)d+1}$$

identifie K_L-orbites et classes de conjugaison dans $\mathrm{GL}(n/e, \mathbb{F}_q)$. Soit γ une K_L-orbite, notons $\tilde{\gamma}$ sa classe de conjugaison associée. Alors

$$|(I_{\boldsymbol{\alpha}^e}/I'_1) \cap \gamma| = \sum_{c \in \tilde{\gamma}} |\psi^{-1}(c) \cap (I_{\boldsymbol{\alpha}^e}/I'_l)|.$$

Soit $c \in \tilde{\gamma}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\psi^{-1}(c) \cap (I_{\boldsymbol{\alpha}^e}/I'_1) \neq \emptyset$ est que $c \in P(\boldsymbol{\alpha}, \mathbb{F}_q)$, où l'on désigne ainsi le sous-groupe parabolique standard de $\mathrm{GL}(n/e, \mathbb{F}_q)$ associé à $\boldsymbol{\alpha}$. Si cette condition est vérifiée, on a évidemment

$$|\psi^{-1}(c) \cap (I_{\boldsymbol{\alpha}^e}/I'_1)| = |P(\boldsymbol{\alpha}, \mathbb{F}_q)|^{e-1}.$$

On obtient finalement l'égalité

$$D(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}) = \mathrm{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}^e})^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} |\tilde{\gamma} \cap P(\boldsymbol{\alpha}, \mathbb{F}_q)| \quad |P(\boldsymbol{\alpha}, \mathbb{F}_q)|^{e-1} D(f_{A(\gamma)}^{d,e}).$$

On a une formule analogue en remplaçant $\boldsymbol{\alpha}$ par $\boldsymbol{\beta}$. On vérifie facilement les égalités

$$\mathrm{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}^e}) = \mathrm{mes}(I_{\boldsymbol{\beta}^e}), \quad |P(\boldsymbol{\alpha}, \mathbb{F}_q)| = |P(\boldsymbol{\beta}, \mathbb{F}_q)|.$$

Pour toute classe de conjugaison $\tilde{\gamma}$ dans $\mathrm{GL}(n/e, F_q)$, on vérifie l'egalité

(1) $$|\tilde{\gamma} \cap P(\boldsymbol{\alpha}, \mathbb{F}_q)| = |\tilde{\gamma} \cap P(\boldsymbol{\beta}, \mathbb{F}_q)|.$$

On en déduit l'égalité cherchée $D(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}) = D(f_{\boldsymbol{\beta}}^{d,e})$. ∎

V 8.

LEMME. *Soient D une distribution sur G et $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \in \mathcal{P}(n)$. Supposons que D est ϵ-variante et qu'il existe $i \in \{1, \ldots, t\}$ tel que α_i ne soit pas divisible par r. Alors $D(f_{\boldsymbol{\alpha}}^X) = 0$.*

La démonstration est similaire à la précédente. La relation (1) doit être remplacée par la suivante, que l'on démontre aisément: notons $p(\boldsymbol{\alpha}, \mathbb{F}_q)$ et $p(\boldsymbol{\beta}, \mathbb{F}_q)$ les sous-algèbres évidentes de $M(n/e, \mathbb{F}_q)$; soit $\tilde{\gamma}$ une orbite dans $M(n/e, \mathbb{F}_q)$ pour l'action adjointe de $\mathrm{GL}(n/e, \mathbb{F}_q)$; alors

$$|\tilde{\gamma} \cap p(\boldsymbol{\alpha}, \mathbb{F}_q)| = |\tilde{\gamma} \cap p(\boldsymbol{\beta}, \mathbb{F}_q)|.$$ ∎

V 9.

LEMME. *Soient $d, e \in \mathbb{Z}$. Supposons $e \geq 1$, e divise n. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n/e)$. On a l'égalité*

$$\operatorname{trace} \mathrm{St}_n(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}) = \begin{cases} 0, & si\ \boldsymbol{\alpha} \neq (1)^{n/e}, \\ (-1)^{n(n-1)d/e}, & si\ \boldsymbol{\alpha} = (1)^{n/e}. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. En notant V_n l'espace de la représentation St_n, on sait que pour $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n)$, on a les égalités

$$(V_n)^{I_{\boldsymbol{\beta}}} = \{0\} \text{ si } \boldsymbol{\beta} \neq (1)^n, \ \dim(V_n)^I = 1.$$

De la première résulte que $\mathrm{St}_n(f) = 0$ pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$ biinvariante par $I_{\boldsymbol{\beta}}$, si $\boldsymbol{\beta} \neq (1)^n$. En particulier $\mathrm{St}_n(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}) = 0$ si $\boldsymbol{\alpha} \neq (1)^{n/e}$. Supposons maintenant $\boldsymbol{\alpha} = (1)^{n/e}$. Comme ζ normalise I, il conserve $(V_n)^I$ donc y agit par un scalaire, disons z. Il résulte des définitions que

$$\operatorname{trace} \mathrm{St}_n(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}) = z^{nd/e}.$$

Pour calculer z, considérons le cas $e = n$, $d = 1$, pour lequel $f_{(1)}^{1,n}$ est la fonction caractéristique de ζI. Dans le groupe de Grothendieck, on a l'égalité

$$\mathrm{St}_n = \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(n)} (-1)^{n-t(\boldsymbol{\lambda})} \pi_{\boldsymbol{\lambda}},$$

où $\pi_{\boldsymbol{\lambda}} = \operatorname{Ind}_{P(\boldsymbol{\lambda})}^G (\delta_{P(\boldsymbol{\lambda})}^G)^{1/2}$. D'où

$$\operatorname{trace} \mathrm{St}_n(f_{(1)}^{1,n}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(n)} (-1)^{n-t(\boldsymbol{\lambda})} \operatorname{trace} \pi_{\boldsymbol{\lambda}}(f_{(1)}^{1,n}).$$

Mais le support de $f_{(1)}^{1,n}$ est formé d'éléments elliptiques: ils sont compacts et la valuation de leurs déterminants est 1. D'où

$$\operatorname{trace} \pi_{\boldsymbol{\lambda}}(f_{(1)}^{1,n}) = 0 \text{ si } \boldsymbol{\lambda} \neq (n).$$

D'autre part $\pi_{(n)} = 1$ et $\operatorname{trace} \pi_{(n)}(f_{(1)}^{1,n}) = 1$. D'où

$$z = \operatorname{trace} \mathrm{St}_n(f_{(1)}^{1,n}) = (-1)^{n-1},$$

et le lemme. ∎

V 10.

LEMME. *Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n)$. On a les égalités*

$$\operatorname{trace} \mathrm{St}_n(f_{\boldsymbol{\alpha}}^X) = \begin{cases} 0, & si\ \boldsymbol{\alpha} \neq (1)^n, \\ (1-X)^{-1}, & si\ \boldsymbol{\alpha} = (1)^n. \end{cases}$$

REMARQUE. $f_{\boldsymbol{\alpha}}^X$ n'est pas à support compact; les égalités doivent être comprises comme égalités des N-ièmes coefficients des deux membres pour tout N.

DÉMONSTRATION. Le cas $\boldsymbol{\alpha} \neq (1)^n$ se traite comme en V 9. Supposons $\boldsymbol{\alpha} = (1)^n$. Posons $\pi = \mathrm{Ind}_B^G(\delta_B^G)^{1/2}$, soit V l'espace de cette représentation. Introduisons l'isomorphisme $\varphi\colon \mathcal{H}_W \longrightarrow V^I$ (cf. V 4). D'après V 2, le caractère de Steinberg de $\mathcal{H}_W$ intervient dans V^I avec multiplicité un. Il intervient sur la droite portée par le vecteur $v_0 = \varphi(\theta)$ (cf. V 2(1)). D'autre part l'espace V_n de la représentation St_n est un sous-module de V. On sait que V_n^I est de dimension un et que $\mathcal{H}_W$ agit sur V_n^I par le caractère de Steinberg. On en déduit l'égalité $V_n^I = \mathbb{C}\, v_0$. En considérant la définition de la fonction $f_{\boldsymbol{\alpha}}^X$, on voit qu'il existe $z^X \in \mathbb{C}\big[[X]\big]$ tel que

$$\pi(f_{\boldsymbol{\alpha}}^X)v_0 = z^X v_0,$$

et on a l'égalité

$$\mathrm{trace}\ \mathrm{St}_n(f_{\boldsymbol{\alpha}}^X) = z^X.$$

Calculons z^X. Comme $v_0(1) = 1$, on a les égalités

$$z^X = \big(\pi(f_{\boldsymbol{\alpha}}^X)v_0\big)(1) = \sum_{w\in W} z_w^X, \tag{1}$$

où l'on a posé

$$z_w^X = (-q)^{-l(w)}\big[\pi(f_{\boldsymbol{\alpha}}^X)\big(\varphi(T_w)\big)\big](1).$$

Fixons $w \in W$. Grâce à la décomposition d'Iwasawa, on a

$$z_w^X = \int_{D\times U\times K} f_{\boldsymbol{\alpha}}^X(duk)\delta_B^G(d)T_w(k^{-1})\, dk\, du\, dd$$

où D et U désignent le tore diagonal, resp. le groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures, et où les mesures sont normalisées par

$$\mathrm{mes}(D\cap K, dd) = \mathrm{mes}(U\cap K, du) = 1, \quad \mathrm{mes}(K, dk) = [K : I].$$

Comme T_w est la fonction caractéristique de $IwI = Iw(U\cap K)$, comme $f_{\boldsymbol{\alpha}}^X$ est invariante par I et que l'on calcule aisément

$$\mathrm{mes}(IwI) = q^{l(w)},$$

on obtient l'égalité

$$z_w^X = q^{l(w)} \int_{D\times U} f_{\boldsymbol{\alpha}}^X(duw^{-1})\delta_B^G(d)\, du\, dd.$$

Comme dans la démonstration de IV 4, on en déduit

$$z_w^X = q^{l(w)} \int_{D\times \mathrm{Lie}(U)} f_{\boldsymbol{\alpha}}^X\big((d+u)w^{-1}\big)\delta_B^G(d)J(d)\, du\, dd.$$

Pour $d = (d_1, \ldots, d_n) \in D$, on calcule

$$\delta_B^G(d)J(d) = \prod_{i=1}^n |d_i|^{1-i}.$$

Notons $1_{\mathcal{O}}$ resp. $1_{\varpi\mathcal{O}}$, les fonctions caractéristiques des sous-ensembles $\mathcal{O}$, resp. $\varpi\mathcal{O}$, de F; notons $(d_1,\ldots,d_n)$, resp. $(u_{ij})_{1\leq i<j\leq n}$, les coordonnées évidentes d'un élément $d\in D$, resp. $u\in \mathrm{Lie}(U)$. Un simple calcul matriciel montre que l'on a l'égalité

$$f^X_{\boldsymbol{\alpha}}\big((d+u)w^{-1}\big)=X^{v(d)}\Big(\prod_{i\in J^+}1_{\mathcal{O}}(d_i)\Big)\Big(\prod_{i\in J^-}1_{\varpi\mathcal{O}}(d_i)\Big)\Big(\prod_{(i,j)\in\mathcal{J}^+}1_{\mathcal{O}}(u_{ij})\Big)\Big(\prod_{(i,j)\in\mathcal{J}^-}1_{\varpi\mathcal{O}}(u_{ij})\Big),$$

où l'on a posé

$$v(d)=\sum_{i=1}^n v(d_i)$$
$$J^+=\{i;1\leq i\leq n,\ i\leq wi\},\ \mathcal{J}^+=\{(i,j);\ 1\leq i<j\leq n,\ i\leq wj\},$$
$$J^-=\{i;1\leq i\leq n,\ wi<i\},\ \mathcal{J}^-=\{(i,j);\ 1\leq i<j\leq n,\ wj<i\}.$$

