Can. J. Math. Vol. **50** (5), 1998 pp. 1090–1104.

SUR LES TRANSFORMÉES DE RIESZ SUR LES GROUPES DE LIE MOYENNABLES ET SUR CERTAINS ESPACES HOMOGÈNES

NOËL LOHOUÉ ET SAMI MUSTAPHA

RÉSUMÉ. Let Δ be a left invariant sub-Laplacian on a Lie group G and let ∇ be the associated gradient. In this paper we investigate the boundness of the Riesz transform $\nabla\Delta^{-1/2}$ on Lie groups G which are amenable and with exponential volume growth and on certain homogenous spaces.

1. **Introduction.** Soit G un groupe de Lie réel connexe non-nécessairement unimodulaire et soit $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur G vérifiant la condition de Hörmander (*cf.* [18]). Soit $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-Laplacien associé au système X. On note $dg = d^l g$ (resp.: $d^r g$) la mesure de Haar invariante à gauche (resp.: à droite) sur G et $\delta(g) = d^r g/d^l g$ la fonction module sur G normalisée par $\delta(e) = 1$, où e désigne l'élément identité de G. Le sous-Laplacien Δ est formellement auto-adjoint sur l'espace $L^2(G, d^r g)$ associé à la mesure de Haar invariante à droite et l'opérateur $\tilde{\Delta} = \delta^{1/2}\Delta\delta^{-1/2}$ est auto-adjoint sur l'espace $L^2(G, d^l g)$ associé à la mesure de Haar invariante à gauche. On note $\nabla f = (X_1 f, \ldots, X_k f)$ et $\tilde{\nabla} = \delta^{1/2}\nabla\delta^{-1/2}$. Il y a trois manières naturelles d'étudier le problème de la transformée de Riesz dans le cas où le groupe G est non-unimodulaire.

On peut considérer:

(i) L'action de la transformée de Riesz invariante à gauche $\nabla\Delta^{-1/2}$ sur les espaces $L^p(G, d^r g)$ associés à la mesure de Haar sur G invariante à droite,

(ii) l'action de la transformée de Riesz $\tilde{\nabla}\tilde{\Delta}^{-1/2}$ sur les espaces $L^p(G, d^l g)$ associés à la mesure de Haar sur G invariante à gauche,

(iii) l'action de la transformée de Riesz invariante à gauche $\nabla\Delta^{-1/2}$ sur les espaces $L^p(G, d^l g)$ associés à la mesure de Haar sur G invariante à gauche.

Remarquons que dans les cas (i) et (ii) la puissance $\Delta^{-1/2}$ est définie par le théorème spectral et que la bornitude au niveau $p = 2$ s'obtient d'une manière formelle. Le problème (i) est l'analogue de la transformée de Riesz étudiée par Sögren *et al.* dans le contexte du groupe affine $\{ax + b\}$ (*cf.* [5], [13]) et (ii) est le problème de Riesz pour le Laplacien naturel de la Théorie de Hardy-Littlewood (*cf.* [16]). Pour le problème (iii), l'opérateur Δ n'étant pas auto-adjoint sur l'espace de Hilbert $L^2(G, d^l g)$, sa bornitude au niveau $p = 2$ n'est plus acquise. La puissance négative $\Delta^{-1/2}$ se définit dans ce cas par le semi-groupe $\exp(-t\Delta)$ via la formule

$$\Delta^{-1/2} = c\int_0^\infty t^{-1/2}\exp(-t\Delta)\,dt. \tag{1}$$

Reçu par les éditeurs le 18 septembre, 1997.
Classification (AMS) par sujet : 22E30, 35H05, 43A80, 43A85.

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-052-9 Published online by Cambridge University Press

Remarquons qu'on peut aussi étudier des transformées de Riesz partielles, *i.e.*, $X_j\Delta^{-1/2}$ dans les trois contextes précédents.

Si G est unimodulaire (*i.e.*, si la fonction module est triviale) ces trois manières coincident. Dans ce contexte la bornitude de la transformée de Riesz a été établie dans les cas suivants:

- Pour les groupes de Lie nilpotents (N. Lohoué et N. Th. Varopoulos, *cf.* [11]).
- Plus généralement pour les groupes de Lie à croîssance polynômiale du volume (G. Alexopoulos, *cf.* [1]—des résultats partiels ont été aussi obtenus par L. Saloff-Coste, *cf.* [12]).
- Pour les groupes de Lie unimodulaires non-moyennables (N. Lohoué, *cf.* [7]).

Pour les groupes unimodulaires moyennables à croîssance exponentielle du volume aucun résultat n'est connu. Enfin pour les groupes non-unimodulaires des résultats partiels ont été obtenus par Sögren *et al.* dans le contexte du groupe affine (cf. [5], [13]).

Le point de départ de ce travail a été de reprendre les idées de [7] qui utilisent la non-moyennabilité de G (qui se traduit par une décroissance exponentielle du noyau de la chaleur) combinée avec le principe de Harnack pour contourner les difficultés liées à la croissance exponentielle du volume sur G. Nous montrons notamment dans la section 2 que dans le cas des groupes de Lie unimodulaires moyennables à croîssance exponentielle du volume la transformée de Riesz est bornée de l'espace L^p dans un espace d'Orlicz convenable L_{Ψ_p} pour tout $1 < p < \infty$. Dans la section 3 nous donnons des résultats négatifs concernant les transformées de Riesz (ii) et (iii) dans le cas non-unimodulaire moyennable. Enfin nous consacrons la section 4 à l'étude de la transformée de Riesz sur certains espaces homogènes non-moyennables.

2**. Transformée de Riesz et espaces d'Orlicz.** La bornitude de la transformée de Riesz dans le cas des groupes à croîssance polynomiale du volume (*cf.* [1], [12]) repose sur le fait que ces groupes constituent des espaces de type homogène au sens de Coifman-Weiss (*cf.* [3]) et l'utilisation de la théorie des intégrales singulières dans ces espaces.

Les groupes à croîssance exponentielle du volume ne constituent pas des espaces de type homogène. Pour contourner cette difficulté on peut utiliser les propriétés de bornitude $L^p \longrightarrow L^q$ des puissances fractionnaires du sous-Laplacien et le principe de Harnack. Pour pouvoir énoncer les estimations en question nous avons besoin de fixer quelques notations.

