Can. J. Math., Vol. XXVIII, No. 3, 1976, pp. 653–658

SYSTEMES FAIBLES DE TCHEBYCHEFF ET POLYNOMES DE BERNSTEIN

RICHARD BASTIEN ET SERGE DUBUC

1. Introduction. Nous allons montrer que tout système faible de Tchebycheff est voisin d'un système de Tchebycheff. Ce fait permet de prolonger aux systèmes faibles de Tchebycheff plusieurs résultats valides pour les systèmes de Tchebycheff, tels le théorème d'alternance et le théorème de de la Vallée-Poussin qui sont reliés au problème de la meilleure approximation uniforme par une fonction d'un système de Tchebycheff. Il arrive que certaines classes de fonctions splines forment un système faible de Tchebycheff. Pour ces classes, on pourra donc caractériser les meilleures approximations par des propriétés d'alternance de l'écart à la fonction à approcher.

2. Une propriété de régularité des polynômes de Bernstein. Soit $f(x)$ une fonction définie sur l'intervalle [0, 1], le polynôme de Bernstein de degré n associé à la fonction f est

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

On retrouve dans Lorentz [**3**] plusieurs propriétés remarquables des polynômes de Bernstein. Nous dirons que la fonction f change de signe au plus r fois sur [0, 1] si l'on ne peut pas trouver $(r + 2)$ nombres $x_0, x_1, \ldots, x_{r+1}$ tels que $0 \leqq x_0 < x_1 \ldots < x_{r+1} \leqq 1$, $f(x_i) \neq 0$ et les valeurs $\{f(x_i)\}_{i=0}^{r+1}$ alternent en signe. Le nombre de changements de signe de f sur [0, 1] est le plus petit des entiers naturels $r(\geqq 0)$ tel que f change de signe au plus r fois.

Polya et Schoenberg [**4**] ont démontré:

THÉORÈME 1. *Si $f(x)$ change de signe r fois sur* [0, 1] *et* $B_n(f; x) \not\equiv 0$, *alors la somme des multiplicités des racines à l'équation* $B_n(f; x) = 0$, $x \in (0, 1)$ *ne peut pas dépasser r.*

3. Systèmes faibles de Tchebycheff. Un système de fonctions sur (0, 1) de degré n est par définition un sous-espace vectoriel de dimension $n + 1$ de l'espace vectoriel des fonctions réelles défines sur $(0,1)$. Nous désirons comparer divers types de systèmes de fonctions, types I, II, III et IV. Pour un système S

Reçu le 18 septembre, 1975 et sous forme revisée, le 26 février, 1976.

Ce travail a été effectué alors que le premier auteur recevait l'appui financier du Conseil National de Recherches du Canada et le second celui du programme Killam du Conseil des Arts du Canada.

de fonctions sur $(0, 1)$ de degré n, on considérera les diverses conditions suivantes.

(I) Pour tout $f \in S - \{0\}$, le nombre de racines à l'équation $f(x) = 0$, $x \in (0, 1)$, ne dépasse pas n.

(II) Pour tout choix de $(n + 1)$ fonctions linéairement indépendantes $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ et pour tout choix de points $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ où $0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < 1$, le déterminant de la matrice $(f_i(x_j))$ n'est pas nul.

(III) Pour toute fonction f de $S - \{0\}$, le nombre de changements de signe de f sur $(0, 1)$ ne dépasse pas n.

(IV) Pour tout choix de $(n + 1)$ fonctions linéairement indépendantes $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$, on ne peut pas trouver deux suites croissantes dans $(0, 1)$, $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ telles que $\text{dét}(f_i(x_j)) < 0 < \text{dét}(f_i(y_j))$.