Le calcul de z^X_w se ramène ainsi à un calcul d'intégrales en une variable. On obtient

$$z^X_w=q^{l(w)+a(w)}X^{b(w)}\prod_{i=1}^n(1-q^{i-1}X)^{-1},$$

où $a(w)=-|\mathcal{J}^-|+\sum_{i\in J^-}(i-1)$, $b(w)=|J^-|$. On calcule

$$|\mathcal{J}^-|=\sum_{j\in J^-}(j-wj-1),$$

d'où $a(w)=\sum_{j\in J^-}wj$. Posons

$$\Gamma(w)=\{j;1\leq j\leq n,\quad j<w^{-1}j\}=wJ^-.$$

On obtient l'égalité

$$z^X_w=q^{l(w)}\Big(\prod_{j\in\Gamma(w)}q^jX\Big)\Big(\prod_{i=1}^n(1-q^{i-1}X)\Big)^{-1}. \tag{2}$$

Introduisons le polynôme en n variables

$$P(X_1,\ldots,X_n)=\sum_{w\in W}(-1)^{l(w)}\prod_{j\in\Gamma(w)}X_j.$$

De (1) et (2) résulte l'égalité

$$z^X=P(qX,q^2X,\ldots,q^nX)\prod_{i=1}^n(1-Xq^{i-1})^{-1}. \tag{3}$$

Montrons que l'on a

$$P(X_1,\ldots,X_n)=\prod_{j=1}^{n-1}(1-X_j).$$

Remarquons que pour tout w, on a $n\notin\Gamma(w)$. Donc P est indépendant de X_n et est de degré au plus $n-1$. Soient $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ et s la symétrie qui échange i et n. Pour tout w, on vérifie que $\Gamma(w)$ et $\Gamma(sw)$ diffèrent au plus par l'élément i. Donc $\prod_{j\in\Gamma(w)}X_j$ et $\prod_{j\in\Gamma(sw)}X_j$

sont égaux pour $X_i = 1$. Comme $(-1)^{l(sw)} = (-1)^{l(w)+1}$, les termes correspondant à w et sw se compensent, donc P s'annule en $X_i = 1$. Enfin le terme constant de P est évidemment 1. Ces propriétés impliquent l'assertion.

Mais alors la formule (3) devient

$$z^X = (1 - X)^{-1},$$

ce qui achève la démonstration. ∎

V 11.

LEMME. *Soient $d, e \in \mathbb{Z}$. Supposons $e \geq 1$, e divise m,* pgcd$(d, e) = 1$. *Soient $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m/e)$. On a l'égalité*

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}}(1_{nd/e} 1_{\mathcal{J}} f^{d,e}_{r\boldsymbol{\alpha}}) = (-1)^{rmd - md/e} \langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, y_{\boldsymbol{\lambda}} \rangle.$$

Cf. I 10 pour les notations.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que pour $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(n/e)$, on a les égalités

(1) $$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_m \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_m(f^{d,e}_{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \boldsymbol{\beta} \neq r(1)^{m/e}, \\ (-1)^{rmd - md/e}, & \text{si } \boldsymbol{\beta} = r(1)^{m/e}. \end{cases}$$

Le membre de gauche est nul si $\boldsymbol{\beta}$ n'est pas de la forme $r\boldsymbol{\alpha}$ pour une partition $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(m/e)$ (lemme V 7). Supposons $\boldsymbol{\beta} = r\boldsymbol{\alpha}$. Alors

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_m \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_m(f^{d,e}_{r\boldsymbol{\alpha}}) = \operatorname{trace} \mathrm{St}^{\varepsilon}_m(f^{d,e}_{r\boldsymbol{\alpha}}),$$

(proposition V 6);

$$= \operatorname{trace}\Big(\mathrm{St}_m \otimes (\varepsilon \circ \det) \mathrm{St}_m \otimes \cdots \otimes (\varepsilon^{r-1} \circ \det) \mathrm{St}_m\Big)(f^{d,e}_{r\boldsymbol{\alpha}})^P,$$

où $P = P\big((m)^r\big)$;

$$= \sum_{a=(a_{ij}) \in M\left(r\boldsymbol{\alpha}, (m/e)^r\right)} \prod_{j=1}^{r} \operatorname{trace}\Big((\varepsilon^{j-1} \circ \det) \mathrm{St}_m\Big)(f^{d,e}_{(a_{\cdot j})}),$$

(lemme IV 3). Soit $a \in M\big(r\boldsymbol{\alpha}, (m/e)^r\big)$. Utilisons le lemme V 9. Le terme correspondant à a dans l'expression ci-dessus est nul s'il existe i, j tels que $a_{ij} > 1$, i.e., si $a \notin M^1\big(r\boldsymbol{\alpha}, (m/e)^r\big)$, cf. I 9. Si $a \in M^1\big(r\boldsymbol{\alpha}, (m/e)^r\big)$, il vaut

$$(-1)^{rm(m-1)d/e} \varepsilon(\varpi)^{r(r-1)md/2e}.$$

Cette expression se simplifie en remarquant que $\varepsilon(\varpi)^{r(r-1)/2} = (-1)^{r-1}$, et que $(-1)^{N^2} = (-1)^N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. On obtient $(-1)^{rmd - md/e}$. On calcule immédiatement

$$|M^1(r\boldsymbol{\alpha}, (m/e)^r)| = \begin{cases} 1, & \text{si } \boldsymbol{\alpha} = (1)^{m/e}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où (1).

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-049-5 Published online by Cambridge University Press

Revenons aux notations de l'énoncé. On a l'égalité $1_{nd/e}1_c f^{d,e}_{r\boldsymbol{\alpha}} = f^{d,e}_{r\boldsymbol{\alpha}}$, d'où, en posant $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$, $P = P(re\boldsymbol{\lambda})$,

$$\begin{aligned}\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}} (1_{nd/e}1_c f^{d,e}_{r\boldsymbol{\alpha}}) &= \operatorname{trace}(A^{\varepsilon}_{e\lambda_1} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{e\lambda_1} \otimes \cdots \otimes A^{\varepsilon}_{e\lambda_t} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{e\lambda_t})\big((f^{d,e}_{r\boldsymbol{\alpha}})^P\big)\\ &= \sum_{a=(a_{ij})\in M(r\boldsymbol{\alpha}, r\boldsymbol{\lambda})} \prod_{j=1}^{t} \operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{e\lambda_j} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{e\lambda_j}(f^{d,e}_{(a_{,j})})\end{aligned}$$

(lemme IV 3). Appliquons (1): pour $a \in M(r\boldsymbol{\alpha}, r\boldsymbol{\lambda})$, le terme correspondant dans l'expression ci-dessus est nul si a n'est pas de la forme rb (avec une notation évidente) pour un $b \in M^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$; si a est de cette forme, le terme vaut $(-1)^{rmd-md/e}$. D'après [Z], 3.17 (c), on a l'égalité

$$|M^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})| = \langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, y_{\boldsymbol{\lambda}} \rangle.$$

D'où l'égalité de l'énoncé. ∎

V 12. Soit N un entier. On définit un élément $P \in R[[T_1, \ldots, T_N]]$ par

$$P = \prod_{j=1}^{N} X(T_j)$$

(cf. I 10). Soit $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(N)$. On peut donc définir $\Gamma^{\boldsymbol{\lambda}_P}$ (cf. I 11). On définit d'autre part $s_{\boldsymbol{\lambda}}(q) \in \mathbb{C}^{*N}$. On définit alors l'élément de $R[[T]]$:

$$(\Gamma^{\boldsymbol{\lambda}_P})\big(Ts_{\boldsymbol{\lambda}}(q)\big).$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, on note $x_M(\boldsymbol{\lambda}, q)$ le coefficient de T^M dans cette série.

LEMME. *Soient $d, e \in \mathbb{N}$. Supposons $d, e \geq 1$ et e divise m. Soient $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(m)$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m/e)$. Alors on a l'égalité*

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}} (1_{nd/e}1_c f_{r\boldsymbol{\alpha}}) = (-1)^{m-t(\boldsymbol{\lambda})} q^{n^2d/2e-n/2} \langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, x_m(d\boldsymbol{\lambda}, q^r) \rangle.$$

DÉMONSTRATION. On va d'abord calculer trace $A^{\varepsilon}_m \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_m(1_c f^X_{r\boldsymbol{\alpha}})$. Utilisons les lemmes III 5 et IV 4. On obtient l'égalité

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_m \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_m(1_c f^X_{r\boldsymbol{\alpha}}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m)} (-1)^{t(\boldsymbol{\lambda})-1} \sum_{a \in M(r\boldsymbol{\alpha}, r\boldsymbol{\lambda})} I(\boldsymbol{\lambda}, a), \tag{1}$$

où l'on a posé, pour $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$,

$$I(\boldsymbol{\lambda}, a) = \operatorname{trace}\Big(\bigotimes_{j=1}^{t} A^{\varepsilon}_{\lambda_j} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{\lambda_j}\Big)\Big(\hat{\chi}_{r\boldsymbol{\lambda}} \bigotimes_{j=1}^{t} f^{X(j,\boldsymbol{\lambda})}_{(a_{,j})}\Big),$$

avec

$$X(j, \boldsymbol{\lambda}) = q^{(n-r\lambda_j)/2-\lambda_j^*} X.$$

Fixons $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(m)$ et $a \in M(r\boldsymbol{\alpha}, r\boldsymbol{\lambda})$. Pour $j \in \{1, \ldots, t\}$, posons

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{\lambda_j} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{\lambda_j}(f^{X(j,\boldsymbol{\lambda})}_{(a_{,j})}) = \sum_{d \in \mathbb{N}} c(j, d) X^d. \tag{2}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-049-5 Published online by Cambridge University Press

De la définition de $\hat{\chi}_{r\boldsymbol{\lambda}}$ résulte l'égalité

$$I(\boldsymbol{\lambda}, a) = \sum_{d \in \Gamma_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{N}}} \Big(\prod_{j=1}^{t} c(j, d_j)\Big) X^{\Sigma(d)} \tag{3}$$

où $\Gamma_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{N}} = \Gamma_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{Z}} \cap \mathbb{N}^t$, cf. I 11, et $\Sigma(d) = \sum_{j=1}^{t} d_j$.