Soit G un groupe de Lie connexe unimodulaire de croissance exponentielle du volume et $\mathcal{X} = \{X_j, j = 1, \ldots, k\}$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur G vérifiant la condition de Hörmander. A un tel système on peut associer d'une manière canonique une distance sur G. Cette distance $d(.,.)$ est invariante à gauche et compatible avec la topologie de G. Pour $g \in G$ on note $|g|_X = d(e, g)$ et pour $r > 0$ on note $B(r) = \{x \in G, |x|_X \leq r\}$. Il existe alors un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Vol}[B(r)] \sim r^d$, $r \longrightarrow 0$. Cet entier dépend de G et du système de Hörmander $\mathcal{X}$ et il est appelé dimension locale de G. Il existe aussi une constante $\gamma > 0$ telle que $\mathrm{Vol}[B(r)] \leq \exp(\gamma r), r > 0$.

Soit $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-Laplacien associé un système de Hörmander sur G. Alors (*cf.* [18] Théorème VIII.4.2) pour tout $1 < p < \infty$ et $\alpha > 0$ tels que $\alpha p < d$ l'opérateur $\Delta^{-\alpha/2}$ est borné de $L^p(G, dg)$ dans $L^q(G, dg)$ pour tout $q \in \left]p, \frac{dp}{d-\alpha p}\right]$. Ceci signifie que si $\alpha = 1$ alors

$$\|\Delta^{-1/2} f\|_{L^q(G,dg)} \leq C\|f\|_{L^p(G,dg)}$$

pour $q \in \left]p, \frac{dp}{d-p}\right]$ et $p < d$. En utilisant essentiellement le principe de Harnack parabolique (*cf.* la suite pour les détails) on peut alors déduire que pour tout $q > p$ suffisamment proche de p

$$\|X_j \Delta^{-1/2} f\|_{L^q(G,dg)} \leq C\|f\|_{L^p(G,dg)} \tag{2}$$

i.e. la bornitude de la transformée de Riesz de L^p dans L^q pour $q > p$ aussi proche de p que l'on veut.

Nous allons commencer par améliorer cette estimation et établir une estimation L^p—L^p en introduisant des poids à décroissance exponentielle.

THÉORÈME 1. *Soit G un groupe de Lie réel connexe unimodulaire de croissance exponentielle du volume, $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-Laplacien associé un système de Hörmander comme ci-dessus, et ∇ le gradient qui lui correspond. Alors pour tout $p > 1$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $C(\epsilon, p) > 0$ telle que*

$$\|e^{-\epsilon|g|} \nabla \Delta^{-1/2} f\|_{L^p(G,dg)} \leq C(\epsilon, p)\|f\|_{L^p(G,dg)}, \quad f \in C_0^\infty(G).$$

Il est facile de voir que la même preuve donne aussi l'estimation

$$\|\nabla \Delta^{-1/2} f\|_{L^p(G,dg)} \leq C(\epsilon, p)\|e^{\epsilon|g|} f\|_{L^p(G,dg)}, \quad f \in C_0^\infty(G).$$

Précisons que $\|\nabla f\|_{L^p(G,dg)}$ est par définition:

$$\|\nabla f\|_{L^p(G,dg)} = \left[\int_G \left(\sum |X_j f(g)|^2\right)^{p/2} dg\right]^{1/p}.$$

Pour la preuve du Théorème 1 nous allons utiliser la proposition suivante dont la preuve est une adaptation facile de celle du Théorème VIII.4.2 de [18].

PROPOSITION 1. *Soit G un groupe de Lie réel connexe unimodulaire de croissance exponentielle du volume et soit $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-Laplacien associé un système de Hörmander sur G et $T_t = e^{-t\Delta}$, $t > 0$, le semi-groupe qui lui associé. Notons $\Delta_{\alpha,\infty} = c\int_1^\infty t^{\alpha/2-1} T_t\, dt$. Alors pour tout $1 < p < \infty$ et $\alpha > 0$ l'opérateur $\Delta_{\alpha,\infty}$ est borné de $L^p(G, dg)$ dans $L^q(G, dg)$ pour tout $q > p$.*

PREUVE DU THÉORÈME 1. Pour $f \in C_0^\infty(G)$, écrivons

$$\begin{aligned} e^{-\epsilon|g|} \nabla \Delta^{-1/2} f &= c e^{-\epsilon|g|} \int_0^\infty t^{-1/2} \nabla T_t f\, dt \\ &= c e^{-\epsilon|g|} \int_0^1 t^{-1/2} \nabla T_t f\, dt \\ &\quad + c e^{-\epsilon|g|} \int_1^\infty t^{-1/2} \nabla T_t f\, dt \\ &= e^{-\epsilon|g|} R_0 f \;+ e^{-\epsilon|g|} R_\infty f, \end{aligned}$$

Il est facile de voir (*cf.* les détails dans la preuve du théorème suivant) que la partie locale R_0 vérifie l'estimation

$$\|e^{-\epsilon|g|}R_0 f\|_p \leq \|R_0 f\|_p \leq C_1\|f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(G)$$

pour une constante $C_1 > 0$.

Pour estimer la contribution de R_∞ observons d'abord que la fonction de répartition de la fonction $\varphi_\epsilon(g) = \exp(-\epsilon|g|)$, $g \in G$, vérifie

$$\operatorname{mes}\big[\varphi_\epsilon(g) > \lambda\big] = \operatorname{mes}\Big[g \in G, |g| \leq \frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\lambda}\Big] \leq \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^{\frac{\gamma}{\epsilon}},$$

pour tout $0 < \lambda \leq 1$. D'où l'on déduit que

$$e^{-\epsilon|g|} \in L^{\frac{2\gamma}{\epsilon}}(G, dg). \tag{3}$$

Il résulte alors de (3) que

$$\|e^{-\epsilon|g|}R_\infty f\|_p \leq \|e^{-\epsilon|g|}\|_{\frac{2\gamma}{\epsilon}}\|R_\infty f\|_q \tag{4}$$

où l'indice q est donné par

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\epsilon}{2\gamma}. \tag{5}$$

