SUR L'INDICE DE CERTAINS RÉSEAUX DE R^4 PERMIS POUR UN OCTAÈDRE

ROBERT BANTEGNIE

1. Introduction. Si un réseau G de R^n contient Z^n et est permis pour l'«octaèdre généralisé» Ω_n d'équation

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < 1,$$

l'indice de Z^n dans G est borné supérieurement par $n!$ d'après les théorèmes généraux de Minkowski.

La détermination du maximum de cet indice a été faite par Minkowski lui-même pour $n = 2, 3$ **(2)** et par Wolff **(5)** et Mordell **(3)** pour $n = 4$, dans le cas où l'on suppose que G n'a en commun avec l'adhérence $\bar{\Omega}_n$ de Ω_n que l'origine O et les sommets de Ω_n.

Pour $n = 4$, et en se limitant au cas où G/Z^4 est cyclique, l'auteur **(1)** a prouvé que l'indice de Z^4 dans G est borné supérieurement par 16 si G contient Z^4 et est permis pour Ω_4.

Nous nous proposons ici de compléter ce résultat en prouvant le

THÉORÈME 1. *Si un réseau G contenant Z^4 est permis pour Ω_4, l'indice de Z^4 dans G est*

(a) $\leqslant 16$ *si G/Z^4 est cyclique,*

(b) $\leqslant 18$ *si G/Z^4 n'est pas cyclique.*

Les maxima 16 *et* 18 *sont effectivement atteints.*

2. Considérations liées aux empilements d'octaèdres. $E_1, \ldots, E_n$ désigne la base canonique de R^n et $(x_1, \ldots, x_n)$ le point

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i.$$

Z^n est le réseau des points à coordonnées entières et Ω_n l'octaèdre généralisé d'équation

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < 1.$$

Soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble des réseaux contenant Z^n; nous désignerons par $\mathfrak{L}$ l'ensemble des réseaux de $\mathfrak{N}$ permis pour Ω_n ($G \in \mathfrak{L}$ si $G \in \mathfrak{N}$ et si $G \cap \Omega_n = \{O\}$) et par $\bar{\mathfrak{L}}$ l'ensemble des réseaux de $\mathfrak{N}$ n'ayant en commun avec l'adhérence $\bar{\Omega}_n$ de Ω_n que O et les sommets de

Reçu le 20 mai 1964.

$$\Omega_n (G \in \bar{\mathfrak{L}} \text{ si } G \in \mathfrak{N} \text{ et si } G \cap \bar{\Omega}_n = \{O\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{\pm E_i\}).$$

Désignons par m_n, p_n respectivement l'ordre maximum de G/Z^n et d'un élément de G/Z^n pour $G \in \mathfrak{L}$; désignons de même par $\bar{m}_n$ et $\bar{p}_n$ l'ordre maximum de G/Z^n et d'un élément de G/Z^n pour $G \in \bar{\mathfrak{L}}$.

Il est connu que

$$\bar{m}_2 = \bar{p}_2 = 1, \quad \bar{m}_3 = \bar{p}_3 = 2, \quad \bar{m}_4 = \bar{p}_4 = 5, \quad m_2 = p_2 = 2;$$

cf. **(2)** pour $n = 1, 2$ et **(3; 5)** pour $n = 4$.

Prouver le théorème 1 *revient à montrer que* $p_4 = 16$ *et* $m_4 = 18$. *Nous montrerons aussi que* $m_3 = p_3 = 4$.

Soit $\eta(\Omega_n)$ la densité maximum d'empilement régulier d'ensembles congrus à Ω_n. Prouvons tout d'abord le

LEMME 1. $m_n \leqslant \eta(\Omega_n).n!$

Preuve. $\Delta(K)$ désignant la constante critique d'un ensemble K de R^n, $V(K)$ sa mesure et $d(G)$ désignant le déterminant d'un réseau G, on a

$$\eta(\Omega_n) = \frac{V(\Omega_n)}{\Delta(2\Omega_n)} = \frac{2^n/n!}{2^n\Delta(\Omega_n)} = \frac{1}{n!\,\Delta(\Omega_n)}$$

d'une part et d'autre part $d(G) \geqslant \Delta(\Omega_n)$ si $G \in \mathfrak{L}$. Comme G/Z^n est un groupe abélien d'ordre $d(Z^n)/d(G) = 1/d(G)$ le lemme suit immédiatement.