Calculons (2). Le membre de gauche est nul s'il existe i tel que a_{ij} ne soit pas divisible par r (lemme V 8). Supposons a_{ij} divisible par r pour tout i. Alors

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{\lambda_j} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{\lambda_j}(f^{X(j,\boldsymbol{\lambda})}_{(a_{\cdot j})}) = \operatorname{trace} \mathrm{St}^{\varepsilon}_{\lambda_j}(f^{X(j,\boldsymbol{\lambda})}_{(a_{\cdot j})})$$

(proposition V 6),

$$= \operatorname{trace}\Big(\bigotimes_{\ell=1}^{r} (\varepsilon^{\ell-1} \circ \det) \mathrm{St}_{\lambda_j}\Big)\Big(\big(f^{X(j,\boldsymbol{\lambda})}_{(a_{\cdot j})}\big)^P\Big),$$

où $P = P\big((\lambda_j)^r\big)$ (il s'agit d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}(r\lambda_j, F)$);

$$= \sum_{b=(b_{k\ell}) \in M\left((a_{\cdot j}),(\lambda_j)^r\right)} \prod_{\ell=1}^{r} \operatorname{trace}\big((\varepsilon^{\ell-1} \circ \det) \mathrm{St}_{\lambda_j}\big)\big(f^{Y(j,\boldsymbol{\lambda})}_{(b_{\cdot \ell})}\big)$$

où $Y(j, \boldsymbol{\lambda}) = q^{(r-1)\lambda_j/2} X(j, \boldsymbol{\lambda})$, cf. lemme IV 4. De V 10 résulte que les seuls b dont la contribution est non nulle sont les éléments de $M^1\big((a_{\cdot j}), (\lambda_j)^r\big)$. Pour ceux-là, la contribution est

$$\prod_{\ell=1}^{r} \big(l - \varepsilon(\varpi)^{\ell-1} Y(j, \boldsymbol{\lambda})\big)^{-1} = \big(1 - Y(j, \boldsymbol{\lambda})^r\big)^{-1}.$$

On calcule

$$M^1\big((a_{\cdot j}), (\lambda_j)^r\big) = \begin{cases} 1, & \text{si } (a_{\cdot j}) = (r)^{\lambda_j}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En explicitant $Y(j, \boldsymbol{\lambda})$, on obtient

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{\lambda_j} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{\lambda_j}\big(f^{X(j,\boldsymbol{\lambda})}_{(a_{\cdot j})}\big) = \begin{cases} (1 - X^r q^{(n-\lambda_j)r/2 - r\lambda_j^*})^{-1}, & \text{si } (a_{\cdot j}) = (r)^{\lambda_j}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant (3), on voit que $I(\boldsymbol{\lambda}, a) = 0$ si a n'est pas de la forme rb pour un $b \in M^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$. Supposons $a = rb$ pour un tel b. Alors

$$I(\boldsymbol{\lambda}, a) = \sum_{d \in \Gamma_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{N}}} q^{r\Sigma d_j \lambda_j^{**}} (X^r q^{(n-m)r/2})^{\Sigma(d)},$$

où

$$\lambda_j^{**} = (m - \lambda_j)/2 - \lambda_j^* = \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k.$$

En reportant cette expression dans (1) et en tenant compte de l'égalité

$$|M^1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})| = \langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, y_{\boldsymbol{\lambda}} \rangle,$$

on obtient

$$\operatorname{trace} A_m^{\varepsilon} \circ \mathrm{St}_m^{\varepsilon}(1_c f_{r\boldsymbol{\alpha}}^X) = \langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, y(X^r q^{(n-m)r/2}, q^r)\rangle,$$

oú l'on a posé

$$y(X_1, X_2) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m)} \sum_{\boldsymbol{d} \in \Gamma_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{N}}} X_1^{\Sigma(d)} X^{\Sigma d_j \lambda_j^{**}} (-1)^{t(\boldsymbol{\lambda})-1} y_{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Fixons $D \in \mathbb{N}$, $D \geq 1$, calculons le coefficient $y_D(X_2)$ de X_1^D dans $y(X_1, X_2)$. A $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(m)$ et $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_t) \in \Gamma_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{N}}$, tel que $\Sigma(d) = D$, on peut associer

(5)
- l'entier $t = t(\boldsymbol{\lambda}) \geq 1$;
- un entier $s \geq 1$;
- trois suites d'entiers

$$\begin{aligned} 1 &\leq j_1 < \cdots < j_s \leq t \\ 0 &= D_s < D_{s-1} < \cdots < D_1 < D \\ M_1, &\ldots, M_s \geq 1 \end{aligned}$$

ainsi définis: $j_1, \ldots, j_s$ sont les indices j pour lesquels $d_j > 0$; pour $i \in \{1, \ldots, s\}$, $D_i = d_{j_{i+1}} + \cdots + d_t$, $M_i = \lambda_{j_i} + \cdots + \lambda_{j_{i+1}-1}$ (où formellement $j_{s+1} = t + 1$).

Remarquons que les conditions $\boldsymbol{d} \in \Gamma_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{N}}$, $\Sigma(d) = D > 0$ impliquent $d_1 > 0$, d'où

$$j_1 = 1, \quad \sum_{i=1}^{s} M_i = m. \tag{6}$$

Considérons la condition $\boldsymbol{d} \in \Gamma_{\boldsymbol{\lambda},\mathbb{N}}$. Elle est définie par des inégalités dépendant d'un indice $h \in \{1, \ldots, t-1\}$ (cf. I 11). On vérifie que celles d'indices $j_2 - 1, \ldots, j_s - 1$ impliquent les autres. Et celles-là se traduisent par les inégalités

$$\text{pour tout } i \in \{1, \ldots, s-1\},\ D(M_{i+1} + \cdots + M_s) > D_i m. \tag{7}$$

Notons enfin l'égalité

$$\sum_{j=1}^{t} d_j \lambda_j^{**} = \sum_{i=1}^{s} D_i M_i.$$

Notons (A) une donnée de s, t et de trois suites d'entier (j_i), (D_i), (M_i) vérifiant les conditions (5), (6) et (7); (B) une donnée de s et de deux suites (D_i), (M_i) vérfiant les mêmes conditions (où on oublie t et la suite (j_i)). On note $y_D^{(A)}(X_2)$, resp. $y_D^{(B)}(X_2)$, la sous-somme de $y(X_1, X_2)$ portant sur les couples $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d})$ dont (A), resp. (B), sont les données associées. Calculons d'abord $y_D^{(A)}(X_2)$. Le terme $\boldsymbol{d}$ est uniquement déterminé par (A). A $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d})$ dont (A) est la donnée associée, associons les s partitions

$$\boldsymbol{\mu}^{(i)} = (\lambda_{j_i}, \ldots, \lambda_{j_{i+1}-1}).$$

On a $\boldsymbol{\mu}^{(i)} \in \mathcal{P}(M_i)$ et $t(\boldsymbol{\mu}^{(i)}) = j_{i+1} - j_i$. On voit que l'application

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{d}) \mapsto (\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\mu}^{(s)})$$

est une bijection entre les couples dont la donnée associée est (A) et les s-uplets de partitions vérifiant les conditions ci-dessus. Pour $i \in \{1, \dots, s\}$, posons

$$j'_i = j_{i+1} - j_i, \; z_i = X_2^{D_i M_i} \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(M_i); t(\boldsymbol{\mu}) = j'_i} (-1)^{j'_i} y_{\boldsymbol{\mu}}.$$

On obtient l'égalité

$$y_D^{(A)}(X_2) = -\prod_{i=1}^{s} z_i.$$

Introduisons des variables $U_1, \dots, U_s$. Avec les notations de I 11, on voit que z_i n'est autre que la valeur en $U_i = X^{D_i}2$ de

$$c_{M_i}\left(\left(1 - Y(U_i)\right)^{j'_i}\right) U_i^{M_i},$$

le 1 venant du fait que les coefficients des éléments de $\mathcal{P}(M_i)$ sont ≥ 1.

Calculons maintenant $y_D^{(B)}(X_2)$. C'est la somme des $y_D^{(A)}(X_2)$ pour les données (A) dont la *restriction* est (B) quand on oublie t et la suite (j_1). Cela revient à sommer les termes précédents sur les s-uplets $(j'_1, \dots, j'_s)$ d'entier $j'_i \geq 1$. Pour $i \in \{1, \dots, s\}$, notons donc z'_i la valeur en $U_i = X_2^{D_i}$ de

$$c_{M_i}\left(\sum_{j'_i=1}^{\infty}\left(1 - Y(U_i)\right)^{j'_i}\right) U_i^{M_i}. \tag{8}$$

On a l'égalité

$$y_D^{(B)}(X_2) = -\prod_{i=1}^{s} z'_i.$$

La série qui intervient dans (8) est égale à $Y(U_i)^{-1} - 1$, ou encore $X(-U_i) - 1$. Comme $M_i \geq 1$, on peut négliger la constante -1. On peut aussi remplacer $X(-U_i)$ par $X(U_i)$ à condition de multiplier l'expression obtenue par $(-1)^{M_i}$.

Modifions nos notations en introduisant des variables $T_1, \dots, T_D$ et en remplaçant U_i par T_k, où $k = D_i + 1$. Introduisons l'élément

$$P = \prod_{k=1}^{D} X(T_k)$$

de $R[[T_1, \dots, T_D]]$, et posons $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_D)$, avec, pour $D \in \{1, \dots, D\}$,

$$e_k = \begin{cases} M_i, & \text{si } k = D_i + 1 \text{ pour un } i \in \{1, \dots, s\}, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

On voit alors que $y_D^{(B)}(X_2)$ est égal à la valeur au point $(T_1, \dots, T_D) = (1, X_2, \dots, X_2^{D-1})$ de

$$(-1)^{m-1} c_{\boldsymbol{e}}(P) \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{e}}.$$

La condition (7) se traduit par: $\boldsymbol{e} \in \Gamma_{\mathbf{N}}^{(D)}$ et (6) par $\sum_{k=1}^{D} e_k = m$.

Pour obtenir $y_D(X_2)$, il reste à sommer les $y_D^{(B)}(X_2)$ sur toutes les données (B). Mais celles-ci sont en bijection avec les $\boldsymbol{e}$ vérifiant les conditions ci-dessus. Alors $y_D(X_2)$ est la valeur au point $(T_1,\dots,T_D)=(1,X_2,\dots,X_2^{D-1})$ de

$$(-1)^{m-1}\sum_{e\in E} c_{\boldsymbol{e}}(P)\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{e}},$$

où

$$E=\left\{\boldsymbol{e}\in\mathbb{N}^D;\boldsymbol{e}\in\Gamma_{\mathbb{N}}^{(D)},\quad \sum_{k=1}^{D}e_k=m\right\}.$$

Remplaçons X_2 par q^r. Comme

$$(1,q^r,\dots,q^{r(D-1)})=q^{r(D-1)/2}s_{(D)}(q^r),$$

de l'expression ci-dessus et des définitions résulte l'égalité

$$y_D(q^r)=(-1)^{m-1}q^{rm(D-1)/2}x_m\big((D),q^r\big),$$

puis

$$y(X^rq^{(n-m)r/2},q^r)=c+(-1)^{m-1}q^{-n/2}\sum_{D=1}^{\infty}X^{rD}q^{nrD/2}x_m\big((D),q^r\big),$$

où c est une constante que l'on n'a pas déterminée.