Le noyau de l'opérateur R_∞ est est donné par $c\int_1^\infty t^{-1/2}\nabla\phi_t(g)\,dt$ où $\phi_t(g)$ est le noyau du semi-groupe T_t et par le principe de de Harnack parabolique local (*cf.* [18]) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\Big|c\int_1^\infty t^{-1/2}\nabla\phi_t(g)\,dt\Big| &\leq c\int_1^\infty t^{-1/2}|\nabla\phi_t(g)|\,dt\\ &\leq C\int_1^\infty t^{-1/2}\phi_{t+1}(g)\,dt\\ &\leq C'\int_1^\infty t^{-1/2}\phi_t(g)\,dt.\end{aligned}$$

D'où

$$\|R_\infty f\|_q \leq C'\|\Delta_{1/2,\infty}(|f|)\|_q.$$

Mais par la proposition 1 on a

$$\|\Delta_{1/2,\infty} f\|_q \leq C''\|f\|_p. \tag{6}$$

et par conséquent

$$\|R_\infty f\|_q \leq C'''\|f\|_p.$$

Il suffit alors d'utiliser (4) pour conclure.

La preuve précédente repose essentiellement sur le principe de Harnack et l'estimation (6) qui découle du résultat général sur les puissances fractionnaires négatives du sous-Laplacien Δ donné dans la proposition 1. Ce résultat est lui même une conséquence de la décroîssance en $\exp(-ct^{1/3})$ du noyau de la chaleur sur les groupes unimodulaires moyennables à volume exponentiel. En remontant à cette estimation on peut améliorer l'estimation (6)—en utilisant des espaces d'Orlicz convenables (*cf.* [20] pour la définition de ces espaces) et obtenir le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit G un groupe de Lie réel connexe unimodulaire de croissance exponentielle du volume et $\{X_j, j = 1, \ldots, k\}$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur G vérifiant la conditon de Hörmander. Soit $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-Laplacien associé à ce système. Alors pour tout $1 \leq j \leq k$ et pour tout $p > 1$*

$$X_j \Delta^{-1/2} \colon L^p \longrightarrow L_{\Psi_p}$$

où L_{Ψ_p} est l'espace d'Orlicz associé à la fonction Ψ_p définie par

$$\Psi_p(\lambda) = \begin{cases} \lambda^p \big(-\log(\lambda)\big)^{-\frac{3}{2}p-1-\epsilon} & si\ 0 < \lambda < 1/2 \\ A\lambda + B & si\ 1/2 < \lambda < 1 \\ C\lambda^p & si\ \lambda \geq 1 \end{cases}$$

où A, B, C sont choisis de sorte que Ψ_p soit convexe et où $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit.

PREUVE DU THÉORÈME 2. Comme précédemment on commence par décomposer l'opérateur $X_j \Delta^{-1/2}$:

$$X_j \Delta^{-1/2} = c \int_0^\infty t^{-1/2} X_j T_t \, dt = c \int_0^1 t^{-1/2} X_j T_t \, dt + c \int_1^\infty t^{-1/2} X_j T_t \, dt = R_0 + R_\infty.$$

Pour montrer que

$$R_\infty \colon L^p \longrightarrow L_{\Psi_p}$$

il suffit de montrer qu'il existe deux constantes $K > 0$ et $K' > 0$ telles que

$$\int_G \Psi_p \left(\frac{|R_\infty f(g)|}{K} \right) \leq 1 \tag{7}$$

pour toute fonction $f \in C_0^\infty(G)$ telle que $\| f \|_p \leq K'$.

Comme plus haut observons que l'opérateur R_∞ est un opérateur de convolution à droite dont le noyau est donné par

$$r_\infty(g) = c \int_1^\infty t^{-1/2} X_j \phi_t(g) \, dt.$$

Par le principe de Harnack parabolique il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|X_j \phi_t(g)| \leq C \phi_{t+1}(g), \quad t \geq 1, \quad g \in G.$$

D'où l'on déduit

$$|r_\infty(g)| \leq C_1 \int_1^\infty t^{-1/2} |X_j \phi_{t+1}(g)| \, dt \leq C_2 \int_1^\infty t^{-1/2} |X_j \phi_t(g)| \, dt$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-052-9 Published online by Cambridge University Press

et donc

$$|f| * |r_\infty|(g) \leq C_2 \int_1^\infty t^{-1/2} X_j T_t(|f|)(g)\, dt.$$

Comme G est un groupe unimodulaire à croissance exponentielle du volume, on sait que (*cf.* [18])

$$\sup_{g\in G} \phi_t(g) = \phi_t(e) \leq C \exp(-ct^{1/3}), \quad t \geq 1.$$

Par ailleurs l'unimodularité de G assure que

$$\int_G \phi_t(g)\, dg = 1.$$

D'où, il résulte que

$$\left[\int_G \phi_t(g)^{p'}\, dg\right]^{1/p'} \leq C' \exp -c\left(1 - \frac{1}{p'}\right) t^{1/3}, \quad \text{pour tout } p' \geq 1$$

pour une certaine constante $C' > 0$ et par conséquent, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|T_t f(g)| = \left|\int \phi_t(g^{-1}h) f(h)\, dh\right| \leq C' \exp\left(-\frac{c}{p} t^{1/3}\right) \|f\|_p, \quad t \geq 1, \quad f \in C_0^\infty(G).$$

Ce qui montre que

$$\|T_t\|_{p\to\infty} \leq C' \exp\left(-\frac{c}{p} t^{1/3}\right), \quad t \geq 1.$$

Fixons $0 \leq f \in C_0^\infty(G)$ et fixons $\lambda > 0$. Ecrivons

$$\int_1^\infty t^{-1/2} T_t f(g)\, dt = \int_1^T t^{-1/2} T_t f(g)\, dt + \int_T^\infty t^{-1/2} T_t f(g)\, dt,$$

(le paramètre $T > 0$ sera choisi ultérieurement). On a alors

$$\operatorname{mes}\{|R_\infty f| > \lambda\} \leq \operatorname{mes}\left\{C \int_1^T t^{-1/2} T_t f\, dt > \lambda/2\right\} + \operatorname{mes}\left\{C \int_T^\infty t^{-1/2} T_t f\, dt > \lambda/2\right\}.$$

