*Adv. Appl. Prob.* **18,** 283–287 (1986)
*Printed in N. Ireland*


# ETUDE D'UNE FILE *GI/G/1* À SERVICE AUTONOME (AVEC VACANCES DU SERVEUR)

C. FRICKER,* *Université Paris VI*

**Abstract**

The purpose of this letter is to study a modified $GI/G/1$ queueing system in which the server becomes unavailable for (independent) random periods each time he is free. This problem was first studied by Gelenbe and Iasnogorodski [6] who obtained the stationary law of the waiting time of a customer. We construct a simple probabilistic model coupling a $GI/G/1$ queue with an autonomous server (in Borovkov's terminology [1]) with a $GI/G/1$ queue of classical type having the same characteristics, to compare them stochastically. We prove that the waiting time is a Markov chain, using a renewal process property which has not previously been noted.

## Introduction

L'objet de ce travail est d'étudier les attentes des clients dans la file $GI/G/1$ modifiée par le fait que le serveur prend des vacances (de durées indépendantes équidistribuées) chaque fois qu'il est libre. Ce problème a déjà été étudié par Gelenbe et Iasnogorodski [6] qui obtiennent la loi stationnaire par une méthode analytique. Notre but est de construire un modèle probabiliste simple qui couple une file $GI/G/1$ modifiée par des vacances du serveur que l'on notera $GI/G/1/V$ et une file $GI/G/1$ classique de manière à pouvoir les comparer trajectoire par trajectoire et non seulement en loi. Ce qui nous permet d'établir la propriété de chaîne de Markov du temps d'attente, et de retrouver sa loi stationnaire.

Pendant le travail du rapporteur, un article de Doshi [4] a été publié démontrant le résultat de Gelenbe et Iasnogorodski [6] par une méthode analogue à la nôtre, s'intéressant aux différentes hypothèses où le théorème limite s'applique, et à une application à un modèle voisin: une file $GI/G/1$ modifiée par un temps de préparation du serveur: $GI/G/1/S$. Notre travail a l'originalité d'établir que certaines variables dont des variables couplées sont des chaînes de Markov (proposition 2, théorème 4). La proposition 2 est en outre une propriété originale de théorie du renouvellement. Ces deux résultats ne figurent pas dans l'article de Doshi.

## 1. La file classique $CI/G/1$: modèle et notations

Soient $\sigma_n$, $\tau_n (n \in \mathbb{N})$ et $w_0$ des variables aléatoires réelles positives indépendantes de lois respectives $\mu_\sigma$, $\mu_\tau$ et $\mu_0$. Les variables $\sigma_n$ représentent les demandes de service des clients arrivant aux instants respectifs $T_n = \tau_0 + \cdots + \tau_{n-1} (n \in \mathbb{N})$ $(T_0 = 0)$ dans la file

Received 18 February 1985; revision received 2 December 1985.
* Postal address: Université Paris VI, Laboratoire de Probabilités, 4 Place Jussieu—Tour 56, 75230 Paris Cedex 05, France.

d'attente à un serveur opérant suivant la discipline premier arrivé, premier servi (modèle $GI/G/1$); la variable $w_0$ représente le temps d'attente éventuellement nul du client initial. Les attentes $w_n (n \in \mathbb{N})$ des clients successifs sont alors données par la formule de récurrence

$$(1) \qquad w_{n+1} = (w_n + \sigma_n - \tau_n)^+ \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

qui entraîne que la suite $(w_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov relative à la filtration $\{\mathcal{G}_n = \tau(w_0, \sigma_k, \tau_k, k < n), n \in \mathbb{N}\}$. Nous supposerons dorénavant que $E\sigma_0 < E\tau_0 < \infty$ auquel cas l'état 0 est récurrent pour cette chaîne et nous désignerons par $(\nu_k, k \in \mathbb{N})$ la suite croissante des indices $n$ pour lesquels $w_n = 0$; elle est définie par récurrence par:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \nu_0 &= \inf\left\{p > 0 : w_0 + \sum_{0 \leq i < p} \sigma_i - \tau_i < 0\right\} \\ \nu_{k+1} &= \inf\left\{p > \nu_k : \sum_{\nu_k \leq i < p} \sigma_i - \tau_i < 0\right\} \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Nous désignerons aussi par $l_n$ le temps total de liberté du serveur pendant l'intervalle $[0, T_n[$; la suite $(l_n, n \in \mathbb{N})$ peut être définie par récurrence:

$$(3) \qquad l_0 = 0, \; l_{n+1} - l_n = (w_n + \sigma_n - \tau_n)^- \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Posons $L_k = l_{\nu_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et donc

$$(4) \qquad L_0 = \sum_{0 \leq i < \nu_0} (\tau_i - \sigma_i) - w_0, \; L_{k+1} - L_k = \sum_{\nu_k \leq i < \nu_{k+1}} (\tau_i - \sigma_i) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Les formules (2) et (4) entraînent que $(\nu_k, L_k, k \in \mathbb{N})$ est un processus de renouvellement relativement à la filtration $(\mathcal{L}_k = \mathcal{G}_{\nu_k}, k \in \mathbb{N})$. Notons $L$ une variable aléatoire de loi $\mu_L$, la loi commune des $L_{k+1} - L_k (k \in \mathbb{N})$.

## 2. Modelisation de la file $GI/G/I/V$

Pour construire ensuite le modèle avec vacances, donnons-nous un processus de renouvellement $(V_p, \mathcal{V}_p, p \in \mathbb{N})$ défini sur $\mathbb{R}^+$ indépendant de $\mathcal{G}_\infty = \bigvee_{n \in N} \mathcal{G}_n$ de loi $\mu_V$ et de mesure d'équilibre $\rho_V$ (c'est-à-dire que $\rho_V$ a pour densité

$$\frac{\mu_v(]x, +\infty[)}{m} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue où on suppose que $m = \int x \, d\mu_V(x)$ est strictement positive et finite). $(V_p, p \in \mathbb{N})$ est dit stationnaire si $V_0$ suit la loi $\rho_V$. Pour tout $x$ réel nous noterons $V(x)$ le dépassement de $x$ par la suite croissante $(V_p, p \in \mathbb{N})$, soit

$$(5) \qquad V(x) = V_{\alpha_x} - x$$

où $\alpha_x$ est le temps d'arrêt défini par $\inf\{p \in \mathbb{N} : V_p \geqq x\}$ de la filtration $(\mathcal{V}_p, p \in \mathbb{N})$ (définition dans [3]).

Les attentes des clients lorsque le serveur prend chaque fois qu'il en est libre une période de vacances $V_{p+1} - V_p$ de durée aléatoire de loi $\mu_V$, indépendante de toutes les autres variables aléatoires du modèle sont alors données par les variables aléatoires $W_n$ du lemme suivant, qu'on démontre facilement.

*Lemme* 1. *La suite des variables aléatoires $W_n = w_n + V(l_n)$, $n \in \mathbb{N}$ obéit à la formule* *de récurrence*

$$W_{n+1} = (W_n + \sigma_n - \tau_n) + V_{\alpha_{l_{n+1}}} - V_{\alpha_{l_n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

*dans laquelle* $\alpha_{l_{n+1}}$ *coincide avec le plus petit entier* $p \geqq \alpha_{l_n}$ *tel que*

$$W_n + \sigma_n - \tau_n + V_p - V_{\alpha_{l_B}2n} \geqq 0.$$

(*En particulier si la variable aléatoire* $W_n + \sigma_n - \tau_n$ *est positive,* $W_{n+1}$ *lui est égale, si* $W_n + \sigma_n - \tau_n$ *est strictement négative,* $W_{n+1}$ *s'obtient en ajoutant à* $W_n + \sigma_n - \tau_n$ *autant de variables aléatoires* $V_{\alpha_{l_n}+p+1} - V_{\alpha_{l_n}+p}$ *qu'il en faut pour rendre la somme positive, ces dernières étant indépendantes, équidistribuées de loi* $\mu_V$).