Le coefficient de X^{rD} dans trace $A_m^{\varepsilon}\circ\mathrm{St}_m^{\varepsilon}(1_c f_{r\boldsymbol{\alpha}}^X)$ est égal à

$$\operatorname{trace}A_m^{\varepsilon}\circ\mathrm{St}_m^{\varepsilon}(1_{rD}1_c f_{r\boldsymbol{\alpha}}).$$

Pour $D\geq 1$, on obtient grâce à (4):

$$\operatorname{trace}A_m^{\varepsilon}\circ\mathrm{St}_m^{\varepsilon}(1_{rD}1_c f_{r\boldsymbol{\alpha}})=(-1)^{m-1}q^{n(rD-1)/2}\big\langle x_{\boldsymbol{\alpha}},x_m\big((D),q^r\big)\big\rangle. \tag{9}$$

Passons maintenant au cas général. On revient aux notations de l'énoncé. Posons $P=P(re\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_t)$. On a les égalités

$$\begin{aligned}&\operatorname{trace}A_{e\boldsymbol{\lambda}}^{\varepsilon}\circ\mathrm{St}_{e\boldsymbol{\lambda}}^{\varepsilon}(1_{nd/e}1_c f_{r\boldsymbol{\alpha}})\\&\quad=\operatorname{trace}\Big(\bigotimes_{j=1}^{t}A_{e\lambda_j}^{\varepsilon}\circ\mathrm{St}_{e\lambda_j}^{\varepsilon}\Big)\Big[\Big(\bigotimes_{j=1}^{t}1_{r\lambda_j d}1_c\Big)f_{r\boldsymbol{\alpha}}^P\Big]\\&\qquad q^{n^2d/2e-r^2edS(\boldsymbol{\lambda})/2}\sum_{a=(a_{ij})\in M(r\boldsymbol{\alpha},re\boldsymbol{\lambda})}\bigotimes_{j=1}^{t}\operatorname{trace}A_{e\lambda_j}^{\varepsilon}\circ\mathrm{St}_{e\lambda_j}^{\varepsilon}(1_{r\lambda_j d}1_c f_{(a_{,j})}),\end{aligned}$$

cf. Lemme IV 4. D'après V 8. seuls contribuent les $a=(a_{ij})$ pour lesquels a_{ij} est divisible par r pour tous i,j. Autrement dit, les a de la forme rb, pour $b\in M(\boldsymbol{\alpha},e\boldsymbol{\lambda})$. Grâce à (9), on obtient

$$\begin{aligned}&\operatorname{trace}A_{e\boldsymbol{\lambda}}^{\varepsilon}\circ\mathrm{St}_{e\boldsymbol{\lambda}}^{\varepsilon}(1_{nd/e}1_c f_{r\boldsymbol{\alpha}})\\&\quad=(-1)^{m-t}q^{n^2d/2e-n/2}\sum_{b=(b_{ij})\in M(\boldsymbol{\alpha},e\boldsymbol{\lambda})}\prod_{j=1}^{t}\big\langle x_{(b_{,j})},x_{e\lambda_j}\big((\lambda_j d),q^r\big)\big\rangle.\end{aligned}$$

Rappelons la formule suivante, que l'on peut déduire de [Z] § 3: soient $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s) \in \mathcal{P}(m)$ et $r_1, \ldots, r_s$ des éléments de $R_{\mu_1}, \ldots, R_{\mu_s}$; on a l'égalité

$$\langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, \prod_{j=1}^{s} r_j \rangle = \sum_{b=(b_{ij})\in M(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\mu})} \langle x_{(b_j)}, r_j \rangle .$$

En appliquant cette formule et la suivante, qui résulte des définitions:

$$\prod_{j=1}^{t} x_{e\lambda_j}\big((\lambda_j d), q^r\big) = x_m(d\boldsymbol{\lambda}, q^r),$$

on obtient l'égalité cherchée:

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}}(1_{nd/e} 1_c f_{r\boldsymbol{\alpha}}) = (-1)^{m-t} q^{n^2 d/2e - n/2} \langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, x_m(d\boldsymbol{\lambda}, q^r) \rangle . \qquad \blacksquare$$

6. **Calculs d'intégrales orbitales.**

VI 1. Soit F' une extension finie de F de degré divisant n. Notons e l'indice de ramification de $F'/F, f$ le degré résiduel, $n' = n/ef$. Posons $G' = \mathrm{GL}(n', F')$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on a défini le réseau $\mathcal{L}_i$ de F^n (cf. I 7), que nous noterons ici $\mathcal{L}_{i,G}$. On définit de même des réseaux $\mathcal{L}_{i,G'}$ de $F'^{n'}$. Soit $\psi : F'^{n'} \longrightarrow F^n$ un isomorphisme F-linéaire. Nous dirons que ψ est compatible aux chaînes de réseaux si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $\psi(\mathcal{L}_{i,G'}) = \mathcal{L}_{if,G}$. Il existe de tels isomorphismes. Fixons-en un, ce qui définit du même coup un plongement $i_\psi : G' \longrightarrow G$. Soient $d', e' \in \mathbb{Z}$, supposons $e' \geq 1$, e' divise n'; soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n'/e')$; on vérifie que l'on a l'égalité

$$i_\psi(\zeta_{G'}^{n'd'/e'} I_{\boldsymbol{\alpha}^{e'},G'}) = i_\psi(G') \cap (\zeta_G^{nd'/ee'} I_{(f\boldsymbol{\alpha})^{ee'},G}).$$

VI 2. Soit $\delta \in F'^*$. Nous dirons qu'il est F'/F-cuspidal si $\mathrm{pgcd}\big(v_{F'}(\delta), e\big) = 1$ et si la réduction de

$$\varpi_F^{-v_{F'}(\delta)} \delta^e$$

dans le corps résiduel de $o_{F'}$ engendre celui-ci sur le corps résiduel de o_F, cf. [Ca] 3.2.

VI 3. Notons $I^1_{G'}$ le premier sous-groupe de congruence de $I_{G'}$, i.e. le sous-groupe des éléments de coefficients diagonaux $\equiv 1 \bmod \varpi_{F'} o_{F'}$. Identifions F'^* au centre de G'.

LEMME. *Soient $\psi : F'^{n'} \longrightarrow F^n$ un isomorphisme compatible aux chaînes de réseaux, $\delta \in F'^*$, $\gamma' \in I^1_{G'}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n/e)$, $g \in G$. Supposons que δ est F'/F-cuspidal et que* $\mathrm{pgcd}(e,p) = 1$. *Posons $\gamma = \delta\gamma'$, $d = v_{F'}(\delta)$. Supposons enfin que*

$$g^{-1} i_\psi(\gamma) g \in \zeta_G^{nd/e} I_{\boldsymbol{\alpha}^e,G}.$$

Alors il existe $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{P}(n')$ telle que $\boldsymbol{\alpha} = f\boldsymbol{\alpha}'$ et l'on a $g \in i_\psi(G') I_{\boldsymbol{\alpha}^e,G}$.

C'est la n-ième version d'un lemme de Kazhdan ([K1] Lemme 3.3, [He] 5.6, [W] 5.3).

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, on identifie $F'^{n'}$ à F^n et G' à un sous-groupe de G et on supprime toute mention de ψ ou i_ψ. Posons $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^e$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$. On définit la chaîne de réseaux $(\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G})_{i\in\mathbb{Z}}$, cf. I 7. Nous allons montrer

(1) pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G}$ est stable par $o_{F'}$.

Puisque $\gamma' \in I^1_{G'}$, on a

$$\lim_{s\to\infty} \gamma'^{p^s} = 1.$$

Il existe donc s assez grand tel que

$$\gamma'^{p^s} g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G} = g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G} \tag{2}$$

pour tout $i \in \{0, \ldots, t-1\}$, donc pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Comme e est premier à p, comme δ est F'/F-cuspidal et comme l'élévation à la puissance p est un automorphisme du corps résiduel de $o_{F'}$, les éléments

$$\delta_h = \varpi_F^{-[dp^sh/e]}\delta^{p^sh},$$

pour $h \in \{0, \ldots, ef-1\}$, forment une base de $o_{F'}$, sur o_F. D'après l'hypothèse du lemme, on a

$$\gamma g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G} = g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i+td/e,G}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$, d'où pour tout $h \in \{0, \ldots, ef-1\}$:

$$\gamma^{p^sh} g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G} = g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i+tdp^sh/e,G}.$$

Comme $\gamma^{p^sh} = \delta^{p^sh}\gamma'^{p^sh}$, on obtient grâce à (2):

$$\delta^{p^sh} g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G} = g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i+tdp^sh/e,G},$$

puis

$$\delta_h g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G} = g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i(h),G}, \text{ où } i(h) = i + tdp^sh/e - t[dp^sh/e]. \tag{3}$$

A fortiori, $\delta_h g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G} \subset g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G}$. Donc $g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G}$ est stable par δ_h pour tout h, donc par $o_{F'}$, ce qui démontre (1).

Choisissons $h \in \{0, \ldots, ef-1\}$ tel que $p^sdh \equiv 1 \bmod e$. Alors $\delta_h \in \varpi_{F'} o^*_{F'}$. De (3), on déduit

$$\varpi_{F'} g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G} = g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i+t/e,G} \tag{4}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Les conditions (1) et (4) impliquent qu'il existe une partition $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{t/e}) \in \mathcal{P}(n')$ et un élément $g' \in G'$ tels que

$$g\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G} = g'\mathcal{L}^{\boldsymbol{\alpha}'}_{i,G'} \tag{5}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Posons $q = q_F$, $q' = q_{F'}$. Pour $i \in \{1, \ldots, t/e\}$, on a

$$\alpha_i = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{t/e-i,G}/\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{t/e-i+1,G}), \quad \alpha'_i = \dim_{\mathbb{F}_{q'}}(\mathcal{L}^{\boldsymbol{\alpha}'}_{t/e-i,G'}/\mathcal{L}^{\boldsymbol{\alpha}'}_{t/e-i+1,G'}).$$

De plus $\dim_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q'}) = f$. On en déduit $\alpha_i = f\alpha'_i$ et $\boldsymbol{\alpha} = f\boldsymbol{\alpha}'$. Comme ψ est compatible aux chaînes de réseaux, on voit que

$$\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G} = \mathcal{L}^{\boldsymbol{\alpha}'}_{i,G'}.$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. D'après (5), $g'^{-1}g$ appartient au stabilisateur de la chaîne de réseaux $(\mathcal{L}^{\boldsymbol{\beta}}_{i,G})_{i\in\mathbb{Z}}$, qui n'est autre que $I_{\boldsymbol{\alpha}^e,G}$. Donc $g \in G'I_{\boldsymbol{\alpha}^e,G}$. ∎

VI 4. Conservons la situation de VI 1. Posons $r' = r/\operatorname{pgcd}(r,f)$, supposons que r' divise n' et posons $m' = n'/r'$. Notons EF' l'extension composée de E et F'. Fixons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (EF')^{m'} & \xrightarrow{\psi_{EF'/E}} & E^m \\ \psi_{EF'/F}\downarrow & & \downarrow\psi_{E/F} \\ F'^{n'} & \xrightarrow{\psi_{F'/F}} & F^n \end{array}$$

de sorte que

(i) $\psi_{EF'/E}$ (resp. $\psi_{EF'/F'}$ etc.) soit un isomorphisme E– (resp. F'– etc.) linéaire;

(ii) $\psi_{E/F}$ soit l'isomorphisme fixé en II 1;

(iii) $\psi_{EF'/F}$ soit construit de façon analogue à $\psi_{E/F}$, cf. II 1.

On montre aisément qu'il existe $h \in G$ tel que:

(i) $v_F(\det h) \in r\mathbb{Z}$,

(ii) $h\psi_{F'/F}$ soit compatible aux chaînes de réseaux. (1)

Notons pour simplifier $i_{EF'/F}$ etc. au lieu de $i_{\psi_{EF'/F}}$ etc. cf. VI 1. Posons $H' = \mathrm{GL}(m', EF')$. Notons enfin ε' le caractère $\varepsilon \circ N_{F'/F}$ de F'^*. Il est non ramifié d'ordre r'.