Par ce qui précède il existe une constante C'' telle que

$$\int_T^\infty t^{-1/2} T_t f(g)\, dt \leq C'' \exp\left(-\frac{c}{2p} T^{1/3}\right) \|f\|_p.$$

Supposons que λ est telle que $CC''\|f\|_p < \lambda/4$ alors $\forall\ T \geq 1$

$$\operatorname{mes}\left\{C \int_T^\infty t^{-1/2} T_t f\, dt > \lambda/2\right\} = 0$$

et en choisissant $T = 1$ on déduit que

$$\operatorname{mes}\{|R_\infty f| > \lambda\} = 0.$$

On va donc supposer que

$$\lambda \leq 4CC''\|f\|_p.$$

On choisit alors T de sorte que

$$CC'' \exp\left(-\frac{c}{2p}T^{1/3}\right)\|f\|_p = \frac{\lambda}{4}$$

i.e.,

$$T = \left[-a\log\left(\frac{\lambda}{b\|f\|_p}\right)\right]^3$$

où $a = 2p/c$ et $b = 4CC''$. On déduit alors que

$$\text{mes}\left\{C\int_T^\infty t^{-1/2}T_t f\,dt > \lambda/2\right\} = 0$$

et donc

$$\text{mes}\left\{|R_\infty f| > \lambda\right\} \leq \text{mes}\left\{C\int_1^T t^{-1/2}T_t f\,dt > \lambda/2\right\}.$$

Comme le groupe G est unimodulaire le sous-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est contractant sur tous les espaces $L^p(G, dg)$ et donc

$$\|\int_1^T t^{-1/2}T_t f\,dt\|_2 \leq 2T^{1/2}\|f\|_p.$$

On a alors

$$\text{mes}\{|R_\infty f| > \lambda\} \leq \frac{2^{2p}}{\lambda^p}T^{p/2}\|f\|_p \leq 2^{2p}\left[-a\log\left(\frac{\lambda}{b\|f\|_p}\right)\right]^{\frac{3p}{2}}\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^p.$$

Si on impose à f de vérifier

$$\|f\|_p \leq \frac{1}{8CC''}$$

on a alors

$$\text{mes}\{|R_\infty f| > \lambda\} \leq 2\left(\frac{2}{8CC''}\right)^p\left[-a\log(2\lambda)\right]^{\frac{3p}{2}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^p$$

et la condition $\lambda \leq 4CC''\|f\|_p$ implique alors $\lambda \leq 1/2$.

Soit maintenant $K > 1$. Ecrivons

$$\int_G \Psi_p\left(\frac{|R_\infty f(g)|}{K}\right)dg = \int_0^\infty \text{mes}\left\{\frac{|R_\infty f|}{K} > \lambda\right\}\Psi_p'(\lambda)\,d\lambda$$
$$= \int_0^\infty \text{mes}\left\{|R_\infty f| > K\lambda\right\}\Psi_p'(\lambda)\,d\lambda$$

avec $\text{mes}\{|R_\infty f| > K\lambda\} = 0$ dès que $K\lambda \geq 1/2$. D'où

$$\int_G \Psi_p\left(\frac{|R_\infty f(g)|}{K}\,dg\right) \leq C'''\int_0^{1/2K}\left(\frac{1}{K\lambda}\right)^p\left[-a\log(2\lambda)\right]^{\frac{3p}{2}}\Psi_p'(\lambda)\,d\lambda.$$

Mais

$$\left(\frac{1}{K\lambda}\right)^p\left[-a\log(2\lambda)\right]^{\frac{3p}{2}}\Psi_p'(\lambda) \sim \frac{1}{K^p}\frac{1}{\lambda(-\log\lambda)^{1+\epsilon}}, \quad \lambda \longrightarrow 0.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-052-9 Published online by Cambridge University Press

et il est possible de choisir K de sorte que l'intégrale figurant dans le premier membre de (7) soit dominée par 1.

Montrons maintenant que l'opérateur R_0 est borné de $L^p \longrightarrow L^p$—comme la fonction x^p est dominée par la fonction $\Psi_p(x)$ l'opérateur R_0 sera aussi borné de $L^p \longrightarrow L_{\Psi_p}$ d'après la définition de la norme d'Orlicz $\|.\|_{\Psi_p}$, ce qui achèvera la preuve du théorème. L'opérateur R_0 peut s'écrire

$$\begin{aligned}
R_0 &= c\int_0^1 t^{-1/2} X_j \exp\bigl(-t(\Delta+I)\bigr)\,dt + c\int_0^1 t^{-1/2} X_j\Bigl(\exp(-t\Delta) - \exp\bigl(-t(\Delta+I)\bigr)\Bigr)\,dt\\
&= c\int_0^\infty t^{-1/2} X_j \exp\bigl(-t(\Delta+I)\bigr)\,dt - c\int_1^\infty t^{-1/2} X_j \exp\bigl(-t(\Delta+I)\bigr)\,dt\\
&\qquad + c\int_0^1 t^{-1/2} X_j\Bigl(\exp(-t\Delta) - \exp\bigl(-t(\Delta+I)\bigr)\Bigr)\,dt\\
&= -c\int_1^\infty t^{-1/2} X_j \exp\bigl(-t(\Delta+I)\bigr)\,dt + X_j(I+\Delta)^{-1/2}\\
&\qquad + c\int_0^1 t^{-1/2} X_j\Bigl(\exp(-t\Delta) - \exp\bigl(-t(\Delta+I)\bigr)\Bigr)\,dt\\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

La bornitude $L^p \longrightarrow L^p$ de l'opérateur I résulte du principe de Harnack parabolique (qui permet d'affirmer que le noyau $X_j\phi(t)$ est borné pour $t > 1$) et de la présence du facteur $\exp(-t)$ qui fait converger l'intégrale. La bornitude de la transformée de Riesz $II = X_j(I+\Delta)^{-1/2}$ est un fait bien connu (*cf.* [10], [15]). Enfin

$$X_j\Bigl(\exp\bigl(-(t\Delta)\bigr) - \exp\bigl(-t(\Delta+I)\bigr)\Bigr) = (1-e^{-t})X_j\exp(-t\Delta) \sim tX_j\exp(-t\Delta)$$

(dans le sens où les noyaux sont équivalents) et par le Théorème V.4.2. de [18], il existe $C > 0$ et $c > 0$ telles que

$$|X_j\phi_t(g)| \le Ct^{-1/2}p_{ct}(g), \quad \forall\, g \in G, \quad \forall\, 0 < t < 1$$

ce qui permet d'assurer la bornitude de III et achève la preuve du Théorème 2.