Un système de Tchebycheff sur $(0, 1)$ est par définition un système qui remplit la condition I. Comme Karlin et Studden [**2**] l'indiquent, les conditions I et II sont équivalentes. Nous montrerons dans la suite que les conditions III et IV sont équivalentes. Si pour un système de fonctions sur $(0, 1)$ de degré n, la condition III a lieu, on dira que le système satisfait au principe d'alternance. Un système de fonctions qui répond à la condition IV est appelé système faible de Tchebycheff par Karlin et Studden [**2**]. Dans un premier temps, nous verrons que la condition III est voisine de la condition I et que la condition IV est voisine de la condition II, le sens du mot voisinage sera déterminé ultérieurement.

THÉORÈME 2. *Soient $f_0, f_1, \ldots, f_n$, $n + 1$ fonctions définies sur $[0, 1]$ et soit K une partie de $[0, 1]$ telle que tous les points de K sont des points de continuité pour les fonctions f_i, $0 \leqq i \leqq n$, et telle que les fonctions f_i restreintes à K sont linéairement indépendantes, on suppose de plus que le système de fonctions sur $(0, 1)$, $S = \{\sum_{i=0}^n c_i f_i(x)\}$, satisfait au principe d'alternance. Si m est un entier naturel et si $S_m = \{B_m(f; x) : f \in S\}$, alors S_m est un système de Tchebycheff de degré n lorsque m est suffisamment grand et pour x de K et f de S, $B_m(f; x)$ converge vers $f(x)$ de façon uniforme sur K.*

Démonstration. S_m est l'image d'un espace vectoriel par une application linéaire, il s'agit donc d'un espace vectoriel. Il nous faut montrer d'abord que si m est suffisamment grand, la dimension de S_m est égale à $(n + 1)$. Les restrictions à K des fonctions f_i étant linéairement indépendantes, on peut trouver $(n + 1)$ nombres distincts de K, $\{x_j\}_{j=0}^n$, tels que dét $f_i(x_j) \neq 0$. Les hypothèses de continuité sur les f_i, impliquent que $\lim_{m\to\infty} B_m(f_i; x_j) = f_i(x_j)$. D'où il existe un entier M tel que si $m \geqq M$, $\text{dét}(B_m(f_i, x_j)) \neq 0$. Si $m \geqq M$, les fonctions $\{B_m(f_i; x)\}_{i=0}^n$ sont linéairement indépendantes sur K. Ces dernières fonctions sont des polynômes, et elles seront aussi linéairement indépendantes sur $(0, 1)$. La dimension de S_m est donc égale à $(n + 1)$ si $m \geqq M$.

Puisque S satisfait le principe d'alternance, le théorème 1 nous assure que S_m est un système de Tchebycheff de degré n lorsque $m \geqq M$. On sait aussi que

$B_m(f; x)$ converge uniformément sur K vers $f(x)$ si $f \in S$ et si x appartient à K puisque f est continue sur K.

THÉORÈME 3. *Un système de fonctions continues sur* (0, 1) *de degré n qui vérifie le principe d'alternance est un système faible de Tchebycheff.*

Démonstration. Soit $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ une base vectorielle d'un système S de fonctions continues sur (0, 1) de degré n qui vérifie le principe de l'alternance. On peut choisir $(n + 1)$ nombres de (0, 1), $\{x_j\}_{j=0}^n$ tels que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ et $\text{dét}\,(f_i(x_j)) = D \neq 0$. Soit $\{y_j\}_{j=0}^n$ $(n + 1)$ nombres de (0, 1) tels que $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$, si $E = \text{dét}(f_i(y_j))$ nous espérons montrer que $ED \geqq 0$. Posons $S_m = \{B_m(s, x) : s \in S\}$, $D_m = \text{dét}(B_m(f_i, x_j))$, $E_m = \text{dét}(B_m(f_i, y_j))$. Si m est suffisamment grand, S_m est un système de Tchebycheff et $D_mE_m \geqq 0$ car un système de Tchebycheff de fonctions continues remplit toujours la condition IV. Or $D = \lim_m D_m$ et $E = \lim_m E_m$, d'où $DE \geqq 0$ et la condition III implique la condition IV.

