

REDUCTION DES POINTS SINGULIERS DES
FEUILLETAGES A SINGULARITES
NON DEGENEREEES DE M^3

PAR
E. WAGNEUR

1. **Introduction.** Soit M une variété réelle de classe C^∞ (connexe, paracompacte) et ω une un-forme complètement intégrable sur M ($\omega \wedge d\omega = 0$). On admet qu'en certains points, dits singuliers, la un-forme peut s'annuler. Désignons par $J_\omega(A)$ la matrice jacobienne de ω en un tel point A . Un point singulier A de ω est *non dégénéré* si le rang de $J_\omega(A)$ est maximum. Il est clair que ces singularités sont toujours isolées dans M .

Les variétés intégrales maximales de ω sont les feuilles d'un feuilletage à singularités de M . Si ω est régulière, le feuilletage ainsi défini est toujours (transversalement) orientable. Cette propriété subsiste lorsque ω s'annule en certains points isolés.

DÉFINITION. Un *feuilletage à singularités non dégénérées* \mathcal{F} de M est la donnée d'une un-forme complètement intégrable sur M dont tous les points singuliers sont non dégénérés.

Par feuilletage, nous entendrons toujours un feuilletage à singularités non dégénérées. Si l'ensemble singulier S est vide, nous préciserons s'il y a lieu que \mathcal{F} est régulier.

Dans une carte convenable, le développement Taylorien de ω au voisinage de A donne $\omega(x) = \frac{1}{2}d(\sum \varepsilon_i x_i^2) + o(|x|^2)$, où $\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \leq i \leq \dim M$.

DÉFINITION. On dit que A est *sphérique* ou *conique* suivant que la forme quadratique locale $\sum \varepsilon_i x_i^2$ est définie ou non (cette condition est indépendante de la carte choisie).

On considère que les points singuliers coniques appartiennent à des feuilles singulières définies comme suit. $F \in \mathcal{F}$ est dite *singulière* si elle est l'union d'une feuille (connexe) F' du feuilletage régulier induit par ω sur $M - S$ et des points singuliers B (nécessairement coniques) tels que $F' \cup \{B\}$ est connexe par arcs. Une feuille singulière peut donc contenir plusieurs points singuliers coniques et un tel point appartenir à plus d'une feuille singulière.

Lorsque M est compacte, \mathcal{F} n'a qu'un nombre fini de points singuliers. Nous désignerons par s (resp. par c) le nombre de points singuliers sphériques (resp. coniques) de F .

Reçu par les rédacteurs mars 29, 1974; version révisée reçu le novembre 4, 1974.

Dans tout ce travail, on supposera M compacte et $\dim M = 3$. On a alors, d'après le théorème de l'indice, $s + c \equiv 0 \pmod{2}$.

La plupart des résultats figurant ici sont tirés de ([5] Ch. III). On a les trois propositions suivantes:

THÉORÈME 1. *Si $s \geq 1$, $c \geq 1$, pour tout point singulier sphérique A on peut trouver deux compacts $K \subset K'$ contenant A et au moins un point conique B et il existe un feuilletage \mathcal{F}' de M tels que:*

- (i) $\mathcal{F}' \mid M - K'$ est difféomorphe à $\mathcal{F} \mid M - K$
- (ii) $s' = s - 1$, $c' = c - 1$
- (iii) A et B sont des points réguliers de \mathcal{F} .

REMARQUE. \mathcal{F}' n'est pas nécessairement défini par une un-forme globale (voir la remarque 3 p. 8).

THÉORÈME 2. *Si $s \geq c$, tout point singulier conique appartient à une feuille compacte adhérente à une union de feuilles difféomorphes à S^2*

THÉORÈME 3. *On a toujours $s \leq c + 2$. De plus, si $s = c + 2$ alors*

- (i) $M \simeq S^3$
- (ii) toutes les feuilles sont compactes
- (iii) toute feuille régulière est difféomorphe à S^2 .