3. Les groupes de Lie non-unimodulaires.

3.1. *La transformée de Riesz invariante à gauche.*

THÉORÈME 3. *Soit G un groupe de Lie moyennable connexe non-unimodulaire, Δ un sous-Laplacien invariant à gauche sur G comme ci-dessus et ∇ le gradient qui lui correspond. Alors l'opérateur $\nabla\Delta^{-1/2}$ n'est jamais borné de $L^p(G, d^lg) \longrightarrow L^p(G, d^lg)$, $1 \le p \le \infty$.*

REMARQUE. Plus généralement on montre que si le champ de vecteurs X est tel que $X\delta \neq 0$, alors l'opérateur $X\Delta^{-1/2}$ n'est pas borné de $L^p(G, d^lg) \longrightarrow L^p(G, d^lg)$, $1 \le p \le \infty$.

La preuve de ce résultat est basée sur deux ingrédients: le calcul de la norme $L^p(G, d^lg) \longrightarrow L^p(G, d^lg)$ du semi-groupe $\exp(-t\Delta)$ et l'inégalité de Hardy pour les groupes non-unimodulaires que nous allons commencer par rappeler (*cf.* [18])

LEMME 1. *Soit G un groupe de Lie connexe non-unimodulaire et X un champ de vecteur invariant à gauche tel que $X\delta \not\equiv 0$. Alors pour tout $\alpha \neq 0$ et $1 \le p \le \infty$*

$$\int |f(g)|^p \delta^\alpha(g)\, d^r g \le C \int |Xf(g)|^p \delta^\alpha(g)\, d^r g, \quad f \in C_0^\infty(G).$$

La moyennabilité de G permet de calculer la norme $L^p(G, d^l g) \longrightarrow L^p(G, d^l g)$ du semi-groupe $\exp(-t\Delta)$. Notons ρ la quantité définie par $\Delta(\delta) = -\rho^2\delta$. On a alors:

LEMME 2. *Soit G un groupe de Lie moyennable non-unimodulaire et Δ un sous-Laplacien invariant à gauche comme précédemment. Soit $T_t = \exp(-t\Delta)$, $t \ge 0$ le semi-groupe engendré par Δ. Alors*

$$\|T_t\|_{L^p(G,d^l g)\to L^p(G,d^l g)} = \exp\left(\frac{\rho^2}{p^2} t\right).$$

PREUVE. On sait que pour $f \in C_0^\infty(G)$

$$T_t f(x) = f * \mu_t(x) = \int f(xy^{-1})\, d\mu_t(y)$$

où $d\mu_t(g) = \phi_t(g) d^r g$ est un mesure de probabilité sur G et $\phi_t(g)$ est le noyau de convolution de T_t par rapport à $d^l g$ (*cf.* [18]). Ecrivons

$$T_t f(x) = \left[\int \delta^{-1/p}(xy^{-1}) f(xy^{-1}) \delta^{-1/p}(y)\, d\mu_t(y)\right] \delta^{1/p}(x) = \left[(f\delta^{-1/p}) * \delta^{-1/p}\mu_t\right](x)\delta^{1/p}(x).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int |T_t f|^p(x)\, d^l x &= \int \left[(f\delta^{-1/p}) * \delta^{-1/p}\mu_t\right]^p(x)\delta(x)\, d^l x \\ &= \int \left[(f\delta^{-1/p}) * \delta^{-1/p}\mu_t\right]^p(x)\, d^r x.\end{aligned}$$

On déduit alors que la norme $L^p(G, d^l g) \longrightarrow L^p(G, d^l g)$ de T_t est égale à la norme $L^p(G, d^r g) \longrightarrow L^p(G, d^r g)$ de l'opérateur de convolution pour la mesure $\delta^{-1/p}\mu_t$. D'où du fait de la moyennabilité du groupe G (*cf.* [14])

$$\begin{aligned}\|T_t\|_{L^p(G,d^l g)\to L^p(G,d^l g)} &= \int \delta^{-1/p}(g)\, d\mu_t(g) = \int \delta^{1/p}(g^{-1})\, d\mu_t(g) \\ &= (\delta^{1/p} * \mu_t)(e) = e^{-t\Delta}\delta^{1/p}(e) = \exp \frac{\rho^2}{p^2} t.\end{aligned}$$

PREUVE DU THÉORÈME 3. Pour la preuve du théorème, supposons qu'il existe un indice $1 \le p \le \infty$ telle que $\nabla\Delta^{-1/2}$ soit bornée, *i.e.*, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\nabla f\|_{L^p(G,d^l g)} \le C\|\Delta^{1/2} f\|_{L^p(G,d^l g)}.$$

D'après l'inégalité de Hardy, il existe alors $C' > 0$ telle que

$$\|f\|_{L^p(G,d^l g)} \le C'\|\Delta^{1/2} f\|_{L^p(G,d^l G)}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-052-9 Published online by Cambridge University Press

Ce qui signifie que l'opérateur $\Delta^{-1/2}$ est borné de $L^p(G, d^l g) \longrightarrow L^p(G, d^l g)$. Mais d'après la formule (4)

$$\Delta^{-1/2} f(x) = f * \left[c \int_0^\infty t^{-1/2} \mu_t \, dt\right](x)$$

et du fait de la moyennabilité de G (comme précédemment) la norme d'opérateur $L^p(G, d^l g) \longrightarrow L^p(G, d^l g)$ de $\Delta^{-1/2}$ est donnée par

$$c \int_0^\infty t^{-1/2} (\delta^{1/p} * \mu_t)(e) \, dt = c \int_0^\infty t^{-1/2} \exp \frac{\rho^2}{p^2} t \, dt \leq cC'$$

ce qui est absurde.