LEMME. *Sous les hypothèses ci-dessus, soient $\delta \in F'^*$, $\gamma' \in I^1_{G'}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(n/e)$. Supposons que δ est F'/F-cuspidal et que* $\operatorname{pgcd}(e,p) = 1$. *Posons $\gamma = \delta\gamma'$, $d = v_{F'}(\delta)$. Supposons de plus que $\gamma \in i_{EF'/F'}(H')$ et que $i_{F'/F}(\gamma)$ soit semi-simple régulier. Alors on a les égalités:*

$$I^{\varepsilon}_G\big(f^{d,e}_{\boldsymbol{\alpha}}, i_{F'/F}(\gamma)\big) = \begin{cases} I^{\varepsilon'}_{G'}(f^0_{\boldsymbol{\alpha}'}, \gamma'), & \textit{si } \boldsymbol{\alpha} = f\boldsymbol{\alpha}', \textit{ avec } \boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{P}(n'), \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que les hypothèses impliquent que ces intégrales orbitales sont bien définies.

DÉMONSTRATION. Fixons h vérifiant (1), posons $\psi = h\psi_{F'/F}$. Notons $T_{F'/F}$, resp. T_ψ le commutant dans G de $i_{F'/F}(\gamma)$, resp. $i_\psi(\gamma)$. On a

$$I^{\varepsilon}_G\big(f^{d,e}_{\boldsymbol{\alpha}}, i_{F'/F}(\gamma)\big) = \int_{T_{F'/F}\backslash G} \varepsilon \circ \det(g) f^{d,e}_{\boldsymbol{\alpha}}\big(g^{-1} i_{F'/F}(\gamma) g\big)\, dg.$$

Mais $i_{F'/F}(\gamma) = h^{-1} i_\psi(\gamma) h$, d'où par un changement de variables évident et grâce à (1) (i):

$$I^{\varepsilon}_G\big(f^{d,e}_{\boldsymbol{\alpha}}, i_{F'/F}(\gamma)\big) = \int_{T_\psi\backslash G} \varepsilon \circ \det(g) f^{d,e}_{\boldsymbol{\alpha}}\big(g^{-1} i_\psi(\gamma) g\big)\, dg.$$

Utilisons le lemme VI 3 et la définition de $f^{d,e}_{\boldsymbol{\alpha}}$. Si $\boldsymbol{\alpha}$ n'est pas de la forme $f\boldsymbol{\alpha}'$, pour un $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{P}(n')$, on obtient $I^{\varepsilon}_G\big(f^{d,e}_{\boldsymbol{\alpha}}, i_{F'/F}(\gamma)\big) = 0$. Si $\boldsymbol{\alpha} = f\boldsymbol{\alpha}'$, avec $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{P}(n')$, on obtient

$$I^{\varepsilon}_G\big(f^{d,e}_{\boldsymbol{\alpha}}, i_{F'/F}(\gamma)\big) = \sum_{g\in\Gamma} \operatorname{mes}\big(T_\psi \backslash T_\psi i_\psi(g) I_{\boldsymbol{\alpha}^e,G}\big) f^{d,e}_{\boldsymbol{\alpha}}\big(i_\psi(g^{-1}\gamma g)\big)\varepsilon \circ \det\big(i_\psi(g)\big),$$

où Γ est un système de représentants des classes d'équivalence de G' pour l'équivalence: $g_1 \sim g_2$ si et seulement si $i_\psi(g_1) \in T_\psi i_\psi(g_2) I_{\boldsymbol{\alpha}^e,G}$. Notons T' le commutant de γ dans G'. L'hypothèse de régularité de $i_{F'/F}(\gamma)$ implique que $T_\psi = i_\psi(T')$. Alors Γ est simplement un système de représentants de $T' \backslash G' / I_{\boldsymbol{\alpha}',G'}$. Pour $g \in \Gamma$, on calcule:

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}(T_\psi \backslash T_\psi i_\psi(g) I_{\boldsymbol{\alpha}^e,G}) &= \operatorname{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}^e,G})[K_{T'} : (g I_{\boldsymbol{\alpha}',G'} g^{-1}) \cap T'] \\
&= \operatorname{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}',G'})^{-1} \operatorname{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}^e,G}) \operatorname{mes}(T' \backslash T' g I_{\boldsymbol{\alpha}',G'}), \\
f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}\big(i_\psi(g^{-1}\gamma g)\big) &= \operatorname{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}^e,G})^{-1} \operatorname{mes}(I_{\boldsymbol{\alpha}',G'}) f_{\boldsymbol{\alpha}'}^{d,1}(g^{-1}\gamma g), \\
\varepsilon \circ \det{}_G\big(i_\psi(g)\big) &= \varepsilon' \circ \det{}_{G'}(g).
\end{aligned}$$

On recompose alors l'intégrale:

$$I_G^\varepsilon\big(f_{\boldsymbol{\alpha}}^{d,e}, i_{F'/F}(\gamma)\big) = \int_{T' \backslash G'} \varepsilon' \circ \det(g) f_{\boldsymbol{\alpha}'}^{d,1}(g^{-1}\gamma g)\, dg.$$

Il reste à remarquer que δ est central dans G' et que pour tout $g \in G'$, on a

$$f_{\boldsymbol{\alpha}'}^{d,1}(g^{-1}\gamma g) = f_{\boldsymbol{\alpha}'}^{0}(g^{-1}\gamma' g).$$

On obtient alors la formule cherchée. ∎

7. **Formules de récurrence pour les germes.** VII 1. Rappelons que l'on a identifié H à un sous-groupe de G. Soit $\gamma \in H$ un élément elliptique G-régulier. On suppose dans tout le paragraphe VII que l'extension $F(\gamma)/F$ (ou $E(\gamma)/E$, cela revient au même) est modérément ramifiée. On peut alors trouver des éléments $\delta, \gamma' \in F(\gamma)^*$ de sorte que

(i) $\gamma = \delta\gamma'$;

(ii) $\gamma' \equiv 1 \bmod \varpi_{F(\gamma)} \mathfrak{o}_{F(\gamma)}$;

(iii) notons $F' = F(\delta)$; alors δ est F'/F-cuspidal.

(Cf. [Ho]). Notons e l'indice de ramification de F'/F, f son degré résiduel, $n' = n/ef$, $r' = r/\operatorname{pgcd}(r,f)$, $f' = f/\operatorname{pgcd}(r,f)$, $m' = n'/r'$ (comme $F(\gamma)$ contient E, r' divise n'). Posons $d = v_{F'}(\delta)$. Remarquons que bien que δ et γ' ne soient pas uniquement déterminés, l'extension F' et les entiers que l'on vient de définir le sont.

Fixons un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
& F(\gamma) \arrow[dl, "\psi_{F(\gamma)/EF'}"'] \arrow[dr, "\psi_{F(\gamma)/E}"] & \\
(EF')^{m'} \arrow[rr, "\psi_{EF'/E}"] \arrow[d, "\psi_{EF'/F'}"'] & & E^m \arrow[d, "\psi_{E/F}"] \\
F'^{n'} \arrow[rr, "\psi_{F'/F}"] & & F^n
\end{tikzcd}$$

On suppose vérifiées les conditions suivantes:

(i) $\psi_{F(\gamma)/E}$, resp. $\psi_{F(\gamma)/EF'}$ etc., est un isomorphisme E-, resp. EF'- etc., linéaire;

(ii) $\psi_{E/F}$ est l'isomorphisme fixé en II 1;

(iii) $\psi_{EF'/F'}$ est construit de façon analogue à $\psi_{E/F}$(cf. II 1);

(iv) $\psi_{F(\gamma)/EF'}$ est compatible aux chaînes de réseaux (cf. VI 1);

enfin, en notant $i_{F(\gamma)/E}$: $F(\gamma)^* \longrightarrow H$, etc., les plongements déduits de $\psi_{F(\gamma)/E}$ etc.

(v) $i_{F(\gamma)/E}(\gamma) = \gamma$;

(rappelons qu'au départ γ était déjà un élément de H). Il est facile de construire un tel diagramme. Les conditions (iii) et (iv) impliquent que le composé $\psi_{EF'/F'} \circ \psi_{F(\gamma)/EF'}$ est compatible aux chaînes de réseaux.

On pose $G' = \mathrm{GL}(n', F')$, $H' = \mathrm{GL}(m', EF')$. Comme en II 1, on identifie H' à un sous-groupe de G' grâce au plongement $i_{EF'/F'}$. On identifie $F(\gamma)^*$ à un sous-groupe de H par $i_{F(\gamma)/E}$, de H' par $i_{F(\gamma)/EF'}$.

VII 2. Posons $a = v_E \circ \det_H(\gamma) = md/e$. On a l'égalité $e = m/\operatorname{pgcd}(m, a)$. La proposition III 4 définit un germe $s^{\varepsilon}_{\boldsymbol{\lambda}}(\gamma)$ pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{\circ}(m/e)$. Mais l'extension EF'/F', les entiers n', r', m' et le caractère $\varepsilon' = \varepsilon \circ N_{F'/F}$ vérifient les mêmes conditions que l'extension E/F, les entiers n, r, m et le caractère ε. Comme $v_{EF} \circ \det_H(\gamma') = 0$, la proposition III 4 définit un germe $s^{\varepsilon'}_{\boldsymbol{\lambda}'}(\gamma')$ pour tout $\boldsymbol{\lambda}' \in \mathcal{P}^{\circ}(m')$.

PROPOSITION. *Sous les hypothèses de VII 1, on a l'égalité*

$$(-1)^{rmd-md/e} \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{\circ}(m/e)} s^{\varepsilon}_{\boldsymbol{\lambda}}(\gamma) y_{\boldsymbol{\lambda}} = \tau_{f'}\Big[\sum_{\boldsymbol{\lambda}' \in \mathcal{P}^{\circ}(m')} s^{\varepsilon'}_{\boldsymbol{\lambda}'}(\gamma') y_{\boldsymbol{\lambda}'}\Big].$$

Cf. I 10 pour la notation $\tau_{f'}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}^{\circ}(m/e)$. Appliquons la formule de la proposition III 4 à la fonction $f^{d,e}_{r\boldsymbol{\alpha}}$. Grâce au lemme V 11, on obtient

$$I^{\varepsilon}_{G}(f^{d,e}_{r\boldsymbol{\alpha}}, \gamma) = \langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, y(\gamma)\rangle,$$

où $y(\gamma)$ est le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé.

Soit $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{P}(m')$. Appliquons la même proposition III 4, mais pour le groupe G', à la fonction $f^{0}_{r'\boldsymbol{\alpha}'}$. On obtient

$$I^{\varepsilon'}_{G'}(f^{0}_{r'\boldsymbol{\alpha}'}, \gamma') = \langle x_{\boldsymbol{\alpha}'}, y'(\gamma')\rangle,$$

où $y'(\gamma')$ est le terme entre crochets du membre de droite de l'égalité de l'énoncé. Le lemme VI 4 implique alors que pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}^{\circ}(m/e)$,

$$\langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, y(\gamma)\rangle = \begin{cases} \langle x_{\boldsymbol{\alpha}'}, y'(\gamma')\rangle, & \text{si } \boldsymbol{\alpha} = f'\boldsymbol{\alpha}', \text{ avec } \boldsymbol{\alpha}' \in \mathcal{P}^{\circ}(m'), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette propriété implique l'égalité $y(\gamma) = \tau_{f'}\big(y'(\gamma')\big)$ (la démonstration est analogue à celle du lemme 5.5 de [W]). ∎

VII 3.