THÉORÈME 4. *Un système faible de Tchebycheff de fonctions continues sur* (0, 1) *de degré n vérifie toujours le principe d'alternace.*

Démonstration. Soit S un système faible de Tchebycheff de fonctions continues sur (0, 1) de degré n, montrons que S vérifie le principe de l'alternance en raisonnant par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une fonction f de S et des points de (0, 1), $\{x_j\}_{j=0}^{n+1}$ tels que $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$, $f(x_j) \neq 0$ et la suite $\{f(x_j)\}_{j=0}^{n+1}$ alterne en signe. Choisissons une base vectorielle de S, $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ où $f_0 = f$ et $(n + 1)$ nombres de (0, 1), $\{y_j\}_{j=0}^n$ tels que $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$ et $\text{dét}(f_i(y_j)) = D \neq 0$. Posons $S_m = \{B_m(s, x) : s \in S\}$ et montrons que pour m suffisamment grand, S_m est un système de Tchebycheff. Soit $\{w_j\}_{j=0}^n$ une suite croissante de points de (0, 1), et $E_m = \text{dét}(B_m(f_i, w_j))$. Evaluons E_m en utilisant la multilinéarité selon les colonnes

$$\begin{aligned} E_m &= \text{dét}\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f_i\left(\frac{k}{m}\right) w_j^{\,k}(1 - w_j)^{n-k}\right) \\ &= \sum E_m(k_0, k_1, \ldots, k_n) \end{aligned}$$

où $(k_0, k_1, \ldots, k_n)$ parcourt les diverses suites croissantes d'entiers compris entre 0 et m, et $E_m(k_0, k_1, \ldots, k_n)$ est la somme des termes

$$\left(\prod_{j=0}^{n} \binom{m}{k_j} (1 - w_j)^m\right) (\text{dét}(f_i(k_j/m)))F_\sigma$$

où σ est une permutation des entiers $0, 1, \ldots, n$ et

$$F_\sigma = (\text{sgn}\,\sigma) \prod_{j=0}^{n} \left|\frac{w_{\sigma(j)}}{1 - w_{\sigma(j)}}\right|^{k_j}.$$

Or la somme des F_σ lorsque σ parcourt les permutations des entiers $0, 1, \ldots, n$ donne le déterminant de la matrice

$$(\tau_i)^{k_j} \quad \text{où} \quad \tau_i = w_i/(1 - w_i).$$

Les combinaisons linéaires des fonctions $t^{k_0}, t^{k_1}, \ldots, t^{k_n}$ donnent un système de Tchebycheff sur $(0, \infty)$ (Karlin-Studden [**2**]). D'où dét$(\tau_i)^{k_j} \neq 0$. Par récurrence sur n, on peut montrer que ce dernier déterminant est positif: si on se permet de faire varier τ_n vers ∞, dét$(\tau_i)^{k_j}$ comme fonction de τ_n (en gardant fixe $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$) est un polynôme en τ_n dont le coefficient de la plus haute puissance de τ_n est dét$(\tau_i)^{k_j}$, $0 \leqq i \leqq n-1$, $0 \leqq j \leqq n-1$, ce qui est positif par récurrence. On a aussi que dét$(f_i(k_j/m))$ ne sont jamais des quantités de signes opposés. D'où $E_m(k_0, k_1, \ldots, k_n)$ prend toujours le même signe fixe et pour m suffisamment grand l'un des dét$(f_i(k_j/m))$ est non nul et a le même signe que D. Donc pour m assez grand, $E_m D > 0$ et S_m est un système de Tchebycheff.

Soit $\epsilon = \min\{|f(x_j)|\}_{j=0}^{n}$. On peut trouver un entier $m \geqq M$ tel que $|B_m(f, x_j) - f(x_j)| < \epsilon$, $j = 0, \ldots, n+1$. $B_m(f, x)$ serait un polynôme qui prendrait des valeurs qui alterneraient en signe aux points $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$. $B_m(f, x)$ s'annullerait donc au moins $(n+1)$ fois, d'où $B_m(f, x) \equiv 0$. Cela est impossible.