2. Réduction des singularités. Supposons M munie d'une métrique riemannienne. Elle détermine un produit scalaire sur $T_x M$ en tout point $x \in M$. D'où un M -isomorphisme $\phi: TM \rightarrow T^*M$ défini par

$$\phi(X)(Y) = \langle X, Y \rangle \text{ en tout point } x \in M.$$

Inversement, ϕ^{-1} associe à toute un-forme ω un champ de vecteurs vérifiant la condition de transversalité suivante:

DÉFINITION. Un champ de vecteurs X sur M est dit *transverse* à ω (ou à \mathcal{F}) si

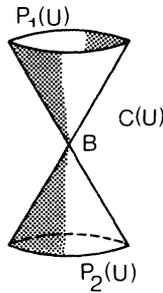
- (i) $X_A = 0$, $A \in S$
- (ii) $\omega(X) > 0$ en tout point de $M - S$

Une courbe intégrale (ou un segment d'une telle courbe) d'un champ transverse à \mathcal{F} est alors appelée une transversale. Elle est fermée si elle correspond à une trajectoire périodique.

Localement un point singulier conique B est le sommet d'une "cône" Σ formé de deux feuilles singulières. Soit U un voisinage convenable de B .

Σ sépare U en trois composantes connexes: deux composantes paraboliques $\mathcal{P}_1(U)$, $\mathcal{P}_2(U)$ homéomorphes à la boule ouverte B^3 et une composante cylindrique $\mathcal{C}(U)$ homéomorphe à la couronne cylindrique $S^1 +]0, 1[\times]0, 1[$.

Pour tout point singulier sphérique A , il existe un disque D_A régulièrement plongé dans M tel que le feuillage induit sur D_A est le feuilletage du disque D^3



avec un point sphérique pour seule singularité et dont toutes les feuilles sont difféomorphes à S^2 (voir G. Reeb [4] p. 145).

Si F est une feuille difféomorphe à S^2 , d'après le théorème de stabilité de Reeb, les feuilles voisines sont encore des sphères. On désigne alors par $\Omega(F)$ l'union de toutes les feuilles difféomorphes à S^2 telle que $\Omega(F)$ est le plus grand connexe contenant F . Lorsque $\bar{\Omega}(F)$ contient un point sphérique A , on note $\Omega_A = \Omega(F) \cup \{A\}$. On montre facilement que

(i) $\Omega(F)$ est difféomorphe à $S^2 \times]0, 1[$ ou à $S^2 \times S^1$ (et dans ce cas $\Omega(F) = M$ par connexité).

(ii) $\Omega_A = \Omega(F) \cup \{A\}$ est difféomorphe à la boule unité

$$B^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \sum_i x_i^2 < 1 \right\}.$$

(iii) Si $\bar{\Omega}(F) \neq M$ alors $\partial\bar{\Omega}(F) = \bar{\Omega}(F) - \Omega(F)$ contient au moins un point singulier conique.

(iv) Si F est une feuille compacte qui sépare M en deux composantes connexes, il n'existe pas de transversale fermée coupant F (on passe au feuilletage régulier induit sur $M - S$ et on applique le même argument que dans la proposition classique de A. Haefliger [1] p. 385).

LEMME 1. Si $F \approx S^2$ sépare M en deux composantes connexes, pour tout point conique $B \in \bar{\Omega}(F)$ il existe un voisinage U de B tel que

$$\Omega(F) \cap \mathcal{C}(U) \neq \emptyset \Rightarrow \Omega(F) \cap \mathcal{P}_i(U) = \emptyset, \quad i = 1, 2.$$

DÉMONSTRATION. $\Omega(F) \approx S^2 \times]0, 1[$ (i) ci-dessus). On peut supposer que les feuilles qui rencontrent $\mathcal{C}(U)$ correspondent à $S^2 \times \{t\}$, $t \in]0, \varepsilon[$. Il est clair que pour ε assez petit, et U convenablement choisi, une feuille F_t correspondant à $S^2 \times \{t\}$ pour $t < \varepsilon$ ne peut rencontrer $\mathcal{P}_i(U)$ ($i = 1, 2$). Sinon, on pourrait trouver une petite transversale coupant F_t dans $\mathcal{C}(U)$ et dans l'un des $\mathcal{P}_i(U)$. On vérifie alors facilement que la construction de ([2], 339-08) peut être appliquée pour définir une transversale fermée coupant F_t (ce qui contredirait (iv) ci-dessus).