3.2. *Les groupes* WNC. Soit G un groupe de Lie connexe moyennable et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Soient $\mathcal{N} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{G}$ respectivement le nilradical et le radical de $\mathcal{G}$ (*i.e.*, le plus grand idéal nilpotent et le plus grand idéal résoluble de $\mathcal{G}$). Alors $\mathcal{Q}/\mathcal{N} = V$ et $\mathcal{N}/[\mathcal{N}, \mathcal{N}] = W$ sont des algèbres de Lie abéliennes qu'on identifie à des espaces vectoriels réels, de plus la représentation adjointe de $\mathcal{G}$ induit un homomorphisme $\mathrm{ad}\colon V \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W)$. Une application $\mathbb{R}$-linéaire $\lambda \longrightarrow \mathbf{C}$ est une racine s'il existe $0 \neq w \in W \otimes \mathbf{C}$ tel que $[\mathrm{ad}(v) - \lambda(v)]w = 0$, pour tout $v \in V$. Soient $L_1, \ldots, L_m \in V^*$ les parties réelles distinctes de ces racines (l'ensemble de ces parties réelles est supposé non vide). Le groupe G est de type WNC (*cf.* [16]) s'il existe $x \in \mathcal{Q}/\mathcal{N}$ tel que $L_j(x) \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$ et $\sum L_j(x) > 0$. Tous les groupes de Lie non-unimodulaires moyennables de type NC (cf. [17]) sont des groupes WNC (*e.g.*, le groupe affine, les groupes NA apparaîssant dans la décomposition d'Iwasawa des groupes semi-simples, les extensions résolubles des H-groupes (*cf.* [2]) et plus généralement les groupes non-unimodulaires moyennables sur les quels le noyau de la chaleur possède une décroissance polynomiale).

Un exemple de groupe WNC qui n'est pas NC: le produit semi-direct $\mathbb{R}^3 \ltimes \mathbb{R}^2$ où le produit de deux éléments (x, y, z, t, s) et (x', y', z', t', s') est défini par

$$(x, y, z, t, s).(x', y', z', t', s') = (x + e^s x', y + e^{-s} y', z + e^t z', t + t', s + s')$$

Sur un tel groupe le noyau de la chaleur a une décroissance en $\exp(-ct^{1/3})$ (*cf.* [17]), mais en dépit de cette décroissance la transformée de Riesz $\tilde{\nabla}\tilde{\Delta}^{-1/2}$ n'est pas bornée.

La classe des groupes WNC a été mise en évidence par N. Th. Varopoulos dans le contexte de la théorie de Hardy-Littlewood. Ils possèdent la caractérisation suivante

PROPOSITION 2. *Si G est un groupe de Lie de type* WNC *alors*

$$\|\tilde{\Delta}^{-\alpha/2}\|_{L^p(G, d^l g) \to L^q(G, d^l g)} = \infty$$

pour tout $\alpha > 0$ *et pour tout* $1 \leq p \leq q < 2$ *ou* $2 < p \leq q \leq \infty$.

Pour un groupe de type WNC même un résultat de bornitude L^p—L^q (comme celui de l'estimation (2)) de la transformée de Riesz $\tilde{\nabla}\tilde{\Delta}^{-1/2}$ ne peut pas se produire. D'une manière plus précise on a:

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-052-9 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 4. *Soit G un groupe de Lie moyennable non-unimodulaire, Δ un sous-Laplacien invariant à gauche sur G comme précédemment et ∇ le gradient qui lui correspond. Alors l'opérateur $\tilde{\nabla}\tilde{\Delta}^{-1/2}$ n'est jamais borné de $L^p(G, d^l g) \longrightarrow L^p(G, d^l g)$, pour tout $p \neq 2$. Si de plus G est de type* WNC *alors cet opérateur n'est jamais borné de $L^p(G, d^l g) \longrightarrow L^q(G, d^l g)$, pour tout $1 \leq p \leq q < 2$ ou $2 < p \leq q \leq \infty$.*

PREUVE DU THÉORÈME 4. Fixons $p \leq q < 2$ et supposons que l'opérateur $\tilde{\nabla}\tilde{\Delta}^{-1/2}$ soit borné de $L^p(G, d^l g) \longrightarrow L^q(G, d^l g)$. Il existe alors une constante $C > 0$ telle que

$$\|\tilde{\nabla} f\|_{L^q(G,d^l g)} \leq C \|\tilde{\Delta}^{1/2} f\|_{L^p(G,d^l g)}.$$

et donc

$$\|\delta^{1/2}\nabla\delta^{-1/2} f\|_{L^q(G,d^l g)} \leq C \|\delta^{1/2}\Delta^{1/2}\delta^{-1/2} f\|_{L^p(G,d^l g)}.$$

en remplaçant f par $\delta^{1/2} f$ ceci s'écrit encore

$$\|\delta^{1/2}\nabla f\|_{L^q(G,d^l g)} \leq C \|\delta^{1/2}\Delta^{1/2} f\|_{L^p(G,d^l g)}.$$

Mais

$$\|\delta^{1/2}\nabla f\|_{L^q(G,d^l g)} = \left[\int \delta^{q/2} |\nabla f|^q \, d^l g\right]^{1/q} = \left[\int \delta^{(q/2-1)} |\nabla f|^q \, d^r g\right]^{1/2}$$

Comme

$$\frac{q}{2} - 1 \neq 0$$

on peut utiliser le Lemme 1 et déduire qu'il existe une constante C' telle que

$$C' \int \delta^{(q/2-1)} |\nabla f|^q \, d^r g \geq \int \delta^{(q/2-1)} |f|^q \, d^r g = \int \delta^{q/2} |f|^q \, d^l g.$$

On a donc

$$\left[\int \delta^{q/2} |f|^q d^l g\right]^{1/q} \leq C'' \|\delta^{1/2}\Delta^{1/2} f\|_{L^p(G,d^l g)},$$

et par conséquent

$$\left[\int |f|^q \, d^l g\right]^{1/q} \leq C \|\delta^{1/2}\Delta^{1/2}\delta^{-1/2} f\|_{L^p(G,d^l g)} = C \|\tilde{\Delta}^{1/2} f\|_{L^p(G,d^l g)},$$

ce qui signifie que l'opérateur $\tilde{\Delta}^{-1/2}$ est borné de $L^p(G, d^l g) \longrightarrow L^q(G, d^l g)$. Ceci est impossible, dans le cas où $p = q$ du fait que

$$\|\tilde{T}_t\|_{L^p(G,d^l(g)) \to L^p(G,d^l(g))} = \exp\left(\rho^2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)^2\right), \quad t > 0,$$

par un calcul similaire à celui du paragraphe précédent (*cf.* [16] où ce calcul est fait). Ceci est aussi impossible, pour $1 \leq p \leq q < 2$, en vertu de la proposition 1, dès G est de type WNC. Il est clair qu'on a le même résultat dans le cas où $q \geq p > 2$. Ce qui achève la preuve du Théorème 4.