LEMME. *Sous les hypothèses de VII 1, on a l'égalité*

$$(-1)^{(r-1)md}\Delta^{H'}_{G'}(\gamma') = \Delta^{H}_{G}(\gamma).$$

DÉMONSTRATION. On va démontrer:

(i) $\Delta_{G'}^{H',1}(\gamma') = \Delta_G^{H,1}(\gamma)$;

(ii) $(-1)^{(r-1)md}\Delta_{G'}^{H',2}(\gamma') = \Delta_G^{H,2}(\gamma)$.

Soit F_1 une extension de $F(\gamma)$ galoisienne sur F, $n_1 = [F_1 : F(\gamma)]$, $|\,.\,|_1$ la valeur absolue sur F_1. On peut reformuler la définition de $\Delta_G^{H,1}(\gamma)$ de la façon suivante:

$$\Delta_G^{H,1}(\gamma) = \prod_{\sigma,\tau\in\mathrm{Gal}(F_1/F);\sigma_{|E}\neq\tau_{|E}} |(\sigma\gamma - \tau\gamma)/\gamma|_1^{1/2nn_1^3},$$

ou encore

$$\Delta_G^{H,1}(\gamma) = \prod_{\sigma,\tau\in\mathrm{Gal}(F_1/F);\sigma_{|E}\neq 1} |(\sigma\gamma - \gamma)/\gamma|_1^{1/2n_1^2}. \tag{1}$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_1/F)$. Si $\sigma\delta \neq \delta$, on vérifie que $|\sigma\gamma - \gamma|_1 = |\sigma\delta - \delta|_1 = |\delta|_1$. Comme on a aussi $|\gamma|_1 = |\delta|_1$, le facteur correspondant à σ dans le produit ci-dessus vaut 1. Si $\sigma\delta = \delta$, on a $|\sigma\gamma - \gamma|_1 = |\delta|_1|\sigma\gamma' - \gamma'|_1$. On a encore $|\gamma|_1 = |\delta|_1$. Ici $|\gamma'|_1 = 1$, le facteur correspondant à σ vaut $|(\sigma\gamma' - \gamma')/\gamma'|_1$. La condition $\sigma\delta = \delta$ est équivalente à $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_1/F')$. Pour un tel σ, la condition $\sigma_{|E} \neq 1$ est équivalente à $\sigma_{|EF'} \neq 1$. Alors

$$\Delta_G^{H,1}(\gamma) = \prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F_1/F');\sigma_{|EF'}\neq 1} |(\sigma\gamma' - \gamma')/\gamma'|_1^{1/2n_1^2}.$$

En appliquant l'analogue de (1) pour calculer $\Delta_{G'}^{H',1}(\gamma')$, on voit que le membre de droite de l'égalité ci-dessus n'est autre que $\Delta_{G'}^{H',1}(\gamma')$. D'où (i).

Si r est impair, on a aussi r' impair et les deux membres de l'égalité (ii) sont égaux à 1. Supposons r pair. Introduisons F_1 comme ci-dessus, notons e_1 l'indice de ramification de F_1/E, v_1 la valuation sur F_1. On a les égalités:

$$\begin{aligned} v_E\big(r(\gamma,\sigma_+\gamma)\big) &= \sum_{\sigma,\tau\in\mathrm{Gal}(F_1/F);\sigma_{|E}=1,\tau_{|E}=\sigma_+} v_1(\sigma\gamma - \tau\gamma)/e_1n_1^2 \\ &= m \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(F_1/F);\sigma_{|E}=\sigma_+} v_1(\gamma - \sigma\gamma)/e_1n_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_1/F)$. Si $\sigma\delta \neq \delta$, on a comme précédemment $v_1(\gamma - \sigma\gamma) = v_1(\delta - \sigma\delta) = v_1(\delta)$. Si $\sigma\delta = \delta$, on a $v_1(\gamma - \sigma\gamma) = v_1(\delta) + v_1(\gamma' - \sigma\gamma')$. D'où l'égalité

$$v_E\big(r(\gamma,\sigma_+\gamma)\big) = m^2v_1(\delta)/e_1 + m\sum_{\sigma\in S} v_1(\gamma' - \sigma\gamma')/e_1n_1, \tag{3}$$

où $S = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(F_1/F);\ \sigma_{|E} = \sigma_+, \sigma\delta = \delta\}$. On a $v_1(\delta)/e_1 = d/e$, d'où

$$m^2v_1(\delta)/e_1 = m^2d/e = de(m/e)^2 \equiv de(m/e) \bmod 2, \tag{4}$$

i.e. $m^2v_1(\delta)/e_1 \equiv dm \bmod 2$.

On a $S = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(F_1/F'); \sigma_{|_E} = \sigma_+\}$. Si r' est impair, $\mathrm{Gal}(E/E \cap F')$ n'a pas d'élément d'ordre 2, donc σ_+ ne fixe pas $E \cap F'$. *A fortiori* $S = \emptyset$. Donc

$$\Delta_G^{H,2}(\gamma) = (-1)^{v_E\left(r(\gamma,\sigma_+\gamma)\right)} = (-1)^{md},$$

d'après (3) et (4). De plus $\Delta_{G'}^{H',2}(\gamma') = 1$. D'où (ii). Supposons maintenant r' pair. Il y a dans $\mathrm{Gal}(EF'/F')$ un élément σ'_+ d'ordre 2. On vérifie que $S = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(F_1/F');$ $\sigma_{|_{EF'}} = \sigma'_+\}$. Mais alors, en appliquant l'analogue de (2),

$$v_{EF'}\left(r(\gamma',\sigma'_+\gamma')\right) = m' \sum_{\sigma \in S} v_1(\gamma' - r\gamma')e/e_1 n_1.$$

On a $m'e - m/f'$. Comme r' est pair et $\mathrm{pgcd}(r',f') = 1, f'$ est impair, d'où

(5) $$v_{EF'}\left(r(\gamma',\sigma'_+\gamma')\right) \equiv m \sum_{\sigma \in S} v_1(\gamma' - \sigma\gamma')/e_1 n_1.$$

De (3), (4) et (5) résulte la congruence

$$v_E\left(r(\gamma,\sigma_+\gamma)\right) \equiv md + v_{EF'}\left(r(\gamma',\sigma'_+\gamma')\right) \bmod 2.$$

Comme

$$\Delta_G^{H,2}(\gamma) = (-1)^{v_E\left(r(\gamma,\sigma_+\gamma)\right)}, \Delta_{G'}^{H',2}(\gamma') = (-1)^{v_{EF'}\left(r(\gamma',\sigma'_+\gamma')\right)},$$

on obtient (ii), ce qui achève la démonstration. ∎

VII 4. Nous allons modifier les notations de VII 1. Soit toujours $\gamma \in H$ un élément elliptique G-régulier. On suppose encore que l'extension $F(\gamma)/F$ est modérément ramifiée. On suppose maintenant $\gamma \equiv 1 \bmod \varpi_{F(\gamma)}\mathfrak{o}_{F(\gamma)}$ et $n > 1$. On peut alors trouver des éléments $\eta \in F^*, \delta, \gamma' \in F(\gamma)^*$ de sorte que

(i) $\gamma = \eta(1 + \delta\gamma')$;

(ii) $\eta \equiv 1 \bmod \varpi_F \mathfrak{o}_F$, $\gamma' \equiv \bmod \varpi_{F(\gamma)}\mathfrak{o}_{F(\gamma)}$;

(iii) notons $F' \equiv F(\delta)$; alors $F' \not\equiv F$ et δ est F'/F-cuspidal.

Notons e l'indice de ramification de F'/F, posons $d = v_{F'}(\delta)$, $\gamma'' = \delta\gamma'$. Ici encore l'extension F' et l'entier d sont uniquement déterminés.

VII 5. Pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^\circ(m)$, resp. $\boldsymbol{\lambda}'' \in \mathcal{P}^\circ(m/e)$, la proposition III 4 définit des germes $s^\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}}(\gamma)$, $s^\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}''}(\gamma'')$.

PROPOSITION. *Sous les hypothèses de VII 4, on a l'égalité*

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^\circ(m)} s^\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}}(\gamma) y_{\boldsymbol{\lambda}} = q^{n^2 d/2e - n/e} \sum_{\boldsymbol{\lambda}'' \in \mathcal{P}^\circ(m/e)} (-1)^{m - t(\boldsymbol{\lambda}'')} s^\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}''}(\gamma'') x_m(d\boldsymbol{\lambda}'', q^r).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(m)$. On applique la proposition III 4 à la fonction $f^0_{r\boldsymbol{\alpha}}$. Grâce au lemme V 11, on obtient l'égalité

(1) $$I^\varepsilon_G(f^0_{r\boldsymbol{\alpha}}, \gamma) = \langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, y(\gamma) \rangle,$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-049-5 Published online by Cambridge University Press

où $y(\gamma)$ est le membre de gauche de l'égalité de l'énoncé. Appliquons maintenant la proposition III 4 à la fonction $1_{nd/e}f_{r\boldsymbol{\alpha}}$ et à l'élément γ''. Grâce au lemme V 12, on obtient

$$(2) \qquad I_G^\varepsilon(1_{nd/e}f_{r\boldsymbol{\alpha}}, \gamma'') = \langle x_{\boldsymbol{\alpha}}, y''(\gamma'')\rangle,$$

où $y''(\gamma'')$ est le membre de droite de l'égalité de l'énoncé. Mais pour $g \in G$, on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned} f^0_{r\boldsymbol{\alpha}}(g^{-1}\gamma g) &= f^0_{r\boldsymbol{\alpha}}\big(g^{-1}(1+\gamma'')g\big) \\ &= f_{r\boldsymbol{\alpha}}\big(g^{-1}(1+\gamma'')g\big) \\ &= f_{r\boldsymbol{\alpha}}(g^{-1}\gamma'' g) \\ &= (1_{nd/e}f_{r\boldsymbol{\alpha}})(g^{-1}\gamma'' g). \end{aligned}$$

D'où l'égalité

$$(3) \qquad I_G^\varepsilon(f^0_{r\boldsymbol{\alpha}}, \gamma) = I_G^\varepsilon(1_{nd/e}f_{r\boldsymbol{\alpha}}, \gamma'').$$

Comme les $x_{\boldsymbol{\alpha}}$, pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}^\circ(m)$, forment une base de R_m, les égalités (1), (2), (3) démontrent l'égalité $y(\gamma) = y''(\gamma'')$. ∎

VII 6.

LEMME. *Sous les hypothèses de VII 4, on a l'égalité*

$$q^{(n-m)nd/2e}\Delta_G^H(\gamma) = \Delta_G^H(\gamma'').$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que $r(\sigma\gamma, \tau\gamma) = r(\sigma\gamma'', \tau\gamma'')$ pour tous $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(E/F)$. D'autre part $|\det_G\gamma|_F = 1$, $|\det_G\gamma''|_F = |\det_G\delta|_F = q^{-nd/e}$. Le lemme résulte alors immédiatement des définitions II 4. ∎

VII 7. Les propositions VII 2 et VII 5 permettent (en principe...) le calcul par récurrence sur n des germes $s^\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}}(\gamma)$ pour γ elliptique G-régulier, tel que $F(\gamma)/F$ soit modérément ramifiée. Si $n = 1$ (auquel cas $E = F$, $\varepsilon = 1$), on a $s^1_{(1)} = 1$. Supposons $n > 1$ et que l'on connait les germes pour toutes les données F', E', n' etc. comme en II 1 pour lesquelles $n' < n$. Soit $\gamma \in H$ elliptique G-régulier tel que $F(\gamma)/F$ soit modérément ramifiée. Utilisons les notations de VII 1. Disons que γ est du type I si $F' \neq F$. Dans ce cas, la proposition VII 2 calcule les germes $s^\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}}(\gamma)$ en fonction de germes connus par l'hypothèse de récurrence. Supposons maintenant $\gamma \equiv 1 \bmod \varpi_{F(\gamma)}o_{F(\gamma)}$. Dans ce cas la proposition VII 5 calcule les germes $s^\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}}(\gamma)$ en fonction de germes $s^\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}''}(\gamma'')$ où γ'' est du type I. Ces germes sont connus d'après ce que l'on vient de dire. Reste le cas où γ n'est pas du type I, $ni \equiv 1 \bmod \varpi_{F(\gamma)}o_{F(\gamma)}$. Dans ce cas, la proposition VII 2 calcule les germes $s^\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}}(\gamma)$ en fonction de germes $s^\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}'}(\gamma')$, où $\gamma' \equiv 1 \bmod \varpi_{F(\gamma')}o_{F(\gamma')}$. Ces derniers sont connus d'après ce que l'on vient de dire.