Mais les feuilles correspondant à $S^2 \times \{t\}$, $1 - \varepsilon < t < 1$ ne peuvent rencontrer les $\mathcal{P}_i(U)$ ($i = 1, 2$). En effet, dans le cas contraire, pour une petite transversale τ coupant le cône de B en un point $C \neq B$, on aurait $\tau - \{C\} \subset \Omega(F)$ avec $F_t \cap \tau \neq \emptyset$ pour tout $t \in]0, \varepsilon[\cup]1 - \varepsilon, 1[$. Une telle transversale pourrait alors se prolonger à une transversale fermée coupant toutes les feuilles de $\Omega(F)$. Ceci contredirait encore (iv) ci-dessus.

LEMME 2.- Avec les hypothèses du lemme précédent, si $\Omega(F) \cap \mathcal{C}(U) \neq \emptyset$ pour tout voisinage U de B , alors B appartient à deux feuilles singulières de \mathcal{F} .

DÉMONSTRATION. Considérons un voisinage U de B vérifiant le lemme 1 et un champ de vecteurs X transverse à \mathcal{F} . On peut supposer X orienté de telle manière qu'en tout point de $\mathcal{C}(U)$ il pointe en direction du cône Σ de B . Soit V^s la variété stable de $X|_U$ relativement à B . On peut trouver un homéomorphisme de U sur la boule unité centrée à l'origine de \mathbf{R}^3 qui envoie B sur 0 , les feuilles de $\omega|_U$ sur les variétés de niveau de la fonction $f(x) = u^2 + v^2 - z^2$ et V^s sur l'ouvert $0 \leq u^2 + v^2 < 1$ du plan $z = 0$ (où u, v, z sont les coordonnées canoniques de \mathbf{R}^3). On pourra donc définir une famille de lacets $\theta_t: S^1 \rightarrow \mathcal{C}(U)$ tels que, pour tout $t > 0$ fixé, θ_t est un lacet sur une feuille $F_t \subset \Omega(F)$. Un tel lacet sépare F_t en deux composantes connexes: F_t^0, F_t^1 .

Soient P_0, P_1 deux points appartenant à des composantes connexes distinctes de $\Sigma - \{B\} = U \cap (\partial\bar{\Omega}(F) - \{B\})$. Si $\partial\bar{\Omega}(F) - \{B\}$ était connexe il existerait un chemin $c: I \rightarrow \partial\bar{\Omega}(F) - \{B\}$ joignant P_0 à P_1 (où $I = [0, 1]$). Mais un tel chemin pourrait se relever (à l'aide du champ X) en un chemin $c_t: I \rightarrow F_t - \theta_t(S^1)$ tel que $c_t(i) \in F_t^i$, $i = 0, 1$. D'où la contradiction.

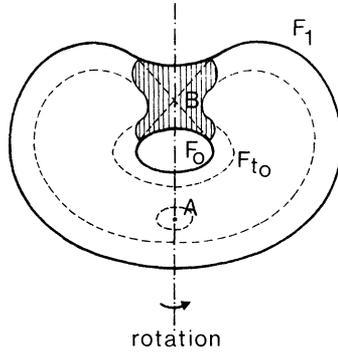
LEMME 3. Soient A un point sphériques, $B \in \bar{\Omega}_A$ un point conique et U un voisinage de B tel que

$$\Omega_A \cap U = \mathcal{C}(U).$$

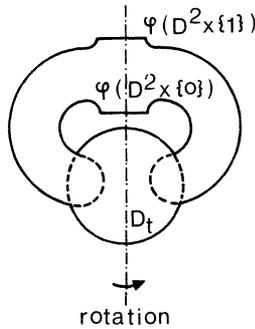
Il existe alors un plongement régulier $\varphi: D^2 \times I \rightarrow U$ tel que, si $K' = \bar{\Omega}_A \cup \varphi(D^2 \times I)$, l'intérieur de K' est difféomorphe à $S^2 \times]0, 1[$.

DÉMONSTRATION. B appartient à deux feuilles singulières F_0, F_1 , distinctes d'après le lemme 2. On peut trouver un plongement régulier $\varphi: D^2 \times I \rightarrow U$ tel que

- (i) $\varphi(D^2 \times I)$ est un voisinage de B
- (ii) Pour tout voisinage N assez petit de ∂D^2 , $\varphi|_{N \times \{i\}}$ est un plongement (régulier) de N dans F_i ($i = 0, 1$)
- (iii) Pour un certain $t_0 \in]0, \frac{1}{2} - \varepsilon[$ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ fixé), $\varphi|_{\partial D^2 \times [t_0, 1 - t_0]}$ est un plongement (régulier) du cylindre dans une feuille $F_{t_0} \subset \Omega_A$.
- (iv) Pour tout $(s, t) \in \partial D^2 \times]0, t_0]$, si $\varphi_t(s) = \varphi(s, t)$, φ_t et φ_{1-t} sont deux lacets dans une même feuille $F_t \subset \Omega_A$ et $t' \neq t$ entraîne $F_{t'} \neq F_t$.