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-052-9 Published online by Cambridge University Press

4. **Le cas des espaces homogènes.** Soit G un groupe de Lie unimodulaire connexe et $H \subset G$ un sous-groupe fermé unimodulaire de G. On note $M = H \setminus G$ l'espace homogène des classes à droite $\dot{g} = Hg$ de G selon H. Le groupe G opère sur M à droite: si $\dot{g} \in M$ et $s \in G$ on pose $\dot{g}s = Hgs$.

Rappelons que l'espace homogène $M = H \setminus G$ est dit G-moyennable (ou moyennable) s'il existe sur M une moyenne (sur l'espace des fonctions bornées uniformément continues sur M) invariante par l'action à droite de G (*cf.* [4]). Dans la suite on supposera le groupe G non moyennable et l'espace homogène $H \setminus G$ non-moyennable au sens indiqué.

Sous les hypothèses ci-dessus la mesure invariante sur M (que nous noterons dm) vérifie la formule de désintégration

$$\int_G f(g)\,dg = \int_{H\setminus G} \left(\int_H f(hg)\,dh \right) dm(\dot{g}). \tag{8}$$

Soit $X = \{X_j, j = 1, \ldots, k\}$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur G vérifiant la condition de Hörmander et soit $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-Laplacien associé à ce système. On notera $|.|_X$ la distance de contrôle sur G associée au système X et $\phi_t(.)$, $t > 0$, le noyau correspondant au semi-groupe $e^{-t\Delta}$. Si on note $p_t(x, y)$, $t > 0$, $x, y \in M$ le noyau du semi-groupe $T_t = e^{-td\pi(\Delta)}$, $t > 0$, alors par la formule de désintégration (11), on a:

$$p_t(\dot{x}, \dot{y}) = \int_H \phi_t(x^{-1}hy)\,dh,$$

pour $\dot{x}, \dot{y} \in M$ et $\dot{x} = \pi(x)$, $\dot{y} = \pi(y)$. En particulier le noyau $p_t(.,.)$ est symétrique. Notons

$$\lambda = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{k} \int_M |d\pi(X_j)f|^2 dm(x), \quad \int_M |f(x)|^2\, dm(x) = 1 \Big\}.$$

Du fait de la non-moyennabilité de M le gap spectral λ est strictement positif.

Soit $t \geq 2$, utilisant la symétrie du noyau $p_t(.,.)$ et la propriété de semi-groupe on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|T_t\|_{L^1(M,dm)\to L^\infty(M,dm)} &\leq \|T_{1/2}\|^2_{1\to 2} \|T_{t-1}\|_{2\to 2} \\
&\leq Ce^{-\lambda t} \sup_{x\in M} \Big[\int_M p^2_{1/2}(x, y)\, dm(y) \Big] \\
&\leq Ce^{-\lambda t} \sup_{x\in M} \big[p_1(x, x) \big].
\end{aligned}$$

Mais d'après [19]

$$p_1(x, x) \leq \frac{C}{\mathrm{Vol}_M\,(B(x, 1))}$$

où $B(x, 1)$ est la boule de M centre x et de rayon 1 associée à la distance induite par le système de Hörmander X sur M (*i.e.*, la distance définie par $d(x, y) = \inf\{|x^{-1}hy|_X$, $h \in H\}$). On a ainsi l'estimation

$$\|T_t\|_{L^1(M,dm)\to L^\infty(M,dm)} \leq \frac{Ce^{-\lambda t}}{\inf_{x\in M} \mathrm{Vol}_M\,(B(x, 1))}, \quad t \geq 2.$$

Il est facile de vérifier que les arguments de la section 2 conduisent alors au théorème suivant:

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-052-9 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 5. *Soient G et H comme ci-dessus. Supposons que le sous-groupe H est tel que l'espace homogène $M = H \setminus G$ vérifie la condition*

$$\inf_{x \in M} \mathrm{Vol}_M\big(B(x,1)\big) > 0. \tag{9}$$

Alors pour tout $1 \leq j \leq k$ et pour tout $p > 1$

$$d\pi(X_j) d\pi(\Delta)^{-1/2} \colon L^p(M, dm) \longrightarrow L_{\Phi_p}(M, dm)$$

où $L_{\Phi_p}(M, dm)$ est l'espace d'Orlicz associé à la fonction Φ_p définie par

$$\Phi_p(\lambda) = \begin{cases} \lambda^p\big(-\log(\lambda)\big)^{-\frac{1}{2}p-1-\epsilon} & si\ 0 < \lambda < 1/2 \\ A\lambda + B & si\ 1/2 < \lambda < 1 \\ C\lambda^p & si\ \lambda \geq 1 \end{cases}$$

où A, B, C sont choisis de sorte que Φ_p soit convexe et où $\epsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit.

Notons enfin qu'indépendamment de la condition (9) on a le théorème suivant (pour un énoncé plus général *cf.* [9]):

THÉORÈME 6. *Soit $\{X_j, j = 1, \ldots, k\}$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ vérifiant la condition de Hörmander. Soit $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-Laplacien associé à ce système. Soit $M = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ l'espace homogène des classes à droite modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et π la projection canonique $\pi \colon \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \longrightarrow M$. Alors pour tout $j = 1, \ldots, k$, et pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C > 0$ telle que*

$$\|d\pi(X_j)\big(d\pi(\Delta)\big)^{-1/2} f\|_{L^p(M)} \leq C\|f\|_{L^p(M)}, \quad f \in C_0^\infty(M).$$

Indiquons les grandes lignes de la preuve du Théorème 6. On note $K(g)$, $g \in G$ le noyau de convolution associé à l'opérateur $\Delta^{-1/2}$ sur G. Soit $\varphi \in C_0^\infty(G)$ une fonction qui vaut 1 sur un voisinage de e et $\psi = 1 - \varphi$. Décomposons le noyau de convolution associé à $X_j\Delta^{-1/2}$ comme

$$X_j K(g) = X_j[\varphi K](g) + X_j[\psi K](g).$$

En utilisant la formule (8) on voit facilement que le noyau associé à l'opérateur $d\pi(X_j)\big(d\pi(\Delta)\big)^{-1/2}$ est donné par

$$R(\dot{x}, \dot{y}) = \int_H X_j K(y^{-1}h^{-1}x)\, dh$$

où $x, y \in G$ sont tels que $\pi(x) = \dot{x}$ et $\pi(y) = \dot{y}$ et par conséquent

$$\begin{aligned} R(\dot{x}, \dot{y}) &= \int_H X_j[\varphi K](y^{-1}h^{-1}x)\, dh + \int_H X_j[\psi K](y^{-1}h^{-1}x)\, dh \\ &= R_0(\dot{x}, \dot{y}) + R_\infty(\dot{x}, \dot{y}). \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-052-9 Published online by Cambridge University Press

Comme le noyau de convolution $[\varphi K](g)$ est à support compact, l'opérateur de convolution par $X_j(\varphi K)$ est borné sur $L^p(G)$, (*cf.* [7]). On peut alors en déduire par un transfert approprié que l'opérateur associé au noyau $R_0(.,.)$ est borné sur $L^p(H \setminus G)$ pour tout $1 < p < \infty$.

L'estimation de la contribution du noyau $R_\infty(.,.)$ est plus délicate. On remarque d'abord (*cf.* [7]) que $X_j[\psi K](g)$ est dans $L^p(G)$ pour tout $1 < p < \infty$. D'autre part, dans la formule de Plancherel de $L^2(H \setminus G)$ il n'y a qu'une série complémentaire qui intervient (*cf.* [4]). Comme chaque coefficient d'une série complémentaire $\langle \pi_\sigma(g)u, v\rangle$ est dans $L^q(G)$ pour $q > q_\sigma$ (*cf.* [6], [8]) il s'en suit que l'opérateur induit par un noyau $f(g)$, $g \in G$, sur $L^2(H \setminus G)$ est borné dès que $f \in L^p(G)$ pour tout $1 < p < q'_\sigma$, où q'_σ est l'exposant conjugué de q_σ. On a alors les applications suivantes:

$$L^p(G) \longrightarrow \mathrm{END}\big[L^2(H \setminus G)\big],$$

pour tout $1 < p < q'_\sigma$ et

$$L^1(G) \longrightarrow \mathrm{END}\big[L^1(H \setminus G)\big],$$

où $\mathrm{END}[L^r(H \setminus G)]$ désigne l'espace des endomorphismes de $L^r(H \setminus G)$. Un argument facile d'interpolation (*cf.* [8]) permet alors de déduire que l'opérateur associé au noyau $R_\infty(.,.)$ est borné sur $L^p(H \setminus G)$ pour tout $1 < p \leq 2$. Un raisonnement analogue permet de traiter le cas $2 < p < \infty$.

REFERENCES

1. G. Alexopoulos, *An application of homogenization theory to harmonic analysis: Harnack inequalities and Riesz transforms on Lie groups of polynomial growth*. Canad. J. Math. **44**(1992), 691–727.
2. J.-P. Anker, E. Damek et C. Yacoub, *Spherical analysis on harmonic AN groups* (à paraître).
3. R. R. Coifman et G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*. Lectures Notes in Math. **242**, Springer-Verlag, 1971.
4. P. Eymard, *Moyennes Invariantes et Représentations Unitaires*. Lecture Notes in Math. **300**, Springer-Verlag, 1972.
5. G. Gaudry, T. Qian et P. Soğren, *Singular integrals related to the Laplacian on the group $ax + b$*. Ark. Mat. **30**(1992), 259–281.
6. R. Lipsman, *Uniformly bounded representations of* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Amer. J. Math. **91**(1969), 47–66.
7. N. Lohoué, *Transformées de Riesz et fonctions de Littlewood Paley sur les groupes non moyennables*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **306**(1988), 327–330.
8. ———, *Estimations L^p des coefficients de représentation et opérateurs de convolution*. Adv. Math. **38**(1980), 178–221.
9. ———, *Analyse sur les espaces homogènes des groupes non-moyennables* (à paraître).
10. ———, *Transformées de Riesz et fonctions sommables*. Amer. J. Math. (4) **114**(1992), 327–330
11. N. Lohoué et N. Th. Varopoulos, *Remarques sur les transformées de Riesz sur les groupes de Lie nilpotents*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301**(1985), 559–560.
12. L. Saloff-Coste, *Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynômiale*. Ark. Mat. **28**(1990), 315–331.
13. P. Sögren, *An estimate for a first-order Riesz operator on the affine group*. Preprint.
14. H. Rieter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*. Oxford Math. Monographs, 1968.
15. D. W. Robinson, *Elliptic Operators and Lie Groups*. Oxford Math. Monographs, 1991.
16. N. Th. Varopoulos, *The heat kernel on Lie groups*. Rev. Mat. Iberoamericana **12**(1996), 147–186.
17. ———, *Diffusions on Lie groups (II)*. Canad. J. Math. **46**(1994), 1073–1093.
18. N. Th. Varopoulos, L. Sallof-Coste et Th. Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups*. Cambridge Tracts in Math. **100**(1993).

19. N. Th. Varopoulos, *Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernels (I), The semi-group technique*. Bull. Sci. Math. Sér. II **113**(1989), 253–277.

20. A. Zygmund, *Trigonometric series*. Vol. I et II, 2^e édition, Cambridge Univ. Press, 1959.

Mathématiques, Bât. 425
Université Paris XI
Orsay 91405 Cedex
France

Institut de Mathématiques
Université Paris VI
4, place Jussieu
Paris 75252 Cedex
France