Introduisons une filtration $(\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N})$ à laquelle $(V(L_k), k \in \mathbb{N})$ soit adaptée. Soit $\mathcal{F}_k^p = \mathcal{L}_k \vee \mathcal{V}_p$ pour tout $(k, p)$ de $\mathbb{N}^2$. Pour tout $k$ fixé, $\alpha_{L_k}$ est un temps d'arrêt presque sûrement fini par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k^p, p \in \mathbb{N})$ et nous pouvons poser $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k^{\alpha_{L_k}}$. On vérifie aisément que $(\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N})$ est une filtration en remarquant que

$$\mathcal{F}_k^{\alpha_{L_k}} \subset \mathcal{F}_{k+1}^{\alpha_{L_k}} \subset \mathcal{F}_{k+1}^{\alpha_{L_{k+1}}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Intéressons-nous aux variables aléatoires $W_n$, seulement aux instants $\nu_k$. On peut remarquer qu'elles ont une forme simple puisque $w_{\nu_k} = 0$ et que $l_{\nu_k} = L_k$ qui est

$$W_{\nu_k} = V(L_k) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

De plus elles permettent de retrouver $W_n - w_n$ pour tout entier naturel $n$ par

$$W_n = w_n + V(L_k) \quad \text{si} \quad \nu_k \leqq n < \nu_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad W_n = w_n + V_0 \quad \text{si} \quad 0 \leqq n < \nu_0.$$

Le théorème central est celui qui établit la propriété de chaîne de Markov (définition 2.3, chapitre I de [7]) de la différence des temps d'attente de la file avec vacances et de la file classique mais indexée par l'indice des périodes de service ininterrompu.

*Proposition* 2.

(1). $(V(L_k), \mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N})$ *est une chaîne de Markov de probabilité de transition* $\pi$ *sur* $\mathbb{R}^+$, *si* $\pi(x, .)$ *est la loi de* $V(L - x + V_0)$ $(x \in \mathbb{R}_+)$.

(2). *Si de plus* $(V_p, \mathcal{V}_p, p \in \mathbb{N})$ *est stationnaire alors la chaîne de Markov* $(V(L_k), \mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N})$ est stationnaire de loi $\rho_V$ et donc $\rho_V = \int \pi(x, .)\, d\rho_V(x)$.

(3). *Si* $\mu_V$ *n'est pas arithmétique,* $(V(L_k), \mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N})$ *converge en loi vers* $\rho_V$ *qui est par suite l'unique solution de* $\rho = \int \pi(x, .)\, d\rho(x)$ (*i.e. l'unique mesure invariante de* $(V(L_k), \mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N})$).

*Démonstration.* Soit $\phi$ la fonction borélienne de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x, l, (u_p, p \in \mathbb{N}^*)) = x - l + \sum_{0<j\leqq i} u_j$$

où $i$ est le plus petit entier $p \geqq 0$ tel que $\sum_{0<j\leqq p} u_j \geqq l - x$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$V_{\alpha_{L_k}+p} - L_{k+1} = V(L_k) - (L_{k+1} - L_k) + (V_{\alpha_{L_k}+p} - V_{\alpha_{L_k}}) \quad (p \in \mathbb{N})$$

est positif ou nul si et seulement si $p \geqq \alpha_{L_{k+1}} - \alpha_{L_k}$ et vaut $V(L_{k+1})$ pour $p = \alpha_{L_{k+1}} - \alpha_{L_k}$ par définition de $\alpha_{L_{k+1}}$. Ainsi en posant $V^p(L_k) = V_{\alpha_{L_k}+p} - L_k, p \in \mathbb{N}$:

$$V(L_{k+1}) = \phi(V(L_k), L_{k+1} - L_k, (V^p(L_k) - V^{p-1}(L_k), p \in \mathbb{N}^*)) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dans cette expression, $L_{k+1} - L_k$ est indépendante de $\mathcal{F}_k^\infty$ donc de la sous-tribu $\mathcal{F}_k$, et $(V^p(L_k) - V^{p-1}(L_k),\ p \in \mathbb{N}^*)$ est indépendante de $\mathcal{F}_k$ car $L_k$ est indépendante de $(V_p, p \in \mathbb{N})$ donc $\alpha_{L_k}$ est fini presque sûrement et $(V^p(L_k), p \in \mathbb{N})$ est un processus de renouvellement de loi $\mu_V$, stationnaire si $(V_p, p \in \mathbb{N})$ l'est. De cette décomposition on déduit par un raisonnement classique que $(V(L_k),\ \mathscr{F}_k,\ k \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov.

Comme ni la loi de $L_{k+1} - L_k$ ni celle de $(V^p(L_k) - V^{p-1}(L_k),\ p \in \mathbb{N}^*)$ ne dépendent de $k$, la probabilité de transition est stationnaire. Calculons-la. Lorsque $V(L_k) = x$, $V(L_{k+1})$ a même loi que $\phi(x, L, (V_p - V_{p-1}, p \in \mathbb{N}^*)) = V(L - x + V_0)$ soit $\pi(x, .)$.

(2) est clair car si $(V_p, p \in \mathbb{N})$ est stationnaire, pour tout $k \in \mathbb{N} V(L_k) = V^0(L_k)$ a pour loi $\rho_V$.

## 3. Etude du temps d'attente de la file avec vacances, couplage des deux files

*Proposition* 3.

(1). *Si $w_0$ est tel que $(w_n, n \in \mathbb{N})$ est stationnaire, si $(V_p, p \in \mathbb{N})$ est stationnaire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(w_n, W_n - w_n)$ a pour loi $\mu_w \otimes \rho_V$ et $w_n$, $W_n - w_n$ sont indépendantes. Par suite $W_n$ a pour loi $\mu_w * \rho_V$.*

(2). *Sinon, si $\mu_V$ n'est pas arithmétique, $(w_n, W_n - w_n, n \in \mathbb{N})$ converge en loi vers $\mu_w \otimes \rho_V$. Par suite $(W_n, n \in \mathbb{N})$ converge en loi vers $W$ de loi $\mu_w * \rho_V$.*

La démonstration est analogue à celle faite dans [4] (lemme 2 et théorème 1, H1 et H3).

Pour établir que $(w_n, W_n - w_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov, il faut introduire une filtration $(\mathscr{C}_n, n \in \mathbb{N})$ à laquelle $(V(l_n), n \in \mathbb{N})$ soit adaptée et le fait que $(W_n, n \in \mathbb{N})$ est aussi une chaîne de Markov peut s'en déduire à condition de calculer la probabilité de transition de $(w_n, W_n - w_n, \mathscr{C}_n, n \in \mathbb{N})$.

Soit donc $\mathscr{C}_n^p = \mathscr{G}_n \vee \mathscr{V}_p$ pour tout couple $(n, p)$ de $\mathbb{N}^2$. Pour tout $n$, $\alpha_{l_n}$ est un temps d'arrêt presque sûrement fini par rapport à la filtration $(\mathscr{C}_n^p, p \in \mathbb{N})$ et nous pouvons poser $\mathscr{C}_n = \mathscr{C}_n^{\alpha_{l_n}}$. De même que pour $(\mathscr{F}_k, k \in \mathbb{N})$, on montre que $(\mathscr{C}_n, n \in \mathbb{N})$ est une filtration et que $(w_n, V(l_n), n \in \mathbb{N})$ est adaptée à $(\mathscr{C}_n, n \in \mathbb{N})$.

*Théorème* 4.

(1). *$(w_n, W_n - w_n, \mathscr{C}_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition $P$ telle que $P_{x,y}$ soit la loi de $((x + \sigma - \tau)^+,\ y - (x + \sigma - \tau)^- + V_{\mu_{x+y+\sigma-\tau}} - V_0)$ où $\mu_a$ est le plus petit entier $p$ positif ou nul tel que $a + V_p - V_0 \geqq 0$.*

(2). *$(W_n, \mathscr{C}_n, n \in \mathbb{N})$ est par suite une chaîne de Markov de probabilité de transition $P'$ si $P'(r, .)$ est la loi de $V(-r - \sigma + \tau + V_0)$.*

Ce théorème peut être démontré en raisonnant de façon identique à la proposition 2.

## Bibliographie


[1] Borovkov, A. A. (1976) *Stochastic Processes in Queueing Theory*. Applications of Mathematics **4,** Springer-Verlag, New York.

[2] Cohen, J. W. (1976) *On Regenerative Processes in Queueing Theory*. Springer-Verlag, New York.

[3] Dellacherie, C. et Meyer, P. A. (1975) *Probabilités et potentiel,* (ed. refondue) **1,** chapitres 1–4; **2,** chapitres 5–8, Paris.

[4] Doshi, B. T. (1985) A note on stochastic decomposition in a *GI/G/*1 queue with vacations or set-up times. *J. Appl. Prob.* **22,** 419–428.

[5] Feller, W. (1966) *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* Vol. 2, Wiley, New York.

[6] Gelenbe, E. et Iasnogorodski, R. (1980) A queue with server of walking type (autonomous service). *Ann. Inst. H. Poincaré.* **16,** 63–73.

[7] Revuz, D. (1975) *Markov Chains.* North Holland, Amsterdam.