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-049-5 Published online by Cambridge University Press

8. **Le lemme fondamental.**

VIII 1. Nous noterons maintenant $s^{\varepsilon}_{\boldsymbol{\lambda},G}$ les germes notés précédemment $s^{\varepsilon}_{\boldsymbol{\lambda}}$. En appliquant les définitions au cas $E = F$, on définit des germes $s^{1}_{\boldsymbol{\lambda},H}$, ou plus simplement $s_{\boldsymbol{\lambda},H}$. Pour $\gamma \in H$ elliptique régulier, tel que $E(\gamma)/E$ soit modérément ramifiée, les germes $s_{\boldsymbol{\lambda},H}(\gamma)$ se déterminent eux aussi par récurrence.

PROPOSITION. *Soient $a \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in H$. Supposons γ elliptique G-régulier, $v_E \circ \det_H(\gamma) = a$ et $F(\gamma)/F$ modérément ramifiée. Posons $e = m/\operatorname{pgcd}(m,a)$. Alors pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{\circ}(m/e)$, on a l'égalité*

$$\Delta^{H}_{G}(\gamma)s^{\varepsilon}_{\boldsymbol{\lambda},G}(\gamma) = s_{\boldsymbol{\lambda},H}(\gamma).$$

DÉMONSTRATION. D'après VII 7, un raisonnement par récurrence nous ramène à démontrer la proposition pour $n = 1$, ce qui n'est pas fatigant, et à démontrer les deux assertions suivantes:

(i) dans la situation de VII 1, supposons que pour tout $\boldsymbol{\lambda}' \in \mathcal{P}^{\circ}(m')$, on ait l'égalité

$$\Delta^{H'}_{G'}(\gamma)s^{\varepsilon'}_{\boldsymbol{\lambda}',G'}(\gamma') = s_{\boldsymbol{\lambda}',H'}(\gamma').$$

Alors pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{\circ}(m/e)$, on a l'égalité de l'énoncé au point γ;

(ii) dans la situation de VII 4, supposons que pour tout $\boldsymbol{\lambda}'' \in \mathcal{P}^{\circ}(m/e)$, on ait l'égalité

$$\Delta^{H}_{G}(\gamma'')s^{\varepsilon}_{\boldsymbol{\lambda}'',G}(\gamma'') = s_{\boldsymbol{\lambda}'',H}(\gamma'');$$

alors pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{\circ}(m)$, on a l'égalité de l'énoncé au point γ;

Démontrons (i). Notons A_1, resp. A_2, le membre de gauche, resp. de droite, de l'égalité de l'énoncé de la proposition VII 2. Appliquons cette même proposition au cas $E = F$. On obtient l'égalité $B_1 = B_2$, où

$$B_1 = (-1)^{md-md/e} \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}^{\circ}(m/e)} s_{\boldsymbol{\lambda},H}(\gamma)y_{\boldsymbol{\lambda}}, \quad B_2 = \tau_{f'}\Big[\sum_{\boldsymbol{\lambda}'\in\mathcal{P}^{\circ}(m')} s_{\boldsymbol{\lambda}',H}(\gamma')y_{\boldsymbol{\lambda}'}\Big].$$

L'hypothèse de (i) implique l'égalité

$$\Delta^{H'}_{G'}(\gamma')A_2 = B_2,$$

d'où

$$\Delta^{H'}_{G'}(\gamma')A_1 = B_1,$$

et, d'après l'indépendance linéaire des $y_{\boldsymbol{\lambda}}$:

$$(-1)^{(r-1)md}\Delta^{H'}_{G'}(\gamma')s^{\varepsilon}_{\boldsymbol{\lambda},G}(\gamma) = s_{\boldsymbol{\lambda},H}(\gamma)$$

pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}^{\circ}(m/e)$. En utilisant le lemme VII 3, on obtient l'égalité cherchée.

La démonstration de (ii) est analogue. ∎

VIII 2. Soit $f \in \mathcal{H}^{K}_{G}$. On définit $\hat{f}$ (cf. I 5), puis $\hat{b}\hat{f} \in \mathbb{C}[Y_1,\dots,Y_m,Y_1^{-1},\dots,Y_m^{-1}]^{\mathfrak{S}_m}$, cf. II 3. Pour $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m)$, on définit $\Gamma^{\boldsymbol{\lambda}}(\hat{b}\hat{f}) \in \mathbb{C}[Y_1,\dots,Y_m,Y_1^{-1},\dots,Y_m^{-1}]$ (cf. I 11). On construit un élément de $\mathbb{C}[Y,Y^{-1}]$ en évaluant $\Gamma^{\boldsymbol{\lambda}}(\hat{b}\hat{f})$ au point $Ys_{\boldsymbol{\lambda}}(q^r)$. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $c_a\Big[\Gamma^{\boldsymbol{\lambda}}(\hat{b}\hat{f})\big(Ys_{\boldsymbol{\lambda}}(q^r)\big)\Big]$ le coefficient de Y^a dans le développement de l'élément obtenu.

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-049-5 Published online by Cambridge University Press

LEMME. *Soient* $f \in \mathcal{H}_G^K$ *et* $a \in \mathbb{Z}$. *Posons* $e = m/\operatorname{pgcd}(a,m)$. *Pour tout* $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m/e)$, *on a l'égalité*

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}}(1_{ar}1_{c}f) = (-1)^{m-t(\boldsymbol{\lambda})}c_a\Big[\Gamma^{e\boldsymbol{\lambda}}(\hat{b}\hat{f})\big(Ys_{e\boldsymbol{\lambda}}(q^r)\big)\Big].$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $\boldsymbol{\lambda} = (m/e)$. Introduisons une variable Y et la fonction f^Y définie par $f^Y(g) = Y^{v\circ\det(g)}f(g)$. On a l'égalité

$$(1) \qquad \operatorname{trace} A^{\varepsilon}_m \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_m(1_{ar}1_c f) = c_{ar}\big(\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_m \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_m(1_c f^Y)\big).$$

Nous allons utiliser le lemme III 5. Fixons $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_t) \in \mathcal{P}(m)$. On doit calculer:

$$B_{\boldsymbol{\mu}} = \operatorname{trace}\Big(\bigotimes_{j=1}^{t} A^{\varepsilon}_{\mu_j} \circ |\,.\,|^{\mu_j^*}\,\mathrm{St}^{\varepsilon}_{\mu_j}\Big)(\hat{\chi}_{r\boldsymbol{\mu}}f^{Y,P(r\boldsymbol{\mu})}).$$

Introduisons des variables $Y_1, \dots, Y_t$, la fonction $f^{P(r\boldsymbol{\mu}),Y}$ sur $L(r\boldsymbol{\mu})$ définie par

$$f^{P(r\boldsymbol{\mu}),Y}(\ell_1, \dots, \ell_t) = \Big(\prod_{j=1}^{t} Y^{v\circ\det(\ell_j)}\Big)f^{P(r\boldsymbol{\mu})}(\ell_1, \dots, \ell_t),$$

et le polynôme

$$P(Y) = \operatorname{trace}\Big(\bigotimes_{j=1}^{t} A^{\varepsilon}_{\mu_j} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{\mu_j}\Big)(f^{P(r\boldsymbol{\mu}),Y}).$$

Introduisons également le polynôme $\Gamma_{\boldsymbol{\mu}}P$ (cf. I 11). De la définition de $\hat{\chi}_{r\boldsymbol{\mu}}$ résulte l'égalité

$$B_{\boldsymbol{\mu}} = (\Gamma_{\boldsymbol{\mu}}P)(Yq^{-\boldsymbol{\mu}_1^*}, \dots, Yq^{-\boldsymbol{\mu}_t^*}).$$

Calculons P. D'après V 6, on a

$$P(Y) = \operatorname{trace}\Big(\bigotimes_{j=1}^{t} \mathrm{St}^{\varepsilon}_{\mu_j}\Big)(f^{P(r\boldsymbol{\mu}),Y}).$$

Introduisons la partition $\boldsymbol{\nu} \in P(n)$ suivante

$$\boldsymbol{\nu} = (\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{r}, \dots, \underbrace{\mu_t, \dots, \mu_t}_{r}).$$

Introduisons des variables $X_1, \dots, X_{rt}$, la fonction $f^{P(\boldsymbol{\nu}),X}$ analogue de $f^{P(r\boldsymbol{\mu}),Y}$, et le polynôme

$$Q(X) = \operatorname{trace}\Big(\bigotimes_{i=1}^{tr} \mathrm{St}_{\nu_i}\Big)(f^{P(\boldsymbol{\nu}),X}).$$

Posons $X(Y) = \big(Y_1, \varepsilon(\varpi)Y_1, \dots, \varepsilon(\varpi)^{r-1}Y_1, Y_2, \dots, \varepsilon(\varpi)^{r-1}Y_t\big)$. On a l'égalité $P(Y) = Q\big(X(Y)\big)$. Comme $f^{P(\boldsymbol{\nu}),X}$ est biinvariante par $K_{L(\boldsymbol{\nu})}$ et que $\otimes_{i=1}^{tr}\mathrm{St}_{\nu_i}$ n'a pas de vecteur invariant par ce groupe sauf si tous les ν_i sont égaux à 1, on a $Q = 0$ si cette dernière condition n'est pas vérifiée. Supposons-la vérfiée. Alors $\boldsymbol{\nu} = (1)^n$, $\boldsymbol{\mu} = (1)^m$. On a

$$Q(X) = \hat{f}(X_1, \dots, X_n),$$

d'où

$$Q\big(X(Y)\big) = \hat{b}\hat{f}(Y_1^r, \dots, Y_m^r).$$

Remarquons que pour $\boldsymbol{\mu} = (1)^m$, $\Gamma_{\boldsymbol{\mu}} = \Gamma^{(m)}$ (cf. I 11) et

$$(q^{-\mu_1^*}, \dots, q^{-\mu_t^*}) = s_{(m)}(q).$$

On obtient alors

$$B_{\boldsymbol{\mu}} = \begin{cases} \Gamma(m)(\hat{b}\hat{f})\big(Y^r s_{(m)}(q^r)\big), & \text{si } \boldsymbol{\mu} = (1)^m, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De (1) et du lemme III 5, on déduit l'égalité

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{trace} A_m^\varepsilon \circ \mathrm{St}_m^\varepsilon(1_{ar} 1_c f) = (-1)^{m-1} c_a\Big[\Gamma^{(m)}(\hat{b}\hat{f})\big(Y s_{(m)}(q^r)\big)\Big].$$

