CATEGORIES LOCALEMENT ARTINIENNES SANS RADICAL

P.-Y. Leduc

Le but de cette note est de donner une caractérisation purement catégorique des catégories de modules semi-simples sur un anneau. Nous allons voir que ces catégories sont précisément celles qui sont localement artiniennes au sens de P. Gabriel et dont le radical au sens de G.M. Kelly est nul.

1. Quelques rappels. On sait que si $\mathbb{A}$ est une catégorie additive (en ce sens que pour chaque couple d'objets (A, B), $\mathbb{A}(A, B)$ est un groupe abélien) alors la plus petite catégorie additive à produits finis $\mathbb{A}^M$ admettant $\mathbb{A}$ pour sous-catégorie pleine, s'identifie à celle dont les objets sont les suites finies $(A_1, \ldots, A_n)$ d'objets de $\mathbb{A}$, un morphisme de $\mathbb{A}^M$ allant de $(A_1, \ldots, A_n)$ vers $(B_1, \ldots, B_m)$ étant une matrice (a^{ij}) où $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ et $a^{ij} \in \mathbb{A}(A_j, B_i)$. Rappelons enfin qu'un corpoïde est une petite catégorie additive dont tout les morphismes non-nuls sont des isomorphismes.

Ceci dit, une modification immédiate de résultats de [1] permet d'établir le résultat suivant.

PROPOSITION 1. *Si $\mathbb{R}$ est une petite catégorie additive localement artinienne et sans radical, alors $\mathbb{R}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine d'une catégorie de la forme $\mathbb{K}^M$ où $\mathbb{K}$ est un corpoïde.*

2. Réciproque. Les anneaux d'endomorphismes d'objets d'une sous-catégorie pleine $\mathbb{R}$ d'une catégorie de la forme $\mathbb{K}^M$ où $\mathbb{K}$ est un corpoïde étant tous visiblement artiniens et sans radical, il est clair que le radical de Kelly d'une telle catégorie est nul. Pour voir que $\mathbb{R}$ est localement artinienne i.e. que toute suite décroissante de sous-foncteurs d'un foncteur contravariant représentable de $\mathbb{R}$ est stationnaire, il suffit de voir que la donnée d'un sous-foncteur F de $\mathbb{R}(-, A)$ pour $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{R}$ est entièrement déterminée par celle de $F(A)$.

LEMME. *$\mathbb{R}$ et A étant comme ci-dessus, si I est un idéal a droite de $\mathbb{R}(A, A)$ et si P et G désignent respectivement le plus petit et le plus grand des sous-foncteurs de $\mathbb{R}(-, A)$ tels que $P(A) = G(A) = I$, alors pour tout $X \in \mathrm{Ob}\ R$, $G(X) \subseteq P(X)$.*

En effet, il s'agit de voir que $G(X) = \{x \in \mathbb{R}(X, A) : x\mathbb{R}(A, X) \subseteq I\} \subseteq I\mathbb{R}(X, A)$. Mais il est clair que l'on peut supposer X et A de la forme $X = (B_1, B_1, \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_2, \ldots\ldots, B_k, \ldots, B_k, X_{k+1}, \ldots, X_n)$ et

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-088-5 Published online by Cambridge University Press

$A = (B_1, B_1, \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_2, \ldots\ldots, B_k, \ldots, B_k, A_{k+1}, \ldots, A_m)$ où, pour $j \leq k < i$, $\mathbb{K}(B_j, A_i) = 0$ et $\mathbb{K}(B_j, X_i) = 0$, et, pour $i < j \leq k$, $\mathbb{K}(B_i, B_j) = 0$. Dès lors on est ramené à montrer et à appliquer k fois le fait que si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{X}$ sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur un même corps et que J est un idéal à droite de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$, alors

$$\{x \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{a}) \mid x\,\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{X}) \subseteq J\} \subseteq J\,\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{a}),$$

ce qui est un exercise facile.

Nous avons donc établi la réciproque de la Proposition 1.

3. Conclusion. Pour obtenir le résultat annoncé au début, il ne reste plus qu'à démontrer la Proposition suivante:

PROPOSITION 2. Les catégories de modules simples sur un anneau sont, à équivalence près, les seuls corpoïdes.

Si $\mathbb{K}$ est un corpoïde, on obtient immédiatement la démonstration en prenant pour anneau le produit de tous les corps $\mathbb{K}(A, A)$, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{K}$.

RÉFÉRENCE

1. P.-Y. Leduc, Catégories semi-simples et catégories primitives. J. Canad. Math. 20 (1968) 612-628.

Université de Montréal

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-088-5 Published online by Cambridge University Press