Pour tout $t \in]0, t_0[$, la feuille F_t borde un disque à trois dimensions D_t régulièrement plongé dans Ω_A et $D_t \cup \varphi(D^2 \times I)$ est homéomorphe au disque D^3 muni d'un "bouchon" $\tilde{\varphi}(D^2 \times I)$ tel que $\tilde{\varphi}(\partial D^2 \times [t, 1-t]) \subset D^3$ et $\tilde{\varphi}(\partial D^2 \times \{t\}), \tilde{\varphi}(\partial D^2 \times \{1-t\})$ sont des parallèles de ∂D^3 . On voit facilement que $D^3 \cup \tilde{\varphi}(D^2 \times I)$ est homéomorphe à $S^2 \times I$. On pourra donc, en arrondissant les angles, définir un difféomorphisme $\theta_t : D_t \cup \varphi(D^2 \times I) \rightarrow S^2 \times [t, 1-t]$. D'où un difféomorphisme $\theta : \text{Int } K' \rightarrow S^2 \times]0, 1[$.



REMARQUES. 1. Nous n'avons pas utilisé les conditions (i) et (ii) de la définition de φ . Elles interviendront implicitement dans la démonstration du théorème 1 (2e cas) ci-dessous.

2. On dit que deux feuilletages $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ de M sont difféomorphes s'il existe un difféomorphisme $\psi : M \rightarrow M$ qui envoie les feuilles de \mathcal{F} sur les feuilles de \mathcal{F}' .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Si $s \geq 1, c \geq 1$, pour tout point sphérique $A, \bar{\Omega}_A \neq M$ contient au moins un point conique B , nécessairement dans l'une des situations suivantes d'après le lemme 1 (où U est un voisinage assez petit de B):

1. $\Omega_A \cap U = \mathcal{P}_1(U)$
2. $\Omega_A \cap U = \mathcal{C}(U)$
3. $\Omega_A \cap U = \mathcal{P}_1(U) \cup \mathcal{P}_2(U)$

1. $\Omega_A \cap U = \mathcal{P}_1(U)$. Une seule des deux branches du cône Σ de $\omega \mid U$ peut rencontrer $\bar{\Omega}_A$. B appartient donc à deux feuilles singulières (discinctes) F_0, F_1 , où $F_0 = \partial\bar{\Omega}_A = \bar{\Omega}_A - \Omega_A$.

On peut trouver un plongement régulier $\varphi: D^2 \times I \rightarrow U$ tel que:

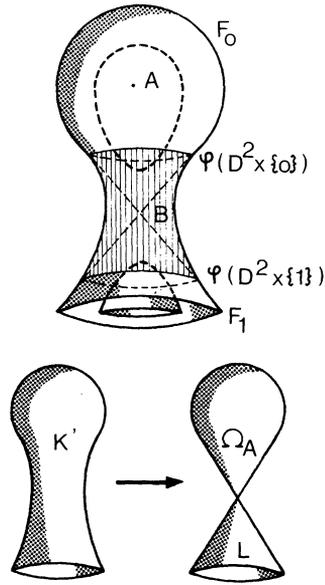
- (i) $\varphi(D^2 \times I)$ est un voisinage de B
- (ii) Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\varphi \mid \partial D^2 \times [0, \varepsilon[$ et $\varphi \mid \partial D^2 \times]1 - \varepsilon, 1]$ sont des plongements (réguliers) dans F_0 et F_1 respectivement.
- (iii) φ^{-1} induit sur $D^2 \times \{i\}$ ($i = 0, 1$) le feuilletage avec un centre pour seule singularité.