Les théorèmes 3 et 4 sont aussi valides pour des systèmes de fonctions discontinues. On procède alors comme suit. Soit $\{z_0, z_1, \ldots, z_k\}$ la suite croissante obtenue par la réunion des deux suites $\{x_j\}$ et $\{y_j\}$ que l'on réordonne après élimination des nombres qui peuvent se répéter. On introduit $(n+1)$ fonctions $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$. Si $x \in (z_j, z_{j+1})$, on pose $\phi_i(x) = f_i(z_j)$, $j = 0, 1, \ldots, k$ alors que $z_{k+1} = 1$ et si $x \in [0, z_0]$, $\phi_i(x) = 0$. Les théorèmes 3, 4 sont démontrés en utilisant les ϕ_i au lieu des f_i.

4. Propriétés d'alternance. Nous considérons un sous-espace vectoriel S de dimension $(n+1)$ de fonctions réelles définies sur l'intervalle fermé [0, 1], nous allons supposer que la famille S vérifie le principe d'alternance sur [0, 1]:

[III]: Pour toute fonction non identiquement nulle f de S, le nombre de changements de signe de f sur [0, 1] ne dépasse pas n.

Nous allons vérifier que plusieurs résultats valides pour les systèmes de Tchebycheff sur [0, 1] se prolongent aux systèmes qui vérifient le principe de l'alternance.

THÉORÈME 5. *Soit S un système de fonctions sur* [0, 1] *de degré n qui vérifie le principe d'alternance, soient ϕ et f deux fonctions sur* [0, 1] *et* $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ *tels que* $f \in S$, $0 \leqq x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqq 1$,

$$(-1)^i(\phi(x_i) - f(x_i)) > 0 \quad (0 \leqq i \leqq n+1),$$

alors pour tout g de S

$$\sup\{|\phi(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\} \geqq \min\{|\phi(x_i) - f(x_i)|\}_{i=0}^{n+1}.$$

Démonstration. Soit $\epsilon = \min\{|\phi(x_i) - f(x_i)|\}_{i=0}^{n+1}$, si l'on avait $|\phi(x) - g(x)| < \epsilon$ pour tout x, on aurait $(-1)^i(g(x_i) - f(x_i)) = [(g(x_i) - \phi(x_i)) + (\phi(x_i) -$

https://doi.org/10.4153/CJM-1976-065-7 Published online by Cambridge University Press

$f(x_i))] > 0$. La fonction $g - f$ connaîtrait $(n + 1)$ alternances de signes. D'où $g = f$, ce qui entraînerait une contradiction.

COROLLAIRE. *Sous les mêmes hypothèses sur* S, ϕ *et* f *et si de plus la fonction* $\phi(x) - f(x)$ *prend les valeurs* $\pm\, ||\phi - f||_\infty$ *de façon alternée en* $(n + 2)$ *points consécutifs, alors* f *est une meilleure approximation de* ϕ *par un élément de* S.

Le théorème est le premier volet du théorème d'alternance de de la Vallée Poussin pour les systèmes de Tchebycheff (cf. Bernstein [**1**], par exemple). Venons-en au deuxième volet.

THÉORÈME 6. *Soit* S *un système de fonctions continues sur* $[0, 1]$ *de degré* n, *qui vérifie le principe de l'alternance, soit* ϕ *une fonction continue sur* $[0, 1]$, *alors il existe une fonction* f *de* S *telle que* $\phi(x) - f(x)$ *prend les valeurs* $\pm\, ||\phi - f||_\infty$ *de façon alternée en au moins* $(n + 2)$ *points consécutifs.*

Démonstration. On peut supposer que $\phi \notin S$. Soit $\epsilon = \inf\{||\phi - f|| : f \in S\}$, on a que $\epsilon > 0$. Introduisons une suite de fonctions convexes sur S: soit

$$p_k(f) = \sup\{|\phi(x) - B_k(f;x)| : 1/k \leqq x \leqq 1 - 1/k\}.$$

Posons $\epsilon_k = \inf\{p_k(f) : f \in S\}$; vu que les polynômes de Bernstein $B_k(f)$ convergent uniformément sur $[0, 1]$ vers f, sur toute partie bornée de S, $p_k(f)$ converge uniformément vers $||\phi - f||$ et ϵ_k tend vers ϵ lorsque k tend vers l'infini.