Passons au cas général. Posons $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, $P = P(re\boldsymbol{\lambda})$. Pour $j \in \{1, \dots, t\}$, posons $G_j = \mathrm{GL}(re\lambda_j, F)$. On peut décomposer f^P sous la forme:

$$f^P = \sum_{z \in Z} \bigotimes_{j=1}^{t} f_{z,j},$$

où Z est un ensemble fini et, pour tous j, z, $f_{z,j} \in \mathcal{H}_{G_j}^K$. Alors

$$\operatorname{trace} A_{e\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{e\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon(1_{ar} 1_c f) = \sum_{z \in Z} \prod_{j=1}^{t} \operatorname{trace} A_{e\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{e\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon(1_{are\lambda_j/m} 1_c f_{z,j}).$$

D'après (2), on obtient

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{trace} A_{e\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon \circ \mathrm{St}_{e\boldsymbol{\lambda}}^\varepsilon(1_{ar} 1_c f) = (-1)^{m-t} \sum_{z \in Z} \prod_{j=1}^{t} c_{ae\lambda_j/m}\Big[\Gamma^{(e\lambda_j)}(\hat{b}\hat{f}_{z,j})\big(Y s_{(e\lambda_j)}(q^r)\big)\Big].$$

On montre aisément le résultat suivant: pour $j \in \{1, \dots, t\}$, soit $P_j \in \mathbb{C}\big[[Y_1, \dots, T_{e\lambda_j}]\big]_{\mathrm{loc}}$ (cf. I 11), et $s_j = (s_{j,1}, \dots, s_{j,e\lambda_j}) \in \mathbb{C}^{*e\lambda_j}$; introduisons les éléments $[P_1 \cdots P_t] \in \mathbb{C}\big[[Y_1, \dots, Y_m]\big]_{\mathrm{loc}}$ et $[s_1 \cdots s_t] \in \mathbb{C}^{*m}$ définis par

$$[P_1 \cdots P_t](Y_1, \dots, Y_m) = P_1(Y_1, \dots, Y_{e\lambda_1}) P_2(Y_{e\lambda_1+1}, \dots) \dots P_t(\dots, Y_m),$$
$$[s_1 \cdots s_t] = (s_{1,1}, \dots, s_{1,e\lambda_1}, s_{2,1}, \dots, s_{t,e\lambda_t}).$$

Alors on a l'égalité

$$c_a\Big(\Gamma^{e\boldsymbol{\lambda}}[P_1 \cdots P_t](Y[s_1 \cdots s_t])\Big) = \prod_{j=1}^{t} c_{ae\lambda_j/m}\Big(\Gamma^{(e\lambda_j)} P_j(Y s_j)\Big).$$

Appliquons cette formule à la relation (3). On vérifie que

$$\sum_{z \in Z} [\hat{b}\hat{f}_{z,1} \cdots \hat{b}\hat{f}_{z,t}] = \hat{b}\hat{f},$$
$$[s_{(e\lambda_1)}(q^r) \cdots s_{(e\lambda_t)}(q^r)] = s_{e\boldsymbol{\lambda}}(q^r).$$

On obtient alors l'égalité de l'énoncé. ∎

VIII 3.

COROLLAIRE. *Soient* $f \in \mathcal{H}_G^K$ *et* $a \in \mathbb{Z}$. *Posons* $e = m/\operatorname{pgcd}(a,m)$. *Pour tout* $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m/e)$, *on a l'égalité*

$$\operatorname{trace} A^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathrm{St}^{\varepsilon}_{e\boldsymbol{\lambda}}(1_{ar}1_c f) = \operatorname{trace} \mathrm{St}_{e\boldsymbol{\lambda}}\big(1_a 1_c(bf)\big).$$

Cf. II 3 pour la définition de bf.

DÉMONSTRATION. Le premier membre est calculé par le lemme précédent. Le second aussi, en l'appliquant au cas $E = F$. ∎

VIII 4.

PROPOSITION. *Soient* $f \in \mathcal{H}_G^K$, $\gamma \in H$. *Supposons* γ *elliptique G-régulier et* $F(\gamma)/F$ *modérément ramifiée. Alors on a l'égalité*

$$\Delta_G^H(\gamma) I_G^{\varepsilon}(f,\gamma) = I_H(bf,\gamma).$$

DÉMONSTRATION. On calcule les deux membres par la formule de la proposition III 4. On compare les formules obtenues à l'aide de la proposition VIII 1 et du corollaire VIII 3. ∎

VIII 5.

THÉORÈME. *Soient* $f \in \mathcal{H}_G^K$, $\gamma \in H$. *Supposons* γ *semi-simple G-régulier. Supposons que l'algèbre* $F(\gamma)$ *est un produit d'extensions modérément ramifiées de F. Alors on a l'égalité*

$$\Delta_G^H(\gamma) I_G^{\varepsilon}(f,\gamma) = I_H(bf,\gamma).$$

DÉMONSTRATION. Les deux membres de l'égalité sont invariants par conjugaison sous H. On peut supposer qu'il existe une partition $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(m)$ telle que $\gamma \in L_H(\boldsymbol{\lambda})$ et que γ soit elliptique dans $L_H(\boldsymbol{\lambda})$. Posons $L = L_G(r\boldsymbol{\lambda})$, $P = P_G(r\boldsymbol{\lambda})$, $M = L_H(\boldsymbol{\lambda})$, $Q = P_H(\boldsymbol{\lambda})$. D'après II 1, $M \subset L$ et ces deux groupes vérifient des conditions analogues à H et G. Notons $c'_1, \ldots, c'_n$ les valeurs propres de γ, vu comme élément de G, dans une extension convenable de F. Posons

$$\Delta_G(\gamma) = \left|\prod_{i\neq j}(c'_i - c'_j)\right|_F^{1/2} |\det_G(\gamma)|_F^{(1-n)/2}.$$

On définit de façon analogue $\Delta_H(\gamma)$ etc. On a les formules:

$$\Delta_H(\gamma) I_H(bf,\gamma) = \Delta_M(\gamma) I_M\big((bf),\gamma\big)$$
$$\Delta_G(\gamma) I_G^{\varepsilon}(f,\gamma) = \Delta_L(\gamma) I_L^{\varepsilon}(f^P,\gamma).$$

On a aussi $(bf)^Q = b(f^P)$. D'après la proposition VIII 4 (généralisée à un produit de groupes linéaires), on a

$$\Delta_L^M(\gamma)I_L^\varepsilon(f^P,\gamma) = I_M\big(b(f^P),\gamma\big).$$

Le théorème résulte alors de l'égalité

$$\Delta_G(\gamma)\Delta_M(\gamma)\Delta_L^M(\gamma) = \Delta_H(\gamma)\Delta_L(\gamma)\Delta_G^H(\gamma) \tag{1}$$

que nous allons démontrer. Notons $c_1,\dots,c_m$ les valeurs propres de γ, vu comme élément de H. Pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$, fixons un relèvement $\bar\sigma$ de σ à la clôture algébrique de F. On a l'égalité

$$\big\{c_i';\ i\in\{1,\dots,n\}\big\} = \big\{\bar\sigma c_i;\ i\in\{1,\dots,m\},\ \sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)\big\}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\big\{(c_i',c_j');\ i,j\in\{1,\dots,n\},\ i\neq j\big\} = {}&\\ &\big\{\bar\sigma c_i,\bar\tau c_j);\ i,j\in\{1,\dots,m\},\ \sigma,\tau\in\mathrm{Gal}(E/F),\ \sigma\neq\tau\big\}\\ &\cup\big\{\bar\sigma c_i,\bar\sigma c_j);\ i,j\in\{1,\dots,m\},\ i\neq j,\ \sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)\big\};\end{aligned}$$

De cette décomposition se déduit l'égalité

$$\Delta_G(\gamma) = \Delta_G^{H,1}(\gamma)\Delta_H(\gamma). \tag{2}$$

De même, on a

$$\Delta_L(\gamma) = \Delta_L^{M,1}(\gamma)\Delta_M(\gamma).$$

Posons $\boldsymbol\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_t)$ et $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_t)$ avec $\gamma_j\in\mathrm{GL}(\lambda_j,E)$ pour tout j. Soient $i,j\in\{1,\dots,t\}$, notons $(c_{i,k})_{1\le k\le\lambda_i}$, resp. $(c_{j,\ell})_{1\le\ell\le\lambda_j}$ les valeurs propres de γ_i, resp. γ_j. Posons

$$r(\gamma_i,\gamma_j) = \prod_{k=1}^{\lambda_i}\prod_{\ell=1}^{\lambda_j}(c_{i,k}-c_{j,\ell}).$$

Cette définition coïncide avec celle de II 4 si $\lambda_i = \lambda_j$. Supposons r pair. On voit alors que

$$r(\gamma,\sigma_+\gamma) = \prod_{i,j=1}^{t} r(\gamma_i,\sigma_+\gamma_j) = \Big(\prod_{i=1}^{t} r(\gamma_i,\sigma_+\gamma_i)\Big)\Big(\prod_{i\neq j} r(\gamma_i,\sigma_+\gamma_j)\Big).$$

On a $v_E\big(r(\gamma_i,\sigma_+\gamma_j)\big) = v_E\big(r(\gamma_j,\sigma_+\gamma_i)\big)$, donc la valuation du deuxième produit est paire. Alors

$$\Delta_G^{H,2}(\gamma) = (-1)^{v_E\left(r(\gamma,\sigma_+\gamma)\right)} = \prod_{i=1}^{t}(-1)^{v_E\left(r(\gamma_i,\sigma_+\gamma_i)\right)} = \Delta_L^{M,2}(\gamma). \tag{4}$$

Cette égalité est triviale si r est impair. De (2), (3) et (4) se déduit (1), ce qui achève la démonstration. ∎

https://doi.org/10.4153/CJM-1991-049-5 Published online by Cambridge University Press

RÉFÉRENCES

[BDKV] J. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, M-F. Vignéras, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*. Hermann, Travaux en cours, Paris, 1984.

[BZ] J. Berstein, A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p-adic groups I*, Ann. Sc. ENS **10** (1977), 441–472.

[Ca] H. Carayol, *Représentations cuspidales du groupe linéaire*, Ann. Sc. ENS **17**(1984).

[Cl] L. Clozel, *The fundamental lemma for stable base change*, prépublication.

[Ha] T. Hales, *Unipotent representations and unipotent classes in SL(n)*, prépublication.

[He] G. Henniart, *On the local Langlands conjecture for* GL(n)*: the cyclic case*, Annals of Math. **123**(1986), 145–203.

[Ho] R. Howe, *Tamely ramified supercuspidal representations of* GL_n, Pac. J. of Math. **73**(1977), 437–460.

[K1] D. Kazhdan, *On lifting, in Lie group representations II*, Springer LN **1041**(1984), 209–249.

[K2] D. Kazhdan, *Cuspidal geometry of p-adic groups*, J. d'Analyse Math. **47**(1986), 1–36.

[LL] J-P. Labesse, R. P. Langlands, *L-indistinguishability for SL*(2), Can. J. Math. **31**(1979), 726–785.

[L] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. AMS.

[W] J-L. Waldspurger, *Sur les germes de Shalika pour les groupes linéaires*, Math. Annalen **283**(1989), 199–221.

[Z] A. V. Zelevinsky, *Representations of finite classical groups*, Springer LN **869**(1981).

Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques
2, place Jussieu
Tour 45/55–5ième étage
75251 Paris cedex 05
France