$\varphi(\partial D^2 \times \{1\})$ sépare F_1 en deux composantes connexes. L'une d'elles, C_1 , contient B . Soit L le compact de bord $\partial L = C_1 \cup \varphi(D^2 \times \{1\})$ et $K = \bar{\Omega}_A \cup L$, $K' = \bar{\Omega}_A \cup \varphi(D^2 \times I)$. Si N est un voisinage assez petit de $\varphi(D^2 \times \{1\})$ dans M , alors $\varphi(D^2 \times \{1 - \varepsilon/2\}) \cap N = \emptyset$ et on pourra trouver (a) un difféomorphisme $\psi_1: M - K' \rightarrow M - K$ qui coïncide avec l'application identique sur $N \cap (M - K') = N \cap (M - K)$ et (b) un difféomorphisme $\psi_2: \text{Int}(K') \rightarrow \text{Int}(L)$ qui prolonge l'application identique de $N \cap (\text{Int} K') \rightarrow N \cap \text{Int}(L)$ tels que le feuilletage \mathcal{F}' donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1^{-1}(\mathcal{F} \mid M - K) \text{ sur } M - K' \\ \psi_2^{-2}(\mathcal{F} \mid \text{Int}(L)) \text{ sur } \text{Int}(K') \\ \mathcal{F} \mid \varphi(D^2 \times \{1\}) \end{array} \right.$$

et dont $F' = \psi_1^{-1}(F_1 - C_1) \cup \varphi(\partial D^2 \times \{1\}) \cup (\partial K' - \varphi(D^2 \times \{1\}))$ est une feuille

soit encore de classe C^∞ .



2. $\Omega_A \cap U = \mathcal{C}(U)$. Soit $K = \bar{\Omega}_A$ et K' le compact fourni par le lemme 3. On peut définir un difféomorphisme $\psi: M - K' \rightarrow M - K$ tel que le feuilletage \mathcal{F}' donné par

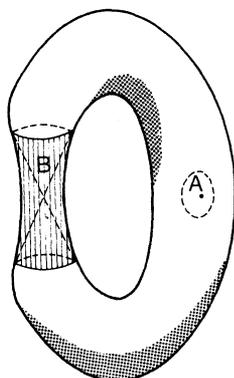
$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{-1}(\mathcal{F} \mid M - K) \text{ dans } M - K' \\ \text{L'image réciproque des feuilles } S^2 \times \{t\}, t \in]0, 1[\text{ dans } \text{Int } K' \\ \text{et deux feuilles } F'_0, F'_1 \text{ telles que } F'_0 \cup F'_1 = \partial K' \end{array} \right.$$

est encore de classe C^∞ .

3. $\Omega_A \cap U = \mathcal{P}_1(U) \cup \mathcal{P}_2(U)$. B appartient à une seule feuille singulière $F = \partial\bar{\Omega}_A$. On peut prendre un plongement (régulier) $\varphi: D^2 \times I \rightarrow U$ défini comme dans le cas 1. On pose $K' = \bar{\Omega}_A \cup \varphi(D^2 \times I)$ et on montre facilement que $\text{Int}(K')$ est difféomorphe à l'intérieur du tore solide $D^2 \times S^1$. On pourra encore trouver un difféomorphisme $\psi: M - K' \rightarrow M - \bar{\Omega}_A$ tel que, en ajoutant une feuille $\partial K'$ au feuilletage défini par

$$\psi^{-1}(\mathcal{F} \mid M - \bar{\Omega}_A) \text{ dans } M - K'$$

et par un feuilletage de Reeb convenable de $\text{Int}(K')$, le feuilletage \mathcal{F}' obtenu soit encore de classe C^∞ .



REMARQUES. 1. La réduction préserve difféomorphiquement toute feuille qui ne rencontre pas $\bar{\Omega}_A$. Plus précisément, si $F \in \mathcal{F}$ et $F \cap \bar{\Omega}_A = \emptyset$ il existe un difféomorphisme $\theta: M \rightarrow M$ et une feuille $F' \in \mathcal{F}'$ tels que $\theta \mid F'$ est un difféomorphisme de F' sur F . En effet, si $F \cup \bar{\Omega}_A = \emptyset$ on a $F \subset M - K$ dans les 2° et 3° cas et, dans le 1er cas, $F \subset M - K$ ou $F \cap L \neq \emptyset$; mais si $F \cap L \neq \emptyset$ la propriété est vérifiée par construction.

En particulier si $F \simeq S^2$ alors $\Omega(F) \cap \bar{\Omega}_A = \emptyset$ et il correspond à $\Omega(F)$ un ensemble $\Omega(F')$ dans (M, \mathcal{F}') . De plus, tout point singulier de \mathcal{F}' appartenant à $\bar{\Omega}(F')$ est un point singulier de \mathcal{F} appartenant à $\bar{\Omega}(F)$.