Vu le théorème 2, $\{B_k(f;x)\}_{f\in S}$ est un système de Tchebycheff sur l'intervalle $[1/k, 1 - 1/k]$ si k est suffisamment grand. Si k est suffisamment grand, il existe une seule fonction f_k de S telle que $p_k(f_k) = \epsilon_k$. Montrons que les f_k sont uniformément bornées: si ce n'était pas le cas on pourrait trouver une suite croissante d'entiers k_j et une fonction non-nulle g de S telle que $f_{k_j}/||f_{k_j}|| \to g$; d'où $(\phi(x) - B_{k_j}(f_{k_j};x))/||f_{k_j}||$ convergerait vers zéro ainsi que vers $g(x)$, ce qui est contradictoire.

On peut trouver une partie A de l'ensemble des entiers naturels et une fonction f de S telles que f_k convergent vers f lorsque k tend vers l'infini en parcourant A. Soit $g_k = B_k f_k$, par le théorème de l'alternance, on peut trouver $(n + 2)$ points consécutifs, $\{x_{i,k}\}_{i=0}^{n+1}$, de l'intervalle $[1/k, 1 - 1/k]$ tels qu'à ces endroits $\phi(x) - g_k(x)$ prend de façon alternée les valeurs $\pm\epsilon_k$. Montrons que deux points consécutifs $x_{i,k}$ et $x_{i+1,k}$ ne peuvent jamais se rapprocher indéfiniment lorsque k tend vers l'infini. Plus précisément, si (x, x') est un point d'accumulation de la suite $\{(x_{i,k}, x_{i+1,k})\}_{k=1}^{\infty}$, alors $x \neq x'$:

$$\phi(x_{i,k}) - g_k(x_{i,k}) - \phi(x_{i+1,k}) - g_k(x_{i+1,k}) = \pm 2\epsilon_k$$

$$\phi(x) - \phi(x') - f(x) + f(x') = \pm 2\epsilon$$

et ainsi $x \neq x'$.

De ce fait, il suit que la fonction $\phi(x) - f(x)$ prend de façon alternée les valeurs $\pm 2\epsilon$ en au moins $(n + 2)$ points.

Rice [**5**] et Schumaker [**6**] ont déjà étudié en détails le problème de caractériser une meilleure approximation d'une fonction continue, au sens de la norme uniforme, par une fonction spline. Notre article montre, en particulier, que nous pouvons également trouver une meilleure approximation uniforme d'une fonction continue qui soit de la forme

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(x - x_i)_+{}^k, \quad 0 < x_1 < \ldots < x_n < 1,$$

puisque l'ensemble $\{1, (x - x_1)_+{}^k, \ldots, (x - x_n)_+{}^k\}$ est un système faible de Tchebycheff [**2**].

Bibliographie

1. S. Bernstein, *L'approximation* (Bronx, Chelsea, New York, 1970).

2. S. Karlin and W. Studden, *Tchebycheff systems with applications in analysis and statistics* (Interscience, New York, 1966).

3. G. Lorentz, *Bernstein polynomials* (University of Toronto Press, Toronto, 1953).

4. G. Polya and I. J. Schoenberg, *Remarks on the la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle*, Pac. J. Math. *8* (1958), 295–334.

5. J. R. Rice, *Characterization of Chebyshev approximation by splines*, SIAM J. Numer. Anal. *4* (1967), 557–565.

6. L. Schumaker, *Uniform approximation by Chebyshev spline functions, II: Free knots*, SIAM J. Numer. Anal. *5* (1968), 647–656.

Université de Montréal,
Montréal, Québec