On sait que $\eta(\Omega_n) \leqslant 1$ et que $\eta(\Omega_1) = \eta(\Omega_2) = 1$; prouvons la

PROPOSITION 1. *On a* $\eta(\Omega_n) < 1$ *pour* $n \geqslant 3$.

Preuve. Cette proposition est probablement connue mais nous n'avons pu découvrir une référence.

Si $\eta(\Omega_n) = 1$ et si G est un réseau d'empilement maximum $\bigcup_{g\in G} (\Omega_n + g)$ recouvre R^n; en particulier, si Π_3 désigne le sous espace à trois dimensions défini par $x_4 = \ldots = x_n = 0$, Π_3 est recouvert par

$$\Pi_3 \cap (\bigcup_{g\in G} (\Omega_n + g)) = \bigcup_{g\in G} (\Pi_3 \cap (\Omega_n + g)).$$

Or, $\Pi_3 \cap (\Omega_n + g)$ est pour tout $g \in G$, soit $\emptyset$ soit un octaèdre centré en $\mathrm{proj}_{\pi_3}(g)$ et déduit par translation de l'homothétique de Ω_3 par rapport à O dans un rapport t_g ne dépendant que de g et où t_g vérifie $0 \leqslant t_g \leqslant 1$, $t_0 = 1$.

Pour prouver $\eta(\Omega_n) \neq 1$, il suffit alors de montrer qu'on ne peut recouvrir R^3 par un empilement d'octaèdres déduits par translation d'un octaèdre $t\Omega_3$ où t dépend de l'octaèdre de l'empilement considéré, vérifie $0 \leqslant t \leqslant 1$ et où l'on suppose que Ω_3 fait partie des octaèdres de l'empilement.

Si un tel empilement recouvrait R^3 et si S est un des sommets de Ω_3, une boule de centre S de rayon suffisamment petit serait entièrement couverte par les octaèdres de l'empilement passant par S.

Dans ces conditions, si α_0 désigne l'angle solide en un sommet de Ω_3 et α_1 l'angle solide formé par un dièdre de Ω_3 et si l'on suppose que S est sommet de

k octaèdres ($k \geqslant 1$), est intérieur à l arêtes d'octaèdres ($l \geqslant 0$) et est intérieur à m faces d'octaèdres ($m \geqslant 0$), on aurait

$$k\alpha_0 + l\alpha_1 + m(2\pi) = 4\pi. \tag{1}$$

Il suffit donc de prouver qu'on ne peut trouver k, l, m entiers $\geqslant 0$ avec $k \geqslant 1$ vérifiant (1).

Si (1) est vérifié avec $k \geqslant 1$, on a nécessairement $m < 2$.

D'autre part, on sait que

$$\alpha_0 = 2(\alpha_1 - \pi),$$

cf. (**4**, p. 159) et que

$$\alpha_1 = 4 \text{ arc sin } \sqrt{(2/3)} = 2 \text{ arc cos}(-1/3),$$

ce qui donne $218° \, 56' < \alpha_1 < 218° \, 58'$ et notamment

$$\tfrac{1}{5}\pi < \alpha_1 - \pi < \tfrac{2}{9}\pi. \tag{2}$$

Distinguons alors les possibilités $m = 0$ et $m = 1$.

Si $m = 0$, (1) s'écrit $(2k + l)\alpha_1 = 2\pi(k + 2)$, ce qui entraîne, d'après (2),

$$(2k + l)(\pi + \tfrac{1}{5}\pi) < 2\pi(k + 2) < (2k + l)(\pi + \tfrac{2}{9}\pi),$$

inégalités qui sont vérifiées si, simultanément $3l + k < 10$ et $11l + 4k > 36$. On voit que ces deux inégalités sont incompatibles pour k et l entiers $\geqslant 0$, la première entraînant $3l + k \leqslant 9$ et donc $12l + 4k \leqslant 36$.

Si $m = 1$, (1) s'écrit $(2k + l)\alpha_1 = 2\pi(k + 1)$, ce qui entraîne, d'après (2), $3l + k < 5$ et $11l + 4k > 18$, inégalités qui sont incompatibles pour l et k entiers $\geqslant 0$, la première entraînant $3l + k \leqslant 4$ et donc $12l + 4k \leqslant 16$.

Il résulte évidemment de la proposition 1 que $m_4 < 24$.