Réciproquement, si $F' \in \mathcal{F}'$ est difféomorphe à S^2 et $F' \cap K' \neq F'$, il existe un difféomorphisme $\theta: M \rightarrow M$ et une feuille $F \in \mathcal{F}$ tels que $\theta|_{F'}$ est un difféomorphisme de F' sur F et $\theta(\Omega(F')) = \Omega(F)$. Cela nous permet encore de dire que tout point singulier de \mathcal{F}' appartenant à $\bar{\Omega}(F')$ est un point singulier de \mathcal{F} appartenant à $\bar{\Omega}(F)$.

2. L'hypothèse de compacité n'est pas nécessaire. Il suffit d'exiger que le nombre de points singuliers soit fini.

3. Soit X un champ de vecteurs transverse à \mathcal{F} et $k \in \mathbf{Z}$ la contribution de $X|_{K'}$ à la caractéristique d'Euler de M . On vérifie facilement que $k = 0$ dans les cas 1 et 3 ci-dessus et que \mathcal{F}' est encore défini par une un-forme globale ω' sur M . En revanche, dans le cas de la seconde réduction, on a $k = \pm 2$. Considérant alors l'orientation transverse correspondant à X , on voit que si $M - K'$ est connexe, \mathcal{F}' ne peut pas être défini par une un-forme globale. Si $M - K'$ a deux composantes connexes C_1, C_2 , chacune d'elles peut être compactifiée par l'adjonction d'un disque D^3 muni d'un feuilletage avec un point sphérique pour seule singularité. Les contributions de $X|_{C_1}$ et $X|_{C_2}$ à $\chi(M)$ sont donc égales et valent ± 1 . On peut alors définir un champ Y transverse à \mathcal{F}' en posant $Y|_{C_i} = (-1)^i X|_{C_i}$, $i = 1, 2$ (la définition de Y dans K' est triviale). On en déduit que \mathcal{F}' est défini par une un-forme globale.

4. En dimension supérieure à trois, la situation des points coniques n'est plus aussi simple. L'indice de la forme locale $\sum \varepsilon_i x_i^2$ peut en effet prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et $m - 1$. D'où plusieurs types de points coniques. Pour les valeurs $+1$ ou $m - 1$ de cet indice, on retrouve l'analogie des trois cas ci-dessus.

Dans les deux premiers, les réductions précédentes se généralisent facilement (l'équivalence $\mathcal{F}|_{M-K} \approx \mathcal{F}'|_{M-K'}$ peut toutefois n'être que topologique). Dans le troisième, il faut fournir un feuilletage régulier de codimension 1 et $D^2 \times S^k$ ($k \geq 1$) dont le bord soit une feuille. D'après ([3] p. 383) l'existence d'un tel feuilletage est équivalente à celle d'un feuilletage (régulier, de codimension 1) de S^{k+2} , ce qui est impossible lorsque k est pair.

5. Lorsque $\dim M = 2$, la situation rencontrée dans le théorème n'a plus cours. En effet, même si l'on se restreint aux un-formes n'ayant que des points singuliers non dégénérés au voisinage desquels la un-forme approchée ω_1 est exacte (ce qui n'est pas toujours le cas) les feuilles voisines d'un point singulier d'indice 0 (ou 2) ne sont en général pas compactes.

3. Compacité des feuilles singulieres. Soit \mathcal{F} un feuilletage de M . Désignons par n le nombre de points coniques de \mathcal{F} n'appartenant à aucun des ensembles $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}(F)$, $F \approx S^2$.

LEMME. Si $s \geq 1$, $c \geq 1$ et si \mathcal{F}' est un feuilletage obtenu en appliquant à \mathcal{F} l'une des réductions du théorème 1 ci-dessus, alors

$$n \leq n'$$

DÉMONSTRATION. Soient A et B respectivement, les points sphérique et conique de \mathcal{F} supprimés par la réduction. Désignons par R (resp. T) l'ensemble des points singuliers coniques de \mathcal{F} appartenant à l'un au moins (resp. n'appartenant à aucun) des ensembles $\bar{\Omega}$ de \mathcal{F} .