3. Réduction du problème. Tout $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$ de R^n est congru, mod Z^n, à $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ où $-1/2 < y_i \leqslant 1/2$ pour $i = 1, \ldots, n$. Nous appellerons Y le point *réduit* associé à $\tilde{Y}$ et nous poserons

$$||\tilde{Y}|| = ||Y|| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|.$$

Si $N \in \mathfrak{N}$, N/Z^n est un groupe abélien somme directe de n groupes cycliques $\hat{G}_1, \ldots, \hat{G}_n$ d'ordres respectifs $e_1, \ldots, e_n$ où les $e_i, \ldots$ sont des entiers $\geqslant 1$ dont chacun divise le précédent.

Nous poserons $N/Z^n = (\hat{G}_1) \ldots (\hat{G}_n)$ et dirons que N et N/Z^n sont de *type* $(e_1) \ldots (e_n)$; e_1 est l'*exposant* de N/Z^n, c'est à dire l'ordre maximum d'un élément de N/Z^n. Si, de plus, $e_r \neq 1$ et $e_i = 1$ pour $i > r$, nous dirons que N est de *longueur* r. Le type d'un réseau V_r de longueur r est noté, en abrégé, $(e_1) \ldots (e_r)$.

LEMME 2. *Pour $N \in \mathfrak{N}$ un élément d'ordre $p > 1$ de N est représenté de façon unique par un point réduit A tel que $pA = (a_1, \ldots, a_n)$, où $a_1, \ldots, a_n$ appartiennent à S_p système de restes de valeur absolue minimum* mod p *et où*

$$\text{pgcd}(a_1, \ldots, a_n, p) = 1.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1965-073-9 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Elle est immédiate, compte tenu des définitions et de ce que S_p est défini comme un système complet de restes mod p contenant les restes s qui verifient $-\frac{1}{2}p < s \leqslant \frac{1}{2}p$.

Le point réduit A sera noté $\{p; a_1, \ldots, a_n\}$; A sera dit *de rang* n si $a_i \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

$\hat{G}_i$ étant engendré par la classe d'un élément B_i de N réduit mod Z^n, c'est à dire tel que $B_i = \{e_i; b_{i1}, \ldots, b_{in}\}$ où $b_{ij} \in S_{e_i}$ pour $j = 1, \ldots, n$ et où $\text{pgcd}(b_{i1}, \ldots, b_{in}, e_i) = 1$ (on pose $S_{e_i} = \{0\}$ si $e_i = 1$) tout point de N est congru, mod Z^n, à un point

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i \qquad \text{où } \lambda_i \in S_{e_i} \text{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

On en déduit immédiatement la

PROPOSITION 2. *$N \in \mathfrak{L}$ équivaut à la condition suivante: Pour tout système de* $\lambda_i \in S_{e_i} (i = 1, \ldots, n)$, non tous nuls, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i \right\| \geqslant 1.$$

COROLLAIRE. *$V_r \in \mathfrak{L}$ équivaut à la condition suivante: Pour tout système de $\lambda_i \in S_{e_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$, non tous nuls, on a*

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i B_i \right\| \geqslant 1.$$

Remarque. Pour que $N \in \mathfrak{L}$, il est nécessaire que le réseau G_i engendré par $B_i, E_1, \ldots, E_n$ appartienne à $\mathfrak{L}$ pour chaque i, ce qui s'exprime par $\|\lambda_i B_i\| \geqslant 1$ pour chaque $\lambda_i \in S_{e_i}$.

Si B_i réduit "engendre" G_i, nous dirons de B_i que c'est un *point réduit permis* si son ordre est >1 c'est à dire si $G_i \neq Z^n$.

4. Détermination des points réduits permis. Elle est donnée par la

PROPOSITION 3.

(a) *Si $n = 2$, $p_2 = 2$ et le seul point réduit permis est* $\{2; 1, 1\}$.

(b) *Si $n = 3$, $p_3 = 4$ et les seuls points réduits permis de rang* 3 *sont*

$$\{2; 1, 1, 1\}, \quad \{3; \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}, \quad \{4; \epsilon_1, \epsilon_2, 2\}, \quad \{4; \epsilon_1, 2, \epsilon_3\}, \quad \{4; 2, \epsilon_2, \epsilon_3\}$$

où $\epsilon_i = \pm 1$ pour $i = 1, 2, 3$.

(c) *Si $n = 4$, $p_4 = 16$ et les points réduits permis de rang* 4 *vérifiant $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 = 1$ sont:*

$\{2; 1, 1, 1, 1\}$, $\{3; 1, 1, 1, 1\}$, $\{4; 1, 1, 1, 1\}$, $\{4; 2, 1, 1, 1\}$, $\{4; 2, 2, 1, 1\}$, $\{5; 2, 1, 1, 1\}$, $\{5; 2, 2, 1, 1\}$, $\{5; 2, 2, 2, 1\}$, $\{6; 2, 2, 1, 1\}$, $\{6; 3, 1, 1, 1\}$, $\{6; 3, 2, 1, 1\}$, $\{6; 3, 2, 2, 1\}$, $\{7; 3, 2, 1, 1\}$, $\{7; 3, 2, 2, 1\}$, $\{7; 3, 3, 2, 1\}$, $\{8; 3, 2, 2, 1\}$, $\{8; 3, 3, 1, 1\}$, $\{8; 4, 2, 1, 1\}$, $\{8; 4, 3, 2, 1\}$, $\{9; 4, 3, 2, 1\}$, $\{10; 4, 3, 2, 1\}$, $\{12; 5, 4, 2, 1\}$, $\{16; 7, 5, 3, 1\}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1965-073-9 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Une démonstration détaillée est parue dans **(1)**. Remarquons simplement ici que, pour $n = 4$, on peut remplacer, pour l'étude de leur ordre, l'ensemble des points réduits permis de rang 4 par ceux d'entre eux vérifiant $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 = 1$.

La proposition 3 entraîne le (a) du théorème 1.

5. Preuve du théorème 1(b). Nous utiliserons le

LEMME 3. *Le type de $L \in \mathfrak{L}$ ne peut être distinct d'un des types suivants, si L est distinct de Z^n:*

(a) *si* $n = 3$, (4), (3), (2) (2) *ou* (2).

(b) *si* $n = 4$, (16), (12), (10)(2), (10), (9), (8)(2), (8), (7), (6)(3), (6)(2), (6), (5), (4)(4), (4)(2)(2), (4)(2), (4), (3)(3), (3), (2)(2)(2)(2), (2)(2)(2), (2)(2) *ou* (2).

Preuve. Elle résulte immédiatement de $e_1 e_2 \ldots e_n \leqslant m_n < n!$ et de $e_1 \leqslant p_n$ si l'on remarque, de plus, que, d'après la proposition 3(c), on a $e_1 \neq 11, 13, 14, 15$.

Démontrons maintenant la

PROPOSITION 4. *On a $m_3 = 4$ et $m_4 = 18$.*

Preuve. Pour $n = 3$, d'après le lemme 3, $m_3 \leqslant 4$; or $p_3 = 4$ d'où $m_3 = p_3 = 4$. Pour $n = 4$, nous allons prouver successivement $m_4 \geqslant 18$ et $m_4 \leqslant 18$.

(i) $m_4 \geqslant 18$. Il suffit de montrer qu'il existe un réseau R de type (6)(3) permis pour Ω_4. Le réseau R engendré par E_1, E_2, E_3, E_4, B_1, B_2 où $B_1 = \{6; 3, 1, 1, 1\}$ et $B_2 = \{3; 1, 1, -1, 0\}$ possède cette propriété.

Pour le voir, il faut vérifier que, pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, avec $\lambda_1 \in S_6$, $\lambda_2 \in S_3$, on a $\|\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2\| \geqslant 1$.

Comme B_1 et B_2 sont permis et que $\|\lambda_1 B_1 + B_2\| = \|-\lambda_1 B_1 - B_2\|$ il suffit de vérifier $\|\lambda_1 B_1 \pm B_2\| \geqslant 1$ pour $\lambda_1 > 0$. Or on voit facilement que

$$\|B_1 \pm B_2\| = \|2B_1 \pm B_2\| = \|3B_1 \pm B_2\| = 1.$$

Remarquons que R a pour base E_1, E_2, B_2, B_1 et que $\bar{\Omega}_4 \cap R$ contient, outre 0, 34 points: $E_1, E_2, E_3, E_4, B_1, 2B_1 - E_1, B_2, B_1 + B_2 - E_1, B_1 + B_2 - E_1 - E_2$, $B_1 - B_2$, $B_1 - B_2 - E_3$, $2B_1 + B_2 - E_1 - E_2$, $2B_1 - B_2 - E_1 - E_3$, $3B_1 + B_2 - 2E_1 - E_2$, $3B_1 + B_2 - 2E_1 - E_2 - E_4$, $3B_1 - B_2 - E_1 - E_3$, $3B_1 - B_2 - E_1 - E_3 - E_4$ et leurs symétriques par rapport à O.

(ii) $m_4 \leqslant 18$. D'après le lemme 3, il suffit de montrer que (10)(2) ne peut être le type d'un réseau $L \in \mathfrak{L}$.

D'après les résultats de **(1)**, on peut supposer, à une permutation près des indices 1, 2, 3, 4 et au remplacement près de certains des E_i par leurs opposés, que $B_1 = \{10; 4, 3, 2, 1\}$ et $B_2 = \{2; b_1, b_2, b_3, b_4\}$ avec $b_j = 0$ ou 1, pour $j = 1, 2, 3, 4$ (deux des b_j, au moins, étant non nuls car sinon B_2 n'est pas permis).

https://doi.org/10.4153/CJM-1965-073-9 Published online by Cambridge University Press

L'impossibilité du type (10)(2) résulte alors de

$$B_2 \in \hat{G}_1 \text{ si } B_2 = \{2; 0, 1, 0, 1\};$$
$$\|B_1 + B_2\| < 1 \text{ si } B_2 = \{2; 1, 1, 1, 0\}, \{2; 1, 1, 0, 1\}, \{2; 1, 1, 0, 0\} \text{ ou } \{2; 1, 0, 1, 0\};$$
$$\|2B_1 + B_2\| < 1 \text{ si } B_2 = \{2; 1, 1, 1, 1\}, \{2; 0, 1, 1, 1\} \text{ ou } \{2; 0, 1, 1, 0\};$$
$$\|3B_1 + B_2\| < 1 \text{ si } B_2 = \{2; 1, 0, 1, 1\} \text{ ou } \{2; 0, 0, 1, 1\};$$
$$\|4B_1 + B_2\| < 1 \text{ si } B_2 = \{2; 1, 0, 0, 1\}.$$

Le théorème 1 est maintenant complètement prouvé.

Remarque 1. Pour $n = 4$, on pourrait compléter l'étude faite par la détermination des types de réseaux effectivement obtenus pour $L \in \mathfrak{L}$.

Indiquons simplement

(i) qu'on obtient un réseau de type (8)(2) $\in \mathfrak{L}$ si $B_1 = \{8; 3, 3, 1, 1\}$ et si B_2 est l'un des points $\{2; 1, 0, 0, 1\}$, $\{2; 1, 0, 1, 0\}$, $\{2; 0, 1, 1, 0\}$ ou $\{2; 0, 1, 0, 1\}$;

(ii) qu'on obtient un réseau de type (6)(2) si $B_1 = \{6; 2, 2, 1, 1\}$ et si B_2 est l'un des quatre points cités en (i);

(iii) que le type (8)(2) et le type (6)(2) ne peuvent être obtenus pour un réseau de $\mathfrak{L}$ si B_1 est l'un des points $\{8; 4, 3, 2, 1\}$, $\{8; 4, 2, 1, 1\}$, $\{8; 3, 2, 2, 1\}$, $\{6; 3, 2, 1, 1\}$, $\{6; 3, 1, 1, 1\}$ ou $\{6; 3, 2, 2, 1\}$.

Remarque 2. Si l'on ne s'était pas servi de la proposition 1 d'où l'on a déduit $m_4 < 24$, on aurait pu seulement affirmer que $m_4 \leqslant 24$ et parmi les types énumérés au lemme 3(b) on aurait dû ajouter les deux types (12)(2) et (6)(2)(2). On peut vérifier directement l'impossibilité d'obtenir l'un de ces deux types pour un réseau de $\mathfrak{L}$.

Note (ajoutée aux épreuves). La proposition 1 est conséquence de la propriété suivante: dans R^n, si un empilement régulier d'ensembles congrus à un polyèdre K a la densité 1, les faces à $n - 1$ dimensions de K, et aussi K, admettent un centre de symétrie (cf. par ex. H. Groemer, *Über Zerlegungen des Euklidischen Raumes*, Math. Z., *79* (1962), 364–375).

Références

1. R. Bantegnie, *A propos d'un problème de Mordell sur les octaèdres latticiels*, J. London Math. Soc., *37* (1962), 320–328.

2. H. Minkowski, *Diophantische Approximationen* (New York, 1957).

3. L. J. Mordell, *Lattice octahedra*, Can. J. Math., *12* (1960), 297–302.

4. D. M. Y. Sommerville, *An introduction to the geometry of N dimensions* (New York, 1958).

5. K. H. Wolff, *Über kritische Gitter im vierdimensionalen Raum*, Monatsh. Math., *58* (1954), 38–56.

Institut de Mathématiques,
13 Place Philippe Lebon, Lille, France