Il suffit de montrer l'existence d'une injection $f: T \rightarrow T'$. Or le difféomorphisme $M - K' \rightarrow M - K$ induit une bijection $(R' \cup T') - K' \rightarrow (R \cup T) - K$ qui se prolonge naturellement à une bijection $b: R' \cup T' \rightarrow (R - \{B\}) \cup T$. Si $b(R') \subset R$ alors $b^{-1}(T) \subset T'$ et $f = b^{-1} | T$. Or, pour tout point conique B' de \mathcal{F}' appartenant à K' , $b(B') \in R$ (car B' correspond à un point conique de \mathcal{F} appartenant à $\partial\bar{\Omega}_A$). Si $B' \in M - K'$ appartient à R' , alors d'après la remarque 1 suivant le théorème 1, on a encore $b(B') \in R$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. Pour $c = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le théorème vrai pour tout $c' < c$ (avec $c > 0$). On peut appliquer l'une des réductions du théorème 1. D'après le lemme ci-dessus et par hypothèse de récurrence, on a $0 = n' \geq n$.

REMARQUE. En faisant intervenir l'indice de la forme locale au voisinage d'un point conique, on peut montrer que le théorème 2 est encore vrai pour tout $m \geq 3$. Essentiellement, on montre d'abord que pour tout point sphérique A , l'ensemble $\bar{\Omega}_A$ contient toujours un point conique. D'où le théorème pour $c = 1$. Pour $c > 1$ on a les deux cas

(i) Chaque point conique appartient à l'un des ensembles $\bar{\Omega}_A$.

(ii) Un point conique (au moins) n'appartient à aucun des ensembles $\bar{\Omega}_A$.

Dans le premier cas, il n'y a rien à démontrer. Dans le deuxième cas, l'hypothèse $s \geq c$ entraîne l'existence de deux points sphériques A_1, A_2 tels que $\bar{\Omega}_{A_1} \cap \bar{\Omega}_{A_2}$ contient un point conique. Soit B ce point. On montre alors que la forme locale $\sum \varepsilon_i x_i^2$ au voisinage de B est nécessairement d'indice 1 ou $m - 1$. D'où la possibilité d'appliquer une réduction analogue à celle du 1er cas du théorème 1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. Montrons par récurrence sur $c \geq 0$ que $s \geq c + 2$ entraîne $s = c + 2$ avec les conclusions (i), (ii), et (iii).

Pour $c = 0$, la proposition est due à G. Reeb ([4] p. 147).

Si $c > 0$, l'hypothèse entraîne l'existence d'un point conique B appartenant à au moins deux ensembles $\bar{\Omega}_A$ (A sphérique). On a donc toujours un point sphérique et un point conique dans la situation du premier cas envisagé dans la démonstration du théorème 1. Appliquant alors la réduction correspondante, on obtient un feuilletage \mathcal{F}' de M avec $s' \geq c' + 2$. Par hypothèse de récurrence, $M \approx S^3$, $s' = c' + 2$ et les feuilles de \mathcal{F}' vérifient les conditions (ii) et (iii). Donc $s = c + 2$ et les feuilles de \mathcal{F} vérifient encore (ii) et (iii) d'après la réduction choisie et la première remarque suivant la démonstration du théorème 1.

REMARQUES. 1. On peut également généraliser ce résultat en dimension supérieure à trois. L'essentiel de la démonstration, qui sera publiée séparément, consiste à prouver l'existence d'au moins au point singulier conique dans l'analogue de la situation du théorème 1 premier cas ci-dessus. La réduction s'effectue ensuite de la même manière.

2. Si f est une fonction de Morse sur M , le théorème précise alors les propriétés de f (on considère le feuilletage défini par $\omega = df$). Les points singuliers sphériques correspondent aux points critiques de type maximum ou minimum de f et les points coniques aux points critiques de type selle.

REFERENCES

1. A. Haefliger, *An. Sc. Norm. Sup. Pisa*, IV, v16 (1962), pp. 367–397.
2. —, *Travaux de Novikov sur les feuilletages*, Séminaire Bourbaki (1967–1968) 339.
3. H. B. Lawson, *Bull. of the A.M.S.*, Vol. 80, 3 (May 1974) pp. 369–418.
4. G. Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, A.S.I. 1183, Paris, 1952.
5. E. Wagneur, thèse, Université de Montréal, 1973.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL