Can. J. Math., Vol. XXXIV, No. 5, 1982, pp. 1059–1090

SYSTEMES FONDAMENTAUX D'UNITES DE CERTAINS CORPS DE DEGRE 4 ET DE DEGRE 8 SUR Q

CLAUDE LEVESQUE

Introduction. Lorsque $K_n = Q(\omega)$ est une extension algébrique de degré n sur $\mathbf{Q}$ telle que

$$\omega^n = M_n = \sum_{i=0}^{n} \left[\binom{n-1-i}{i-1} + \binom{n-i}{i} \right] D^{n-2i} d^i$$

avec $D \in \mathbf{N}$, $d \in \mathbf{Z}$, $d|D^2$ et $D^2 + 4d > 0$, nous avons prouvé [**1**] en utilisant certaines idées de Halter-Koch et Stender [**2**] que si

$$\epsilon_{n,k} = 1 - \frac{M_k}{(-d)^k}\omega^k + \frac{\omega^{2k}}{(-d)^k} \quad \text{où}$$

$$M_k = \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k-1-i}{i-1} + \binom{k-i}{i} \right] D^{k-2i} d^i,$$

alors

$$S_0 = \{\epsilon_{n,k} | k \in \mathbf{N}, k|n, k \neq n\}$$

est un système indépendant d'unités de K_n.

Remarquant que dans l'extension quadratique

$$L_{2n} = K_n(\sqrt{D^2 + 4d})$$

de K_n, nous avons la factorisation

$$\epsilon_{n,k} = e_{n,k} u_{n,k}$$

où

$$e_{n,k} = \frac{\omega^k - \alpha^k}{\beta^k}, \ u_{n,k} = \frac{\omega^k - \beta^k}{\alpha^k},$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4d}, \ \beta = \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4d},$$

nous avons aussi prouvé de la même façon [**1**] que

$$S = \left\{ e_{n,k}, u_{n,k}, \frac{\beta}{\alpha} \,\middle|\, k \in \mathbf{N}, k|n, k \neq n \right\}$$

est un système indépendant d'unités de L_{2n}.

Reçu le 20 novembre 1980. L'auteur dédié et article à ses parents, et tient à exprimer toute sa reconnaissance aux professeurs H. Kisilevsky et J.-P. Labute pour leur support moral. Cet article fut écrit grâce à une sub vention CRSNG (#A4545) et grâce au programme FCAC (#EQ1321).

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Pour $n = 2, 3, 4$ et 6, S_0 est un système indépendant maximal d'unités de K_n et nous trouvons dans les travaux de Stender (cf. [**5**] et [**6**]) un système fondamental d'unités pour chacun de ces corps.

Dans la conclusion de [**1**], nous avons noté que pour $n = 2, 3, 4$ et 6, S engendre aussi un sous-groupe d'indice fini dans le groupe des unités de L_{2n} et qu'il serait intéressant de trouver une base des unités des corps L_4, L_6, L_8 et L_{12}.

En fait, il serait intéressant de faire beaucoup mieux, i.e., de trouver une base des unités des sous-corps de L_{4k}, L_{6k}, L_{8k} et L_{12k} qui sont respectivement des extensions de degrés 4, 6, 8 et 12 sur $\mathbf{Q}$. C'est précisément ce problème qui nous amène à considérer dans cet article certaines extensions de degré 4 et de degré 8 sur $\mathbf{Q}$ et à trouver explicitement en chaque cas un système fondamental d'unités. Les extensions considérées sont d'une part certains composés de deux corps quadratiques et d'autre part des composés de certaines extensions quadratiques et de certains corps purs de degré 4 sur $\mathbf{Q}$: cf. Théorèmes 2.1.1 et 3.1.1 qui sont les deux principaux résultats de cet article. Les Théorèmes 2.3.2 et 3.3.4 sont équivalents aux Théorèmes 2.1.1 et 3.1.1 respectivement. Quant aux Théorèmes 3.2.2 et 3.2.3, ce sont des résultats secondaires non moins intéressants que nous utilisons pour prouver un des deux résultats principaux.

Rappelons en terminant que si d'une façon générale, K est une extension de degré $n = r + 2s$ sur $\mathbf{Q}$ telle que K possède r conjugués réels et $2s$ conjugués complexes, alors le groupe $\mathcal{U}_K$ des unités de K est un produit direct de groupes cycliques

$$\mathcal{U}_K = W \times C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_{r+s-1},$$

où W est le groupe des racines de l'unité dans K et où les C_i sont des groupes cycliques isomorphes à $\mathbf{Z}$; ce résultat est dû à Dirichlet et les $r + s - 1$ générateurs (>1) de ces groupes C_i forment ce qu'il est convenu d'appeler un système fondamental d'unités de K.

1. Préliminaires. Pour prouver ces théorèmes, il est bon de poser immédiatement quelques définitions et d'énoncer quelques propriétés qui sont pour la plupart déjà démontrées en [**1**].

Définition 1.1. Pour tout $m, n \in \mathbf{Z}$, $0! = 1$ et

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m)!m!} & \text{si } n \geqq m \geqq 0, \\ 1 & \text{si } n = -1 = m, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Définition 1.2. Pour tout $k \geqq 0$,

$$M_k = M_k(D, d) = \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{k-1-i}{i-1} + \binom{k-i}{i} \right] D^{k-2i} d^i.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Définition 1.3. Pour tout $k \geqq -1$,

$$G_{k+1} = G_{k+1}(D, d) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k-i}{i} D^{k-2i} d^i.$$

Exemples.

$$\begin{aligned}
M_0 &= 2, & G_0 &= 0,\\
M_1 &= D, & G_1 &= 1,\\
M_2 &= D^2 + 2d, & G_2 &= D,\\
M_3 &= D^3 + 3Dd, & G_3 &= D^2 + d,\\
M_4 &= D^4 + 4D^2d + 2d^2, & G_4 &= D^3 + 2Dd,\\
M_5 &= D^5 + 5D^3d + 5Dd^2, & G_5 &= D^4 + 3D^2d + d^2,\\
M_6 &= D^6 + 6D^4d + 9D^2d^2 + 2d^3, & G_6 &= D^5 + 4D^3d + 3Dd^2,\\
M_7 &= D^7 + 7D^5d + 14D^3d^2 + 7Dd^3, & &\\
M_8 &= D^8 + 8D^6d + 20D^4d^2 + 16D^2d^3 + 2d^4, & &\\
M_9 &= D^9 + 9D^7d + 27D^5d^2 + 30D^3d^3 + 9Dd^4, & &\\
M_{10} &= D^{10} + 10D^8d + 35D^6d^2 + 50D^4d^3 + 25D^2d^4 + 2d^5, & &\\
M_{11} &= D^{11} + 11D^9d + 44D^7d^2 + 77D^5d^3 + 55D^3d^4 + 11Dd^5, & &\\
M_{12} &= D^{12} + 12D^{10}d + 54D^8d^2 + 112D^6d^3 + 105D^4d^4 & &\\
&\qquad + 36D^2d^5 + 2d^6. & &
\end{aligned}$$

PROPOSITION 1.4. *Pour tout $r, s \in \mathbf{N}$,*
(i) $M_{sr}(D, d) = M_r(M_s, -(-d)^s)$,
(ii) $G_{sr}(D, d) = G_s(D, d)G_r(M_s, -(-d)^s)$.

PROPOSITION 1.5. *Si* $\alpha = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4d}$, $\beta = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + 4d}$ (*avec* $\alpha + \beta = D$, $\alpha - \beta = \sqrt{D^2 + 4d} \neq 0$ *et* $\alpha\beta = -d$), *alors pour tout* $k \in \mathbf{N}$,
(i) $M_k = \alpha^k + \beta^k$,
(ii) $G_k = \dfrac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$,
(iii) $M_k^2 = (D^2 + 4d)G_k^2 + 4(-d)^k$.

Ces propositions furent prouvées en [**1**] et nous allons constamment les utiliser sans jamais y référer explicitement.

PROPOSITION 1.6. *Pour tout $k \in \mathbf{N}$,*
(i) $(D^2 + 4d)^2M_4(D, d) = M_4(D^2 + 4d, -d(D^2 + 4d))$,
(ii) $(D^2 + 4d)^2M_{4k}(D, d) = M_4((D^2 + 4d)G_k, (-d)^k(D^2 + 4d))$

Démonstration. (i) La première formule est obtenue en développant les deux membres de l'égalité.

(ii) Grâce à la Proposition 1.4, nous avons

$$(D^2 + 4d)^2M_{4k}(D, d) = (D^2 + 4d)^2M_4(M_k, -(-d)^k).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Posant $D_1 = M_k$ et $d_1 = -(-d)^k$ dans la formule (i), et utilisant la Proposition 1.5, nous déduisons

$$(M_k^2 - 4(-d)^k)^2 M_4(M_k, -(-d)^k) = M_4(M_k^2 - 4(-d)^k, (-d)^k(M_k^2 - 4(-d)^k)),$$

$$(D^2 + 4d)^2 G_k^4(D, d) M_4(M_k, -(-d)^k) = M_4((D^2 + 4d)G_k^2, (-d)^k(D^2 + 4d)G_k^2),$$

$$(D^2 + 4d)^2 M_4(M_k, -(-d)^k) = M_4((D^2 + 4d)G_k, (-d)^k(D^2 + 4d)).$$

LEMME 1.7. (i) *Si k est pair,*

$$|d|^{k/2} \big| M_k \text{ et } |d|^{k/2} \big| G_k.$$

(ii) *Si k est impair,*

$$|d|^{(k+1)/2} \big| M_k \text{ et } |d|^{(k-1)/2} \big| G_k.$$

Démonstration. La preuve peut facilement se faire par induction, si nous remarquons que M_k et G_k vérifient les récurrences linéaires doubles

$$M_{k+1} = DM_k + dM_{k-1} \text{ et } G_{k+1} = DG_k + dG_{k-1}.$$

2. Composés de deux corps quadratiques. Le but de ce chapitre est de calculer explicitement un système fondamental d'unités de certains composés $\mathbf{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ de deux corps quadratiques, lorsque m_1 et m_2 sont des entiers qui ont une certaine structure.

2.1. *Description d'une méthode.* Le problème de trouver une base des unités d'un composé de deux corps quadratiques a été étudié entre autres par Kuroda [**4**] et Kubota [**3**]. Lorsque K est un composé de plusieurs corps quadratiques réels, Wada a donné [**7**] un procédé pour trouver explicitement un système fondamental d'unités de K et c'est ce procédé que nous allons utiliser pour prouver le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1.1. *Soit $L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \xi)$ un corps de degré 4 sur $\mathbf{Q}$ tel que*

$$\theta^2 = D^2 + 4d,$$

$$\xi^2 = \begin{cases} \dfrac{M_{2k}(D, d)}{|d|^k} & \text{si } k \text{ est pair,} \\[2ex] \dfrac{M_{2k}(D, d)}{|d|^{k-1}} & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

où

$$M_{2k}(D, d) = \sum_{i=0}^{2k} \left[\binom{2k-1-i}{i-1} + \binom{2k-i}{i} \right] D^{2k-2i} d^i$$

avec $D \in \mathbf{N}$, $d \in \mathbf{Z}$ et $d|D$. Supposons que θ^2 et ξ^2 sont des entiers >1 qui

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

ne contiennent aucun facteur carré et posons

$$\alpha = \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\theta,\ \beta = \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\theta.$$

Alors un système fondamental d'unités de L_4 est donné par

$$\{e_2,\ u_2,\ \eta_2\}$$

où

$$e_2 = \begin{cases} \dfrac{\beta^k}{\xi|d|^{k/2} - \alpha^k} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{|\beta|^k}{\xi|d|^{(k-1)/2} - \alpha^k} & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{\alpha^k}{\xi|d|^{k/2} - \beta^k} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{\alpha^k}{\xi|d|^{(k-1)/2} - \beta^k} & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$\eta_2 = \begin{cases} \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} & \text{si } (D, d) = (3, -1) \text{ ou } (5, -5), \\ \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\theta & \text{si } d = \pm 1 \text{ et si } (D, d) \neq (3, -1), \\ (D + \theta)^2/4|d| & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Exemples. Comme $d|D$, nous pouvons poser d $= \pm N$ et $D = AN$ avec A, $N \in \mathbf{N}$, de sorte que

$$\theta^2 = A^2N^2 \pm 4N,$$

$$\xi^2 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{2k} \left[\binom{2k-1-i}{i-1} + \binom{2k-i}{i} \right] A^{2k-2i}(\pm N)^{k-i} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{2k} \left[\binom{2k-1-i}{i-1} + \binom{2k-i}{i} \right] A^{2k-2i}(\pm N)^{k+1-i} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

et les valeurs de ξ^2 pour $1 \leqq k \leqq 6$ sont respectivement

$$A^2N^2 \pm 2N,$$
$$A^4N^2 \pm 4A^2N + 2,$$
$$A^6N^4 \pm 6A^4N^3 + 9A^2N^2 \pm 2N,$$
$$A^8N^4 \pm 8A^6N^3 + 20A^4N^2 \pm 16A^2N + 2,$$
$$A^{10}N^6 \pm 10A^8N^5 + 35A^6N^4 \pm 50A^4N^3 + 25A^2N^2 \pm 2\mathrm{N},$$
$$A^{12}N^6 \pm 12A^{10}N^5 + 54A^8N^4 \pm 112A^6N^3 + 105A^4N^2 \pm 36A^2N + 2.$$

Remarque. Comme $\mathrm{D}^2 + 4d$ ne contient par hypothèse aucun facteur carré, alors d et D sont tous deux impairs. De plus, vu que $d|D$, alors $D^2 + 4d > 0$ si et seulement si $D^2 + 4d > 1$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

La façon de procéder suggérée dans [**7**] est la suivante. Il s'agit de considérer les trois sous-corps quadratiques L_2, F_2 et K_2 de L_4, puis de déterminer l'unité fondamentale de chacun de ces corps quadratiques, cette unité fondamentale (>1) étant respectivement dénotée η_2, δ_2 et ϵ_2.

$$\begin{tikzcd}
 & L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \xi) \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\eta_2 \in L_2 = \mathbf{Q}(\theta) \arrow[dr, no head] & \delta_2 \in F_2 = \mathbf{Q}(\theta\xi) \arrow[d, no head] & \epsilon_2 \in K_2 = \mathbf{Q}(\xi) \arrow[dl, no head] \\
 & \mathbf{Q} &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1.

Il s'agit ensuite de regarder si L_4 contient ou non les racines carrées des éléments de

$$B = \{\eta_2, \delta_2, \epsilon_2, \eta_2\delta_2, \eta_2\epsilon_2, \delta_2\epsilon_2, \eta_2\delta_2\epsilon_2\}.$$

Comme le groupe (sans torsion) des unités de L_4 est engendré par les éléments de B et par les racines carrées des éléments de B contenues dans L_4, alors nous pouvons déterminer un système fondamental d'unités de L_4.

2.2. *Unités des sous-corps quadratiques.* Pour trouver l'unité fondamentale des sous-corps quadratiques, c'est le théorème suivant qui sera utilisé.

THÉORÈME 2.2.1. *Soit $K = \mathbf{Q}(\omega)$ une extension quadratique de $\mathbf{Q}$ telle que*

$$\omega = \sqrt{m},\ m = D_1^2 + d_1 > 1,\ D_1 \in \mathbf{N},\ d_1 \in \mathbf{Z},\ d_1 | 4D_1,$$

et telle que m est sans facteur carré. Alors

$$\eta = \begin{cases} \dfrac{D_1 + \omega}{\sqrt{|d_1|}} & \text{si } |d_1| = 1 \text{ ou } 4 \\ & \text{ou si } (D_1, d_1) = (2, -2) \text{ ou } (5, -20), \\ \dfrac{(D_1 + \omega)^2}{|d_1|} & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

est l'unité fondamentale de K, sauf si $(D_1, d_1) = (2, 1)$ ou $(3, -4)$, où $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ est l'unité fondamentale de K.

Ce résultat fut obtenu par Degert et fut par la suite énoncé en [**5**] sous des hypothèses moins restrictives. Nous en déduisons immédiatement la

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 2.2.2. *Soit* $L_2 = \mathbf{Q}(\theta)$ *une extension quadratique de* $\mathbf{Q}$ *telle que*

$$\theta^2 = D^2 + 4d > 1$$

avec $D \in \mathbf{N}$, $d \in \mathbf{Z}$, $d|D$ *et* θ^2 *sans facteur carré. Alors*

$$\eta_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} & \textit{si } (D, d) = (3, -1) \textit{ ou } (5, -5), \\ \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\theta & \textit{si } d = \pm 1 \textit{ et si } (D, d) \neq (3, -1), \\ \dfrac{(D+\theta)^2}{4|d|} & \textit{ailleurs}, \end{cases}$$

est l'unité fondamentale de L_2.

Démonstration. C'est direct.

Considérons maintenant le sous-corps quadratique $K_2 = \mathbf{Q}(\xi)$. Notons d'abord que

$$M_{2k} = M_2(M_k, -(-d)^k) = M_k^2 - 2(-d)^k;$$

de plus, si k est pair, $|d|^{k/2} \mid M_k$ et si k est impair, $|d|^{(k-1)/2} \mid M_k$. Alors ξ^2 peut s'écrire sous la forme

$$(2.2.1) \quad \xi^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{M_k}{|d|^{k/2}}\right)^2 - 2 & \text{si } k \text{ est pair}, \\ \left(\dfrac{M_k}{|d|^{(k-1)/2}}\right)^2 + 2d & \text{si } k \text{ est impair}, \end{cases}$$

ce qui nous permet de prouver la

PROPOSITION 2.2.3. *Soit* $K_2 = \mathbf{Q}(\xi)$ *une extension quadratique de* $\mathbf{Q}$ *telle que*

$$\xi^2 = \begin{cases} \dfrac{M_{2k}(D, d)}{|d|^k} & \textit{si } k \textit{ est pair}, \\ \dfrac{M_{2k}(D, d)}{|d|^{k-1}} & \textit{si } k \textit{ est impair}, \end{cases}$$

avec $D \in \mathbf{N}$, $d \in \mathbf{Z}$, $d|D$, $D^2 + 4d > 1$, $\xi^2 > 1$ *et* ξ^2 *sans facteur carré. Alors*

$$\epsilon_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\xi + \dfrac{M_k}{|d|^{k/2}}\right)^2 & \textit{si } k \textit{ est pair}, \\ \dfrac{1}{2|d|}\left(\xi + \dfrac{M_k}{|d|^{(k-1)/2}}\right)^2 & \textit{si } k \textit{ est impair}, \end{cases}$$

est l'unité fondamentale de K_2.

Démonstration. L'équation (2.2.1) nous permet d'écrire ξ^2 sous la forme $D_1^2 + d_1$ avec $d_1|4D_1$. Une application du Théorème 2.2.1 nous

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

donne alors la conclusion, et de fait, il reste seulement à prouver qu'il n'y a pas d'exception.

(i) Soit k pair. S'il y avait une exception, ce serait

$$(D_1, d_1) = (M_k/|d|^{k/2}, -2) = (2, -2)$$

et nous aurions

$$M_k/|d|^{k/2} = 2,$$

i.e.,

$$M_k^2 = 4d^k,$$

i.e.,

$$(D^2 + 4d)G_k^2 + 4(-d)^k = 4d^k,$$

i.e.,

$$(D^2 + 4d)G_k^2 = (\alpha^k - \beta^k)^2 = 0,$$

i.e., $\alpha = \beta$, i.e., $\sqrt{D^2 + 4d} = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $D^2 + 4d > 1$.

(ii) Soit k impair. Ici $d_1 = 2d$. Comme d est impair, alors d_1 ne peut être -20 ou -4. S'il y avait une exception, ce serait $(D_1, d_1) = (2, -2)$; nous aurions alors $d = -1$ et

$$M_k/|d|^{(k-1)/2} = 2,$$

i.e., $M_k^2 = 4$, i.e.,

$$4 = (D^2 + 4d)G_k^2 + 4(-d)^k,$$

i.e.,

$$0 = (D^2 + 4d)G_k^2 = (\alpha^k - \beta^k)^2,$$

ce qui est encore contradictoire.

Passons maintenant au sous-corps quadratique $\mathbf{Q}(\theta\xi)$ où

$$\theta^2\xi^2 = \begin{cases} (D^2 + 4d)M_{2k}/|d|^k & \text{si } k \text{ est pair,} \\ (D^2 + 4d)M_{2k}/|d|^{k-1} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le fait que

$$\text{(2.2.2)} \quad M_{2k} = M_k^2 - 2(-d)^k = ((D^2 + 4d)G_k^2 + 4(-d)^k) - 2(-d)^k = (D^2 + 4d)G_k^2 + 2(-d)^k,$$

nous conduit à poser

$$\text{(2.2.3)} \quad \lambda^2 = \begin{cases} \theta^2\xi^2 = \left(\dfrac{(D^2 + 4d)G_k}{|d|^{k/2}}\right)^2 + 2(D^2 + 4d) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{\theta^2\xi^2}{|d|^2} = \left(\dfrac{(D^2 + 4d)G_k}{|d|^{(k+1)/2}}\right)^2 - 2\left(\dfrac{D^2}{d} + 4\right) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Remarquons que $|d|^{k/2} \mid G_k$ si k est pair et que $|d|^{(k+1)/2} \mid dG_k$ si k est impair, de sorte que λ^2 est encore un entier de la forme $D_1^2 + d_1$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Lorsque k est pair,

$$(\theta^2, \xi^2) = \left(D^2 + 4d, \frac{(D^2 + 4d)G_k^2}{|d|^k} + 2\right) = (D^2 + 4d, 2) = 1,$$

vu que D est impair, ce qui nous permet de conclure que $\lambda^2 = \theta^2\xi^2$ est >1 et ne possède aucun facteur carré. De même, lorsque k est impair,

$$(\theta^2, \xi^2) = \left(D^2 + 4d, \frac{(D^2 + 4d)G_k^2}{|d|^{k-1}} - 2d\right) = (D^2 + 4d, 2d) = |d|,$$

ce qui nous permet de conclure que $\lambda^2 = \theta^2\xi^2/|d|^2$ ne possède aucun facteur carré. De plus, lorsque k est impair, $\lambda^2 > 1$; en effet, si $\lambda^2 = 1$, alors

$$\theta^2\xi^2 = |d|^2 \text{ et } \xi^2 = |d|,$$

ce qui est impossible, vu que la relation

$$\xi_2 = \frac{M_k^2}{|d|^{k-1}} + 2d = \frac{(D^2 + 4d)G_k^2}{|d|^{k-1}} - 2d$$

implique $\xi^2 \geqq 2d$ si $d > 0$ et $\xi^2 \geqq -2d$ si $d < 0$.

Comme l'entier λ^2 s'écrit encore sous la forme $\lambda^2 = D_1^2 + d_1$ avec $d_1|4D_1$, il est encore possible d'appliquer le Théorème 2.2.1 pour obtenir la

PROPOSITION 2.2.4. *Soit $F_2 = \mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{Q}(\theta\xi)$ une extension quadratique de $\mathbf{Q}$ telle que*

$$\lambda^2 = \begin{cases} \theta^2\xi^2 & \textit{si } k \textit{ est pair}, \\ \dfrac{\theta^2\xi^2}{|d|^2} & \textit{si } k \textit{ est impair}, \end{cases}$$

où

$$\theta^2 = D^2 + 4d,$$

$$\xi^2 = \begin{cases} \dfrac{M_{2k}(D, d)}{|d|^k} & \textit{si } k \textit{ est pair}, \\ \dfrac{M_{2k}(D, d)}{|d|^{k-1}} & \textit{si } k \textit{ est impair}, \end{cases}$$

avec $D \in \mathbf{N}$, $d \in \mathbf{Z}$, $d|D$, $\theta^2 > 1$, $\xi^2 > 1$, θ^2 et ξ^2 sans facteur carré. Alors

$$\delta_2 = \begin{cases} \dfrac{\left(\lambda + \dfrac{(D^2 + 4d)G_k}{|d|^{k/2}}\right)^2}{2(D^2 + 4d)} = \dfrac{1}{2}\left(\xi + \dfrac{G_k}{|d|^{k/2}}\theta\right)^2 & \textit{si } k \textit{ est pair}, \\ \dfrac{\left(\lambda + \dfrac{(D^2 + 4d)G_k}{|d|^{(k+1)/2}}\right)^2}{2\left|\dfrac{D^2}{d} + 4\right|} = \dfrac{1}{2|d|}\left(\xi + \dfrac{G_k}{|d|^{(k-1)/2}}\theta\right)^2 & \textit{si } k \textit{ est impair}, \end{cases}$$

est l'unité fondamentale de F_2.

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Lorsque k est pair, $d_1 = 2(D^2 + 4d)$ ne peut être -2, -20, 1 ou -4 et il n'y a pas d'exception.

Soit k impair. Ici $d_1 = -2(D^2/d + 4)$ ne peut être 1 et si $d_1 = -2$, -4 ou -20, cela entraîne $D^2 + 4d = d$, $2d$ ou $10d$ respectivement; or $D^2 + 4d = d$ entraîne $(D, d) = (3, -3)$, ce qui contredit l'hypothèse $D^2 + 4d > 1$; les deux autres cas mènent à une contradiction avec le fait que D est impair. Il n'y a donc pas d'exception.

2.3. *Unités de L_4.* En vue de raccourcir la preuve du Théorème 2.1.1, quelques remarques s'imposent. Il s'avèrera utile de connaître les normes relatives suivantes:

$$N_{L_4/L_2}(\eta_2) = \eta_2^2,$$

$$N_{L_4/F_2}(\eta_2) = N_{L_4/K_2}(\eta_2) = \begin{cases} -1 & \text{si } (D, d) = (3, -1) \text{ ou } (5, -5) \\ & \text{ou si } d = 1 \\ 1 & \text{ailleurs;} \end{cases}$$

$$N_{L_4/L_2}(\epsilon_2) = N_{L_4/F_2}(\epsilon_2) = 1,\ N_{L_4/K_2}(\epsilon_2) = \epsilon_2^2;$$

$$M_{L_4/L_2}(\delta_2) = N_{L_4/K_2}(\delta_2) = 1,\ N_{L_4/F_2}(\delta_2) = \delta_2^2.$$

Nous utiliserons aussi le lemme suivant que nous allons démontrer sous les hypothèses du Théorème 2.1.1.

LEMME 2.3.1.
(i) *Si $d = -1$ et si $D \neq 3$, alors* $\sqrt{D + 2} \notin L_4$.
(ii) *Si $d = -1$ et si $D \neq 3$, alors* $\sqrt{2(D + 2)} \notin L_4$.
(iii) *Si $|d| \neq 1$ et si $(D, d) \neq (5, -5)$, alors* $\sqrt{|d|} \notin L_4$.
(iv) $\sqrt{2} \notin L_4$.
(v) $\sqrt{2}|d| \notin L_4$.

Démonstration. (i) Soit $d = -1$ et $D \neq 3$. Comme $D + 2$ divise

$$\theta^2 = D^2 + 4d = D^2 - 4$$

qui par hypothèse est sans facteur carré, alors $D + 2$ n'est pas un carré de $\mathbf{N}$. Si $D + 2$ est un carré de L_4, c'est que $D + 2 = \theta^2$, ξ^2 ou λ^2. Or $D + 2 = \theta^2$ entraîne $D = 3$ et c'est exclus. De plus,

$$D + 2 = \xi^2 = M_k^2 - 2 = (D^2 - 4)G_k^2 + 4 - 2$$

entraîne $(D + 2)|2$, ce qui est impossible. Finalement, si

$$D + 2 = \lambda^2 = (D^2 - 4)^2 G_k^2 + 2(D^2 - 4),$$

alors $(D - 2)|1$, ce qui ne peut arriver vu que $D \neq 3$.

(ii) Soit $d = -1$ et $D \neq 3$. Si $2(D + 2)$ est un carré de $\mathbf{N}$, alors $D + 2 = 2t^2$ et $2|D$, contradiction. Comme $(D + 2)|(D^2 - 4)$, alors $D + 2$ ne contient aucun facteur carré, de sorte que si $2(D + 2)$ est un carré de L_4, c'est que $2(D + 2) = \theta^2$, ξ^2 ou λ^2; or $2(D + 2) = D^2 - 4$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

entraîne $2 = D - 2$, i.e., $D = 4$, ce qui est impossible vu que D est impair; de plus, $2(D + 2) = \xi^2$ entraîne $(D + 2)|2$ ce qui est impossible; finalement $2(D + 2) = \lambda^2$ entraîne $(D - 2)|2$, i.e., $D = 4$ ou 3, ce qui n'est pas possible vu que d'une part D est impair et que d'autre part $D \neq 3$.

(iii) Soit $|d| \neq 1$ et soit $(D, d) \neq (5, -5)$. Comme $d|(D^2 + 4d)$, alors $|d|$ n'est pas un carré de $\mathbf{N}$. Montrons qu'il est impossible d'avoir $|d| = \theta^2$, ξ^2 ou λ^2.

Si $D^2 + 4d = |d|$, alors $D^2 = -3d$ lorsque $d > 0$ et $D^2 = -5d$ lorsque $d < 0$, ce qui est impossible vu que d'une part D^2 ne peut être négatif et que d'autre part $(D, d) \neq (5, -5)$. Soit $\xi^2 = |d|$. Soit k pair; alors

$$\xi^2 = (D^2 + 4d)\frac{G_k^{\,2}}{d^k} + 2 = |d| \quad \text{et} \quad d^k|G_k^{\,2}$$

entraînent $d|2$, ce qui contredit le fait que $|d|$ est un impair >1.

Soit k impair; comme

$$\xi^2 = \frac{M_k^{\,2}}{|d|^{k-1}} + 2d = \frac{(D^2 + 4d)G_k^{\,2}}{|d|^{k-1}} - 2d,$$

alors $\xi^2 > 2d$ si $d > 0$ et $\xi^2 > -2d$ si $d < 0$; il est donc impossible d'avoir $\xi^2 = |d|$.

Considérons le cas $\lambda^2 = |d|$. Remarquons d'abord que

$$D^2 + 4d \geqq |d|;$$

c'est trivialement vrai si $d > 0$; si $d < 0$, cela découle du fait que $D^2 + 4d > 0$ et que $d|(D^2 + 4d)$. Si k est pair, la relation $\lambda^2 = |d|$ est alors impossible, vu que

$$\lambda^2 > 2(D^2 + 4d) \geqq 2|d| > |d|.$$

Soit k impair et soit $\lambda^2 = |d|$. Alors

$$(D^2 + 4d)M_{2k}/|d||d|^k = |d|.$$

Notons que le dernier terme de M_{2k} est $2d^k$ et que $|d|^{k+1}$ divise $(M_{2k} - 2d^k)$. Donc $\lambda^2 = |d|$ implique

$$(D^2 + 4d)\left(\frac{M_{2k} - 2d^k}{|d|^{k+1}}\right) + \frac{2(D^2 + 4d)d^k}{|d|\,|d|^k} = |d|.$$

Comme $|d|$ divise $(D^2 + 4d)$ et comme $|d|$ divise $D^2/|d|$, alors $|d|$ divise 8, i.e., $|d| = 1, 2, 4$ ou 8 qui sont toutes des valeurs à rejeter vu que $|d|$ est par hypothèse un impair $\neq 1$.

(iv) Soit 2 un carré de L_4. Alors $2 = \theta^2$, ξ^2 ou λ^2. Si $2 = \theta^2 = D^2 + 4d$, alors $2|D$, et c'est impossible.

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Si lorsque k est pair,

$$2 = \xi^2 = \frac{(D^2 + 4d)G_k^{\,2} + 2(-d)^k}{|d|^k} = \frac{(D^2 + 4d)G_k^{\,2}}{|d|^k} + 2,$$

alors $(D^2 + 4d)G_k^2 = 0$ et c'est impossible. Si, lorsque k est impair,

$$2 = \xi^2 = \frac{(D^2 + 4d)G_k^{\,2}}{|d|^{k-1}} - 2d,$$

alors $d|2$ vu que $|d|^k\big|(D^2 + 4d)G_k^2$; d'où $|d| = 1$. Or $d = 1$ implique

$$4 = (D^2 + 4d)G_k^2,$$

i.e., $D^2 + 4d$ est un carré, ce qui est impossible, alors que $d = -1$ entraîne la contradiction $(D^2 + 4d)G_k^2 = 0$.

Lorsque k est pair, $\lambda^2 \neq 2$, vu que $\lambda^2 = \xi^2\theta^2 \geqq 2 \cdot 2 = 4$. Soit k impair et soit $\lambda^2 = 2$. Comme $d^{k-1}|G_k^2$, nous déduisons de (2.2.3) que $\lambda^2 = 2$ implique

$$\left(\frac{D^2 + 4d}{d}\right)\bigg|\, 2,$$

i.e., $D^2/d + 4 = \pm 1$ (vu que D est impair), i.e., $D^2 = -3d$ ou $-5d$, i.e., $(D, d) = (3, -3)$ ou $(5, -5)$. Or $(D, d) = (3, -3)$ est impossible vu que $D^2 + 4d$ est >0 par hypothèse; de plus, si $(D, d) = (5, -5)$ et si $\lambda^2 = 2$, alors nous aurions d'après (2.2.3)

$$\lambda^2 = 2 = \frac{G_k^{\,2}}{5^{k-1}} + 2,$$

ce qui entraînerait la contradiction $G_k^2 = 0$.

(v) Si $|d| = 1$, alors d'après la partie (iv), $\sqrt{2|d|} \notin L_4$. Soit donc $|d| \neq 1$. Comme d est impair, alors $2|d|$ n'est pas un carré de $\mathbf{N}$.

Si $2|d| = D^2 + 4d$, alors $2|D$, ce qui est impossible. Si k est pair et si $\xi^2 = 2|d|$, alors nous déduisons comme dans la partie (iii) que $|d|\,\big|\,2$, i.e., $|d| = 1$, ce qui n'est pas le cas; lorsque k est impair, nous avons aussi démontré que $\xi^2 > 2|d|$.

A la partie (iii), nous avons prouvé que si k est pair, alors $\lambda^2 > 2|d|$. Lorsque k est impair, un raisonnement analogue à celui utilisé à la partie (iii) nous conduit à la contradiction $|d|\,\big|\,8$.

Nous avons maintenant les outils nécessaires pour démontrer sous les hypothèses du Théorème 2.1.1 le théorème suivant. Au cours de la preuve, nous ferons fréquemment appel au Lemme 2.3.1 sans le mentionner explicitement.

THÉORÈME 2.3.2. *Si η_2, ϵ_2 et δ_2 sont les unités fondamentales respectives*

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

de $\mathbf{Q}(\theta)$, $\mathbf{Q}(\xi)$ *et* $\mathbf{Q}(\theta\xi)$, *alors*

$$\{\eta_2, \sqrt{\epsilon_2\delta_2}, \epsilon_2\}$$

est un système fondamental d'unités de $L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \xi)$.

Démonstration. Grâce aux Propositions 2.2.2, 2.2.3 et 2.2.4, nous connaissons explicitement l'unité fondamentale des sous-corps quadratiques de L_4. Selon la technique décrite en [7], il nous faut vérifier si

$$\eta_2, \epsilon_2, \delta_2, \eta_2\epsilon_2, \eta_2\delta_2, \epsilon_2\delta_2, \eta_2\epsilon_2\delta_2$$

sont des carrés parfaits de L_4 ou non.

(1) Notons immédiatement que $\sqrt{\epsilon_2} \notin L_4$ et $\sqrt{\delta_2} \notin L_4$ vu que $\sqrt{2} \notin L_4$ et $\sqrt{2|d|} \notin L_4$. Cependant, nous avons

$$\sqrt{\epsilon_2\delta_2} \in L_4.$$

(2) Montrons que $\sqrt{\eta_2} \notin L_4$. Si $(D, d) = (3, -1)$ ou $(5, -5)$ ou si $d = 1$, cela découle du fait que $N_{L_4/F_2}(\eta_2) = -1$ n'est pas un carré de F_2. Soit $d = -1$ et $D \neq 3$ et notons pour nos besoins futurs que

$$(2.3.1) \quad \eta_2 = \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\theta = (D + 2 + \theta)^2/4(D + 2);$$

d'où $\sqrt{\eta_2} \notin L_4$ vu que $\sqrt{D+2} \notin L_4$. Soit $d \neq \pm 1$ et soit $(D, d) \neq (5, -5)$; alors $\sqrt{\eta_2} \notin L_4$ vu que $\sqrt{|d|} \notin L_4$.

(3) Nous déduisons des parties (1) et (2) que $\sqrt{\eta_2\epsilon_2\delta_2} \notin L_4$.

(4) Il reste à investiguer les éléments $\eta_2\epsilon_2$ et $\eta_2\delta_2$. Soit $(D, d) = (3, -1)$ ou $(5, -5)$ ou soit $d = 1$; alors $\eta_2\epsilon_2$ et $\eta_2\delta_2$ ne sont pas des carrés de L_4 vu que

$$N_{L_4/F_2}(\eta_2\epsilon_2) = N_{L_4/K_2}(\eta_2\delta_2) = -1.$$

Soit $d = -1$ et $D \neq 3$; utilisant la structure de η_2 donnée en (2.3.1), nous déduisons que $\sqrt{\eta_2\epsilon_2} \notin L_4$ et $\sqrt{\eta_2\delta_2} \notin L_4$ vu que $\sqrt{2(D+2)} \notin L_4$. Soit enfin $d \neq \pm 1$ et soit $(D, d) \neq (5, -5)$; comme $\sqrt{2|d|} \notin L_4$ et $\sqrt{2} \notin L_4$, nous concluons que $\eta_2\epsilon_2$ et $\eta_2\delta_2$ ne sont pas des carrés de L_4.

D'où la conclusion.

LEMME 2.3.3. *Posons*

$$e_2 = \begin{cases} \dfrac{\xi|d|^{k/2} + \alpha^k}{\beta^k} = \dfrac{\beta^k}{\xi|d|^{k/2} - \alpha^k} & \textit{si } k \textit{ est pair}, \\[2ex] \dfrac{\xi|d|^{(k-1)/2} + \alpha^k}{|\beta|^k} = \dfrac{|\beta|^k}{\xi|d|^{(k-1)/2} - \alpha^k} & \textit{si } k \textit{ est impair}, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{\xi|d|^{k/2} + \beta^k}{\alpha^k} = \dfrac{\alpha^k}{\xi|d|^{k/2} - \beta^k} & \textit{si } k \textit{ est pair}, \\[2ex] \dfrac{\xi|d|^{(k-1)/2} + \beta^k}{\alpha^k} = \dfrac{\alpha^k}{\xi|d|^{(k-1)/2} - \beta^k} & \textit{si } k \textit{ est impair}. \end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Alors e_2 et u_2 sont des unités >1 vérifiant

$$e_2 u_2 = \epsilon_2, \ e_2 u_2^{-1} = \delta_2.$$

Démonstration. Comme $M_{2k} = \alpha^{2k} + \beta^{2k}$, alors les éléments e_2 et u_2 sont bien définis. Sachant que $\beta^k > 0$ si k est pair et que

$$|\beta|^k = (-d/|d|)\beta^k$$

si k est impair, nous pouvons aisément prouver $e_2 > 1$ et $u_2 > 1$. Que ce soient des unités résulte des deux dernières égalités du lemme; en effet, $e_2^2 = \epsilon_2\delta_2$ implique que e_2 est une unité; d'où u_2 est une unité.

Lorsque k est pair, nous avons

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &= \frac{1}{2}\left(\xi^2 + 2\frac{M_k}{|d|^{k/2}}\xi + \frac{M_k^2}{|d|^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\xi^2 + 2\frac{M_k}{|d|^{k/2}}\xi + \xi^2 + 2\right)\\ &= 1 + \frac{M_k}{|d|^{k/2}}\xi + \xi^2 = \frac{\xi^2|d|^k + M_k|d|^{k/2}\xi + \alpha^k\beta^k}{\alpha^k\beta^k}\\ &= \frac{\xi|d|^{k/2} + \alpha^k}{\beta^k}\cdot\frac{\xi|d|^{k/2} + \beta^k}{\alpha^k} = e_2 u_2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \frac{1}{2\theta^2}\left(\theta^2\xi^2 + 2\theta^2\frac{G_k}{|d|^{k/2}}\theta\xi + \frac{\theta^4 G_k^2}{|d|^k}\right)\\ &= \frac{1}{2\theta^2}\left(\theta^2\xi^2 + 2\theta^2\frac{G_k}{|d|^{k/2}}\theta\xi + \theta^2\xi^2 - 2\theta^2\right)\\ &= -1 + \frac{G_k}{|d|^{k/2}}\theta\xi + \xi^2 = \frac{\xi^2|d|^k + G_k|d|^{k/2}\theta\xi - \alpha^k\beta^k}{\alpha^k\beta^k}\\ &= \frac{\xi|d|^{k/2} + \alpha^k}{\beta^k}\cdot\frac{\xi|d|^{k/2} - \beta^k}{\alpha^k} = e_2 u_2^{-1}.\end{aligned}$$

De même, lorsque k est impair, nous avons

$$\epsilon_2 = \frac{-d}{|d|} + \frac{M_k}{|d|^{(k+1)/2}}\xi + \frac{\xi^2}{|d|} = e_2 u_2$$

et

$$\delta_2 = \frac{d}{|d|} + \frac{G_k}{|d|^{(k+1)/2}}\theta\xi + \frac{\xi^2}{|d|} = e_2 u_2^{-1}.$$

Nous pouvons maintenant donner la

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Démonstration du théorème 2.1.1. Nous savons d'après le Théorème 2.3.2 que $\{\eta_2, \sqrt{\epsilon_2\delta_2}, \epsilon_2\}$ est un système fondamental d'unités de L_4. Utilisant le Lemme 2.3.3, nous trouvons

$$\begin{cases} \eta_2 = (\eta_2)^1(e_2)^0(u_2)^0, \\ \sqrt{\epsilon_2\delta_2} = (\eta_2)^0(e_2)^1(u_2)^0, \\ \epsilon_2 = (\eta_2)^0(e_2)^1(u_2)^1, \end{cases}$$

de sorte que le régulateur $R(\eta_2, \sqrt{\epsilon_2\delta_2}, \epsilon_2)$ de $\eta_2, \sqrt{\epsilon_2\delta_2}$ et ϵ_2 vérifie

$$R(\eta_2, \sqrt{\epsilon_2\delta_2}, \epsilon_2) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| R(\eta_2, e_2, u_2) = R(\eta_2, e_2, u_2),$$

ce qui nous permet de conclure que le groupe engendré par $\eta_2, \sqrt{\epsilon_2\delta_2}$ et ϵ_2 est égal au groupe engendré par η_2, e_2 et u_2.

3. Composés d'un corps quadratique et d'un corps pur de degré 4 sur Q. Nous nous proposons au cours de ce chapitre de trouver explicitement un système fondamental d'unités de certains composés $L = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt[4]{M})$ d'un corps quadratique et d'un corps pur de degré 4 sur $\mathbf{Q}$, lorsque m et M sont des entiers qui ont une certaine structure.

3.1. *Description d'une méthode.* Nous allons donner dans cette section un procédé pour calculer un système fondamental d'unités de L et nous utiliserons ce procédé pour prouver plus loin le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1.1. *Soit $L_8 = \mathbf{Q}(\theta, \omega)$ un corps de degré 8 sur $\mathbf{Q}$ tel que*

$$\theta^2 = D^2 + 4d,$$

$$\omega^4 = \begin{cases} \dfrac{M_{4k}(D, d)}{|d|^{2k}} & \textit{si } k \textit{ est pair}, \\ \dfrac{M_{4k}(D, d)}{|d|^{2k-2}} & \textit{si } k \textit{ est impair}, \end{cases}$$

où

$$M_{4k}(D, d) = \sum_{i=0}^{4k} \left[\binom{4k-1-i}{i-1} + \binom{4k-i}{i} \right] D^{4k-2i} d^i$$

avec $D \in \mathbf{N}$, $d \in \mathbf{Z}$ et $d|D$. Supposons que $D^2 + 4d$ et $M_{4k}(D, d)/|d|^{2k}$ sont des entiers >1 qui sont sans facteur carré et posons

$$\alpha = \tfrac{1}{2}D + \tfrac{1}{2}\theta, \beta = \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}\theta.$$

Alors un système fondamental d'unités de L_8 est donné par

$$\{\eta_2, e_2, u_2, e_4, u_4\}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

où

$$\eta_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ si } (D, d) = (3, -1) \text{ ou } (5, -5), \\ \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\theta \text{ si } d = \pm 1 \text{ et si } (D, d) \neq (3, -1), \\ (D + \theta)^2/4|d| \text{ ailleurs}, \end{cases}$$

$$e_2 = \begin{cases} \dfrac{\beta^{2k}}{\omega^2 d^k - \alpha^{2k}} & \text{si } k \text{ est pair}, \\ \dfrac{\beta^{2k}}{\omega^2 d^{k-1} - \alpha^{2k}} & \text{si } k \text{ est impair}, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{2k}}{\omega^2 d^k - \beta^{2k}} & \text{si } k \text{ est pair}, \\ \dfrac{\alpha^{2k}}{\omega^2 d^{k-1} - \beta^{2k}} & \text{si } k \text{ est impair}, \end{cases}$$

$$e_4 = \begin{cases} \dfrac{\beta^{k}}{\omega |d|^{k/2} - \alpha^{k}} & \text{si } k \text{ est pair}, \\ \dfrac{|\beta|^{k}}{\omega |d|^{(k-1)/2} - \alpha^{k}} & \text{si } k \text{ est impair}, \end{cases}$$

$$u_4 = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{k}}{\omega |d|^{k/2} - \beta^{k}} & \text{si } k \text{ est pair}, \\ \dfrac{\alpha^{k}}{\omega |d|^{(k-1)/2} - \beta^{k}} & \text{si } k \text{ est impair}. \end{cases}$$

Exemples. Comme $d|D$, nous pouvons poser $d = \pm N$ et $D = AN$ avec $A, N \in \mathbf{N}$, de sorte que

$$\theta^2 = A^2N^2 \pm 4N,$$

$$\omega^4 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{4k} \left[\binom{4k - 1 - i}{i - 1} + \binom{4k - i}{i} \right] A^{4k-2i}(\pm N)^{2k-i} & \text{si } k \text{ est pair}, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{4k} \left[\binom{4k - 1 - i}{i - 1} + \binom{4k - i}{i} \right] A^{4k-2i}(\pm N)^{2k+2-i} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

et les valeurs de ω^4 pour $1 \leqq k \leqq 3$ sont respectivement

$$A^4N^4 \pm 4A^2N^3 + 2N^2,$$
$$A^8N^4 \pm 8A^6N^3 + 20A^4N^2 \pm 16A^2N + 2,$$
$$A^{12}N^8 \pm 12A^{10}N^7 + 54A^8N^6 \pm 112A^6N^5 + 105A^4N^4 \pm 36A^2N^3 + 2N^2.$$

Remarque. Comme $D^2 + 4d$ ne contient par hypothèse aucun facteur carré, alors d et D sont tous deux impairs. De plus, comme au Chapitre 2, l'hypothèse $D^2 + 4d > 1$ est équivalente à l'hypothèse $D^2 + 4d > 0$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

De façon générale, posons $\theta^2 = m > 1$ et $\omega^4 = M > 1$ et considérons l'extension $L_8 = \mathbf{Q}(\theta, \omega)$ de degré 8 sur $\mathbf{Q}$. Alors L_8 contient trois corps qui sont des extensions quadratiques de K_2; ce sont

$$L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \omega^2),\ F_4 = \mathbf{Q}(\theta\omega),\ K_4 = \mathbf{Q}(\omega).$$

Nous allons montrer comment la connaissance d'un système fondamental d'unités pour chacun des sous-corps L_4, F_4 et K_4 nous permet de calculer un système fondamental d'unités de L_8.

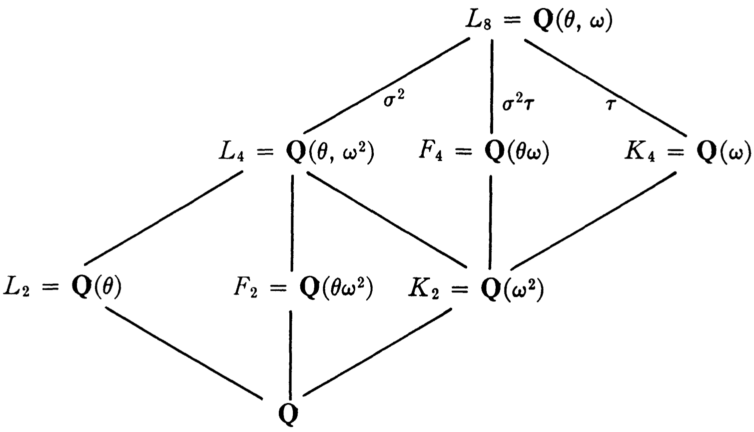

FIGURE 2

Supposons que les conjugués de ω et θ sont:

$$\omega,\ \sigma(\omega) = i\omega,\ \sigma^2(\omega) = -\omega,\ \sigma^3(\omega) = -i\omega \ (\text{où } i = \sqrt{-1});$$
$$\theta,\ \tau(\theta) = -\theta.$$

Ici $\sigma(\theta) = \theta$, $\tau(\omega) = \omega$.

Nous en concluons que le groupe de Galois de L_8 sur K_2 est le groupe de Klein $\{e, \sigma^2, \tau, \sigma^2\tau\}$, que les corps laissés fixes par σ^2, τ et $\sigma^2\tau$ sont respectivement L_4, K_4 et F_4 et que si $z \in L_4$, alors

$$N_{L_8/L_4}(z) = zz^{\sigma^2},\ N_{L_8/K_4}(z) = zz^{\tau},\ N_{L_8/F_4}(z) = zz^{\sigma^2\tau}.$$

Nous sommes donc dans une situation semblable à celle décrite par Wada [7] et nous allons utiliser le même artifice et prouver que le carré z^2 de toute unité z de L_8 est dans le produit de groupes $\mathcal{U}(L_4)\,\mathcal{U}(F_4)\,\mathcal{U}(K_4)$, où $\mathcal{U}(N)$ pour un corps quelconque N est par définition le groupe des unités de N. En effet, si $z \in \mathcal{U}(L_8)$, alors

$$z^2 = (zz^{\sigma^2})(zz^{\sigma^2\tau})/(zz^{\tau})^{\sigma^2},$$

où $zz^{\sigma^2} \in \mathcal{U}(L_4)$, $zz^{\sigma^2\tau} \in \mathcal{U}(F_4)$, $zz^{\tau} \in \mathcal{U}(K_4)$, et $(zz^{\tau})^{\sigma^2} \in \mathcal{U}(K_4)$. En résumé, nous avons l'implication

(3.1.1) $\quad z \in \mathcal{U}(L_8) \Rightarrow z^2 \in \mathcal{U}(L_4)\,\mathcal{U}(F_4)\,\mathcal{U}(K_4).$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Comme L_4 est un composé de deux corps quadratiques, alors un système fondamental $\{x, y, z\}$ d'unités de L_4 peut être calculé avec la méthode de Wada [7]. Comme K_4 est un corps pur de degré 4 sur $\mathbf{Q}$, alors nous pouvons calculer explicitement, au moyen de la méthode de Ljunggren [5], un système fondamental $\{a, \epsilon_2\}$ d'unités de K_4, où sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ϵ_2 est l'unité fondamentale du sous-corps quadratique K_2 de K_4. L'extension F_4 est aussi un corps pur de degré 4 sur $\mathbf{Q}$, et avec la méthode de Ljunggren [5], nous pouvons encore obtenir un système fondamental $\{b, \epsilon_2\}$ d'unités de F_4, où sans perte de généralité, nous pouvons encore supposer que ϵ_2 est l'unité fondamentale du sous-corps quadratique K_2 de F_4. Il est maintenant aisé de voir que le nombre d'éléments d'un système fondamental d'unités de L_8 est égal à 5 et que

$$S = \{x, y, z, a, b\}$$

est un système indépendant maximal d'unités de L_8. L'étape suivante consiste à regarder si L_8 contient ou non les racines carrées des éléments de

$$B(S) = \begin{Bmatrix} x, y, z, a, b, xy, xz, xa, xb, yz, ya, yb, za, zb, ab, \\ xyz, xya, xyb, xza, xzb, xab, yza, yzb, yab, zab, \\ xyza, xyzb, xyab, xzab, yzab, xyzab \end{Bmatrix}.$$

La relation (3.1.1) nous permet de conclure que le groupe (sans torsion) $\mathscr{U}(L_8)$ des unités de L_8 est engendré par les éléments de B et par les racines carrées des éléments de B contenues dans L_8, de sorte qu'un système de générateurs de $\mathscr{U}(L_8)$ peut être obtenu.

Dans le cas d'un composé de deux corps quadratiques réels, Wada [7] a donné un algorithme permettant de vérifier si un élément est le carré d'un autre élément; un théorème semblable peut être facilement énoncé dans le cas d'un composé d'un corps quadratique réel et d'un corps pur de degré 4 sur $\mathbf{Q}$; nous n'avons cependant pas besoin d'un tel théorème.

3.2. *Unités des sous-corps biquadratiques.* D'après la méthode décrite à la section précédente, il nous faut d'abord déterminer un système fondamental d'unités de K_4, F_4 et L_4 respectivement. Nous aurons besoin du résultat suivant dû à Stender [6].

THÉORÈME 3.2.1. *Soit $K = \mathbf{Q}(\omega)$ un corps de degré 4 sur $\mathbf{Q}$ tel que*

$$\omega^4 = M_4(D_1, d_1) = D_1^4 + 4D_1^2 d_1 + 2d_1^2 > 1$$

avec $D_1 \in \mathbf{N}$, $d_1 \in \mathbf{Z}$, $d_1 | D_1$ et $D_1^2 + 4d_1 > 0$. Supposons que $|d_1|$ et M_4/d_1^2 sont sans facteur carré. Alors

$$\left\{\frac{-d_1 + D_1\omega + \omega^2}{|d_1|}, \frac{|d_1|}{-d_1 - D_1\omega + \omega^2}\right\}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

est un système fondamental d'unités de K. Même conclusion pour

$$\left\{\frac{-d_1 + D_1\omega + \omega^2}{|d_1|}, \frac{(D_1^2 + 2d_1 + \omega^2)^2}{2d_1^2}\right\}.$$

Stender a énoncé son théorème en supposant $\omega^4 > 2$; quant à nous, nous préférons ajouter l'hypothèse $D_1^2 + 4d_1 > 0$ qui implique tacitement que $\omega^4 > 2$. Nous pouvons facilement déduire de ce théorème les résultats suivants.

THÉORÈME 3.2.2. *Soit $K_4 = \mathbf{Q}(\omega)$ un corps de degré 4 sur $\mathbf{Q}$ tel que*

$$\omega^4 = \begin{cases} M_{4k}(D, d)/|d|^{2k} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ M_{4k}(D, d)/|d|^{2k-2} & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

avec $D \in \mathbf{N}$, $d \in \mathbf{Z}$, $d|D$, $D^2 + 4d > 1$ et $\omega^4 > 1$. Supposons $M_{4k}/|d|^{2k}$ sans facteur carré. Si k est impair, supposons aussi $|d|$ sans facteur carré. Alors un système fondamental d'unités de K_4 est donné par

$$\{\gamma_4, \epsilon_4\}$$

où

$$\gamma_4 = \begin{cases} 1 + \dfrac{M_k}{|d|^{k/2}}\,\omega + \omega^2 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{-d}{|d|} + \dfrac{M_k}{|d|^{(k+1)/2}}\,\omega + \dfrac{\omega^2}{|d|} & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$\epsilon_4 = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{M_k}{|d|^{k/2}}\,\omega + \omega^2\right)^{-1} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \left(\dfrac{-d}{|d|} - \dfrac{M_k}{|d|^{(k+1)/2}}\,\omega + \dfrac{\omega^2}{|d|}\right)^{-1} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Même conclusion pour

$$\{\gamma_4, \epsilon_2\}$$

où

$$\epsilon_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M_{2k}}{|d|^k} + \omega^2\right)^2 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M_{2k}}{|d|^k} + \dfrac{\omega^2}{|d|}\right)^2 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. Nous pouvons écrire ω^4 sous la forme

$$\omega^4 = \begin{cases} \dfrac{M_4(M_k, -(-d)^k)}{|d|^{2k}} = M_4\left(\dfrac{M_k}{|d|^{k/2}}, -1\right) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{M_4(M_k, -(-d)^k)}{|d|^{2k-2}} = M_4\left(\dfrac{M_k}{|d|^{(k-1)/2}}, d\right) & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

i.e., ω^4 s'écrit sous la forme $M_4(D_1, d_1)$ où le couple

$$(D_1, d_1) = \begin{cases} \left(\dfrac{M_k(D, d)}{|d|^{k/2}}, -1\right) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \left(\dfrac{M_k(D, d)}{|d|^{(k-1)/2}}, d\right) & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

et où $D_1 \in \mathbf{N}$, $d_1 \in \mathbf{Z}$, $d_1|D_1$; pour montrer que $D_1 \in \mathbf{N}$, lorsque k est impair, il s'agit de noter que $|d|^{(k-1)/2} \mid M_k(D, d)$ et de montrer que $M_k = \alpha^k + \beta^k > 0$. De plus,

$$D_1^2 + 4d_1 = \begin{cases} \dfrac{M_k^2(D, d) - 4d^k}{|d|^k} = \dfrac{(D^2 + 4d)G_k^2(D, d)}{|d|^k} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{M_k^2(D, d) + 4d^k}{|d|^{k-1}} = \dfrac{(D^2 + 4d)G_k^2(D, d)}{|d|^{k-1}} & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

où $|d|^k \mid G_k^2(D, d)$ si k est pair et où $|d|^{k-1} \mid G_k^2(D, d)$ si k est impair.

Comme $D^2 + 4d > 1$ entraîne $G_k(D, d) \neq 0$, alors $D_1^2 + 4d_1 > 1$. Lorsque que k est pair, nous pouvons donc appliquer le théorème précédent vu que par hypothèse

$$|d_1| = 1 \text{ et } M_4(D_1, d_1)/d_1^2 = M_{4k}(D, d)/|d|^{2k}$$

sont sans facteur carré. Il en est de même, lorsque k est impair, vu que

$$|d_1| = |d| \text{ et } M_4(D_1, d_1)/d_1^2 = \omega^4/d^2 = M_{4k}(D, d)/|d|^{2k}$$

sont par hypothèse sans facteur carré. D'où un système fondamental d'unités de K_4 est donné par $\{\gamma_4, \epsilon_4\}$. Même conclusion pour $\{\gamma_4, \epsilon_2\}$ où

$$\epsilon_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M_k^2(D, d) - 2d^k}{|d|^k} + \omega^2\right)^2 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{2d^2}\left(\dfrac{M_k^2(D, d) + 2d^k}{|d|^{k-1}} + \omega^2\right)^2 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ceci termine la preuve, vu que $M_{2k} = M_k^2 - 2(-d)^k$.

Il est amusant de remarquer que d'une part, le cas où $k = 1$ dans le Théorème 3.2.2 nous donne le Théorème 3.2.1, alors que d'autre part, le Théorème 3.2.2 a été obtenu à l'aide du Théorème 3.2.1, en ce sens que l'entier ω^4 du Théorème 3.2.2 est précisément de la forme $M_4(D_1, d_1)$ pour certains entiers D_1 et d_1 trouvés explicitement.

THÉORÈME 3.2.3. *Soit* $F_4 = \mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{Q}(\theta\omega)$ *un corps de degré* 4 *sur* $\mathbf{Q}$ *tel que*

$$\lambda^4 = \begin{cases} \theta^4\omega^4 & \textit{si } k \textit{ est pair,} \\ \theta^4\omega^4/|d|^4 & \textit{si } k \textit{ est impair,} \end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

où

$$\theta^2 = D^2 + 4d,$$

$$\omega^4 = \begin{cases} M_{4k}(D,d)/|d|^{2k} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ M_{4k}(D,d)/|d|^{2k-2} & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

avec $D \in \mathbf{N}$, $d \in \mathbf{Z}$, $d|D$, $\theta^2 > 1$ *et* $\omega^4 > 1$. *Supposons* $M_{4k}/|d|^{2k}$ *sans facteur carré. Si k est pair, supposons aussi* $D^2 + 4d$ *sans facteur carré et si k est impair, supposons* $(D^2 + 4d)/|d|$ *sans facteur carré. Alors un système fondamental d'unités de* F_4 *est donné par*

$$\{\delta_4, \psi_4\}$$

où

$$\delta_4 = \begin{cases} -1 + \dfrac{G_k}{|d|^{k/2}}\theta\omega + \omega^2 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{d}{|d|} + \dfrac{G_k}{|d|^{(k+1)/2}}\theta\omega + \dfrac{\omega^2}{|d|} & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$\psi_4 = \begin{cases} \left(-1 - \dfrac{G_k}{|d|^{k/2}}\theta\omega + \omega^2\right)^{-1} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \left(\dfrac{d}{|d|} - \dfrac{G_k}{|d|^{(k+1)/2}}\theta\omega + \dfrac{\omega^2}{|d|}\right)^{-1} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Même conclusion pour

$$\{\delta_4, \epsilon_2\}$$

où

$$\epsilon_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M_{2k}}{|d|^k} + \omega^2\right)^2 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M_{2k}}{|d|^k} + \dfrac{\omega^2}{|d|}\right)^2 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. Nous déduisons de la Proposition 1.6 que

$$\lambda^4 = \frac{M_4((D^2+4d)G_k, (-d)^k(D^2+4d))}{|d|^{2k}}$$

$$= M_4\left(\frac{(D^2+4d)G_k}{|d|^{k/2}}, D^2 + 4d\right) \text{ si } k \text{ est pair,}$$

$$\lambda^4 = \frac{M_4((D^2+4d)G_k, (-d)^k(D^2+4d))}{|d|^{2k+2}}$$

$$= M_4\left(\frac{(D^2+4d)G_k}{|d|^{(k+1)/2}}, \frac{D^2+4d}{-d}\right) \text{ si } k \text{ est impair.}$$

Donc γ^4 s'écrit sous la forme $M_4(D_1, d_1)$ où le couple

$$(D_1, d_1) = \begin{cases} \left(\dfrac{(D^2+4d)G_k}{|d|^{k/2}}, D^2 + 4d\right) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \left(\dfrac{(D^2+4d)G_k}{|d|^{(k+1)/2}}, \dfrac{D^2+4d}{-d}\right) & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

et où $D_1 \in \mathbf{N}$, $d_1 \in \mathbf{Z}$, $d_1 | D_1$; pour montrer que $D_1 \in \mathbf{N}$, il s'agit d'utiliser le Lemme 1.7 et le fait que $\sqrt{D^2 + 4d}\, G_k = \alpha^k - \beta^k$ est positif.

De plus,

$$D_1^2 + 4d_1 = \begin{cases} \dfrac{(D^2+4d)[(D^2+4d)G_k^{\,2} + 4d^k]}{|d|^k} = \dfrac{(D^2+4d)M_k^{\,2}}{|d|^k} & \text{si } k \text{ est pair,} \\[2ex] \dfrac{(D^2+4d)[(D^2+4d)G_k^{\,2} - 4d^k]}{|d|^{k+1}} = \dfrac{(D^2+4d)M_k^{\,2}}{|d|^{k+1}} & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

où $|d|^k \mid M_k^2$ si k est pair et où $|d|^{k+1} \mid M_k^2$ si k est impair. Si $d > 0$, alors $M_k^2 > 0$. Si $d < 0$, alors

$$M_k^2 = (D^2 + 4d)G_k^2 + 4(-d)^k > 0.$$

Donc $D_1^2 + 4d_1 > 0$.

Enfin, si k est pair, alors

$$|d_1| = |D^2 + 4d| = \theta^2 \text{ et } M_4(D_1, d_1)/d_1^2 = \lambda^4/\theta^4 = \omega^4$$

sont par hypothèse sans facteur carré. Si k est impair,

$$|d_1| = |(D^2 + 4d)/d| \text{ et } M_4(D_1, d_1)/d_1^2 = \gamma^4 d^2/\theta^4 = \omega^4/d^2$$

sont aussi sans facteur carré. Nous pouvons donc appliquer le Théorème 3.2.1 et déduire qu'un système fondamental d'unités de F_4 est donné par $\{\delta_4, \psi_4\}$, où si k est pair,

$$\delta_4 = \frac{-(D^2+4d) + \dfrac{(D^2+4d)G_k}{|d|^{k/2}}\lambda + \lambda^2}{|D^2+4d|}$$

$$= -1 + \frac{G_k}{|d|^{k/2}}\lambda + \frac{\lambda^2}{D^2+4d},$$

$$\psi_4 = \left(-1 - \frac{G_k}{|d|^{k/2}}\lambda + \frac{\lambda^2}{D^2+4d}\right)^{-1},$$

et si k est impair,

$$\delta_4 = \frac{\dfrac{D^2+4d}{d} + \dfrac{(D^2+4d_7)G_k}{|d|^{(k+1)/2}}\lambda + \lambda^2}{\dfrac{D^2+4d}{|d|}}$$

$$= \frac{d}{|d|} + \frac{G_k}{|d|^{(k+1)/2}}\lambda + \frac{|d|\lambda^2}{D^2+4d},$$

$$\psi_4 = \left(\frac{d}{|d|} - \frac{G_k}{|d|^{(k-1)/2}}\lambda + \frac{|d|\lambda^2}{D^2+4d}\right)^{-1}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Même conclusion pour $\{\delta_4, \epsilon_2\}$, où si k est pair,

$$\epsilon_2 = \frac{\left(\dfrac{(D^2+4d)^2 G_k^{\,2}}{|d|^k} + 2(D^2+4d) + \lambda^2\right)^2}{2(D^2+4d)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(D^2+4d)G_k^{\,2} + 2d^k}{|d|^k} + \frac{\lambda^2}{D^2+4d}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M_{2k}}{|d|^k} + \frac{\lambda^2}{D^2+4d}\right)^2,$$

et si k est impair,

$$\epsilon_2 = \left(\frac{(D^2+4d)^2 G_k^{\,2}}{|d|^{k+1}} + 2\left(\frac{D^2+4d}{-d}\right) + \lambda^2\right)^2 \Big/ 2\left(\frac{D^2+4d}{-d}\right)^2$$

$$= \frac{d^2}{2}\left(\frac{M_k^{\,2} + 2d^k}{|d|^{k+1}} + \frac{\lambda^2}{D^2+4d}\right)^2 = \frac{d^2}{2}\left(\frac{M_{2k}}{|d|^{k+1}} + \frac{\lambda^2}{D^2+4d}\right)^2.$$

Sous les hypothèses du Théorème 3.1.1, nous déduisons du Théorème 2.1.1 le résultat suivant.

PROPOSITION 3.2.4. *Un système fondamental d'unités de* $L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \omega^2)$ *est donné par*

$$\{e_2, u_2, \eta_2\},$$

où

$$e_2 = \begin{cases} \dfrac{\beta^{2k}}{\omega^2 d^k - \alpha^{2k}} & \textit{si } k \textit{ est pair}, \\[2ex] \dfrac{\beta^{2k}}{\omega^2 d^{k-1} - \alpha^{2k}} & \textit{si } k \textit{ est impair}, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{2k}}{\omega^2 d^k - \beta^{2k}} & \textit{si } k \textit{ est pair}, \\[2ex] \dfrac{\alpha^{2k}}{\omega^2 d^{k-1} - \beta^{2k}} & \textit{si } k \textit{ est impair}, \end{cases}$$

$$\eta_2 = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} & \textit{si } (D, d) = (3, -1) \textit{ ou } (5, -5), \\ \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\theta & \textit{si } d = \pm 1 \textit{ et si } (D, d) \neq (3, -1), \\ (D+\theta)^2/4|d| & \textit{ailleurs}. \end{cases}$$

Démonstration. Il s'agit de considérer le cas pair du Théorème 2.1.1, i.e., de considérer le cas où dans ce théorème

$$\xi^2 = M_{2k_1}(D, d)/|d|^{k_1} = M_{2(2k)}(D, d)/|d|^{2k}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

avec k_1 pair, i.e., $k_1 = 2k$, et de noter que

$$\xi^2 = \begin{cases} (\omega^2)^2 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ (\omega^2)^2/|d|^2 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

D'où la conclusion.

3.3. *Unités de L_8.* Connaissant un système fondamental d'unités pour chacun des sous-corps L_4, F_4 et K_4 de L_8, nous sommes maintenant en mesure d'obtenir un système fondamental d'unités de L_8. Quelques résultats préliminaires sont de mise.

LEMME 3.3.1. *Les unités ϵ_2, $-\epsilon_2$, ϵ_2^{-1} et $-\epsilon_2^{-1}$ où*

$$\epsilon_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M_{2k}}{|d|^k} + \omega^2\right)^2 & \textit{si } k \textit{ est pair,} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M_{2k}}{|d|^k} + \dfrac{\omega^2}{|d|}\right)^2 & \textit{si } k \textit{ est impair,} \end{cases}$$

ne sont pas des carrés de L_8. En particulier, ϵ_2 n'est pas un carré de K_4 ou de F_4.

Démonstration. Si ϵ_2 est un carré de L_8, alors $\sqrt{2}$ est un élément d'un sous-corps quadratique du corps $L_4 = \mathbf{Q}(\theta, \omega^2)$. Or ce dernier corps statisfait aux hypothèses du Théorème 2.1.1. Donc $\sqrt{2}$ ne peut être un élément de L_4 d'après la partie (iv) du Lemme 2.3.1. Comme $\sqrt{-2}$ ne peut être un élément de L_8, nous avons la conclusion.

LEMME 3.3.2. *Les éléments*

$$e_4 = \begin{cases} \dfrac{\beta^k}{\omega|d|^{k/2} - \alpha^k} & \textit{si } k \textit{ est pair,} \\ \dfrac{|\beta|^k}{\omega|d|^{(k-1)/2} - \alpha^k} & \textit{si } k \textit{ est impair,} \end{cases}$$

$$u_4 = \begin{cases} \dfrac{\alpha^k}{\omega|d|^{k/2} - \beta^k} & \textit{si } k \textit{ est pair,} \\ \dfrac{\alpha^k}{\omega|d|^{(k-1)/2} - \beta^k} & \textit{si } k \textit{ est impair,} \end{cases}$$

$$E_4 = \begin{cases} \dfrac{\omega|d|^{k/2} + \alpha^k}{\beta^k} & \textit{si } k \textit{ est pair,} \\ \dfrac{\omega|d|^{(k-1)/2} + \alpha^k}{|\beta|^k} & \textit{si } k \textit{ est impair,} \end{cases}$$

$$U_4 = \begin{cases} \dfrac{\omega|d|^{k/2} + \beta^k}{\alpha^k} & \textit{si } k \textit{ est pair,} \\ \dfrac{\omega|d|^{(k-1)/2} + \beta^k}{\alpha^k} & \textit{si } k \textit{ est impair,} \end{cases}$$

sont des unités >1 de L_8 qui satisfont les relations suivantes:

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

(i) $\epsilon_4 = e_4 u_4$,
(ii) $\gamma_4 = E_4 U_4$,
(iii) $\delta_4 = E_4 u_4^{-1}$,
(iv) $\psi_4 = u_4^{-1} e_4$.

Démonstration. Que ce soient des unités résulte des égalités (ii) et (iii) du lemme; en effet,

$$\gamma_4 \delta_4 u_2 = E_4^2 U_4 u_4^{-1} U_2 = E_4^2 u_2^{-1} u_2 = E_4^2$$

implique que E_4 est une unité; d'où e_4, u_4 et U_4 sont des unités.

Montrons que $e_4 > 1$ lorsque k est impair; disons tout d'abord que $\omega|d|^{(k-1)/2} - \alpha^k > 0$ vu que $\omega^4|d|^{2k-2} > \alpha^{4k}$, i.e.,

$$M_{4k} = \alpha^{4k} + \beta^{4k} > \alpha^{4k};$$

nous voulons prouver

$$|\beta|^k > \omega|d|^{(k-1)/2} - \alpha^k,$$

i.e.,

$$\alpha^k + |\beta|^k > \omega|d|^{(k-1)/2}.$$

Soit $d < 0$; alors

$$\alpha^k + |\beta|^k = \alpha^k + \beta^k = M_k > \omega|d|^{k-1}$$

car

$$M_k^4 > M_{4k} = M_4(M_k, -(-d)^k);$$

il est en effet aisé de vérifier que $M_4(D_1, d_1) < D_1^4$ pour $d_1 < 0$. Soit $d > 0$; alors nous voulons prouver l'inégalité

$$\alpha^k + |\beta|^k = \alpha^k - \beta^k = G_k\sqrt{D^2 + 4d} > \omega|d|^{(k-1)/2},$$

i.e.,

$$G_k^4(D^2 + 4d)^2 > M_{4k},$$

ce qui est le cas vu que

$$\begin{aligned} G_k^4(D^2 + 4d)^2 &= (M_k^2 - 4(-d)^k)^2 \\ &= M_k^4 - 8M_k^2(-d)^k + 16(-d)^{2k} \\ &> M_k^4 - 4M_k^2(-d)^k + 2(-d)^{2k} \\ &= M_4(M_k, -(-d)^k) = M_{4k}. \end{aligned}$$

Les autres cas sont étudiés de façon semblable.

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Montrons maintenant les égalités du lemme lorsque k est pair:

$$e_4^{-1}u_4^{-1} = \frac{\omega^2|d|^k - M_k\omega|d|^{k/2} + \alpha^k\beta^k}{\alpha^k\beta^k} = 1 - \frac{M_k}{|d|^{k/2}}\omega + \omega^2 = \epsilon_4^{-1};$$

$$E_4U_4 = \frac{\omega^2|d|^k + M_k\omega|d|^{k/2} + \alpha^k\beta^k}{\alpha^k\beta^k} = 1 + \frac{M_k}{|d|^{k/2}}\omega + \omega^2 = \gamma_4;$$

$$E_4u_4^{-1} = \frac{\omega^2|d|^k + G_k\theta\omega|d|^{k/2} - \alpha^k\beta^k}{\alpha^k\beta^k} = -1 + \frac{G_k}{|d|^{k/2}}\theta\omega + \omega^2 = \delta_4;$$

$$U_4e_4^{-1} = \frac{\omega^2|d|^k - G_k\theta\omega|d|^{k/2} - \alpha^k\beta^k}{\alpha^k\beta^k}$$

$$= -1 - \frac{G_k}{|d|^{k/2}}\theta\omega + \omega^2 = \psi_4^{-1}.$$

Le cas où k est impair s'obtient de façon similaire.

LEMME 3.3.3. *Les formules suivantes sont vraies:*
(i) $N_{L_8/K_4}(e_2) = N_{L_8/F_4}(e_2) = e_2u_2 = \epsilon_2$;
(ii) $N_{L_8/K_4}(u_2) = N_{L_8/F_4}(u_2) = u_2e_2 = \epsilon_2$;
(iii) $N_{L_8/K_4}(\gamma_4) = \gamma_4^2$, $N_{L_8/F_4}(\gamma_4) = \epsilon_2^{-1}$;
(iv) $N_{L_8/K_4}(\delta_4) = \epsilon_2^{-1}$, $N_{L_8/F_4}(\delta_4) = \delta_4^2$;

$$\text{(v) } N_{L_8/K_4}(\eta_2) = N_{L_8/F_4}(\eta_2) = \begin{cases} -1 \textit{ si } (D, d) = (3, -1) \textit{ ou } (5, -5) \\ \quad \textit{ou si } d = 1, \\ 1 \textit{ ailleurs.} \end{cases}$$

Démonstration. (A) Soit k impair.

$$\text{(i) } N_{L_8/K_4}(e_2) = N_{L_8/F_4}(e_2) = \frac{\omega^2 d^{k-1} + \alpha^{2k}}{\beta^{2k}} \cdot \frac{\omega^2 d^{k-1} + \beta^{2k}}{\alpha^{2k}} = e_2u_2 = \epsilon_2.$$

$$\text{(ii) } N_{L_8/K_4}(u_2) = N_{L_8/F_4}(u_2) = \frac{\omega^2 d^{k-1} + \beta^{2k}}{\alpha^{2k}} \cdot \frac{\omega^2 d^{k-1} + \alpha^{2k}}{\beta^{2k}} = u_2e_2 = \epsilon_2.$$

(iii) D'une part,

$$N_{L_8/K_4}(\gamma_4) = \left(\frac{-d}{|d|} + \frac{M_k}{|d|^{(k+1)/2}}\omega + \frac{\omega^2}{|d|}\right)^2 = \gamma_4^2.$$

D'autre part, nous rappelant les formules

$$M_{2k} = M_2(M_k, -(-d)^k) = M_k^2 - 2(-d)^k \text{ et}$$

$$M_{4k} = M_2(M_{2k}, -(-d)^{2k}) = M_{2k}^2 - 2(-d)^{2k},$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

nous trouvons

$$N_{L_8/F_4}(\gamma_4) = \left(\frac{-d}{|d|} + \frac{M_k}{|d|^{(k+1)/2}}\,\omega + \frac{\omega^2}{|d|}\right)\left(\frac{-d}{|d|} - \frac{M_k}{|d|^{(k+1)/2}}\,\omega + \frac{\omega^2}{|d|}\right)$$
$$= 1 - \left(\frac{M_k^{\,2}}{|d|^{k+1}} + \frac{2d}{|d|^2}\right)\omega^2 + \frac{\omega^4}{|d|^2}$$
$$= 1 - \left(\frac{M_k^{\,2} + 2d|d|^{k-1}}{|d|^k}\right)\frac{\omega^2}{|d|} + \frac{\omega^4}{|d|^2}$$
$$= 1 - \frac{M_{2k}}{|d|^{k+1}}\,\omega^2 + \frac{\omega^4}{|d|^2} = \frac{M_{2k}^{\,2}}{2|d|^{2k}} - \frac{M_{2k}}{|d|^{k+1}}\,\omega^2 + \frac{\omega^4}{2|d|^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M_{2k}}{|d|^k} - \frac{\omega^2}{|d|}\right)^2 = \epsilon_2^{-1}.$$

(iv) D'une part,

$$N_{L_8/F_4}(\delta_4) = \left(\frac{d}{|d|} + \frac{G_k}{|d|^{(k+1)/2}}\,\theta\omega + \frac{\omega^2}{|d|}\right)^2.$$

D'autre part, nous rappelant la formule

$$M_k^2 = (D^2 + 4d)G_k^2 + 4(-d)^k,$$

nous avons

$$N_{L_8/K_4}(\delta_4) = \left(\frac{d}{|d|} + \frac{G_k}{|d|^{(k+1)/2}}\,\theta\omega + \frac{\omega^2}{|d|}\right)\left(\frac{d}{|d|} - \frac{G_k}{|d|^{(k+1)/2}}\,\theta\omega + \frac{\omega^2}{|d|}\right)$$
$$= 1 - \left(\frac{G_k^{\,2}\theta^2}{|d|^{k+1}} - \frac{2d}{|d|^2}\right)\omega^2 + \frac{\omega^4}{|d|^2}$$
$$= 1 - \left(\frac{G_k^{\,2}\theta^2 - 2d|d|^{k-1}}{|d|^k}\right)\frac{\omega^2}{|d|} + \frac{\omega^4}{|d|^2}$$
$$= 1 - \left(\frac{M_k^{\,2} + 2d^k}{|d|^k}\right)\frac{\omega^2}{|d|} + \frac{\omega^4}{|d|^2} = 1 - \frac{M_{2k}}{|d|^{k+1}}\,\omega^2 + \frac{\omega^4}{|d|^2} = \epsilon_2^{-1}.$$

(v) Cette partie découle du fait que

$$N_{L_8/K_4}(\eta_2) = N_{L_8/F_4}(\eta_2) = N_{L_2/\mathbf{Q}}(\eta_2).$$

(B) Le cas où k est pair se développe de façon semblable.

D'après ce que nous avons vu au début du chapitre, nous savons que

$$S = \{e_2, u_2, \eta_2, \gamma_4, \delta_4\}$$

est un système indépendant maximal d'unités qui engendre un sous-groupe d'indice au plus égal à $2^5 = 32$ dans le groupe engendré par les éléments d'un système fondamental d'unités de L_8. Il s'agit maintenant

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

de regarder si L_8 contient ou non les racines carrées des éléments de l'ensemble $A(S)$ défini à la Section 3.1.

Si E est le carré d'une unité de L_8, alors $N_{L_8/N}(E)$ est le carré d'une unité de N pour tout sous-corps N de L_8. Plus généralement, si E est le carré d'un élément de L_8, alors $N_{L_8/N}(E)$ est le carré d'un élément de N. C'est une propriété que nous allons utiliser pour éliminer plusieurs cas possibles.

En utilisant le Lemme 3.3.3, nous déduisons aisément les normes relatives suivantes:

$$\begin{aligned}
&N_{L_8/K_4}(\delta_4) = \epsilon_2^{-1},\\
&N_{L_8/K_4}(e_2) = N_{L_8/K_4}(u_2) = N_{L_8/K_4}(\delta_4 e_2 u_2) = \epsilon_2,\\
&N_{L_8/K_4}(\delta_4 \eta_2) = -\epsilon_2^{-1} \text{ ou } \epsilon_2^{-1},\\
&N_{L_8/K_4}(e_2\eta_2) = N_{L_8/K_4}(u_2\eta_2) = N_{L_8/K_4}(\delta_4 e_2 u_2 \eta_2) = -\epsilon_2 \text{ ou } \epsilon_2,\\
&N_{L_8/K_4}(\gamma_4\delta_4) = \gamma_4^2\epsilon_2^{-1},\\
&N_{L_8/K_4}(\gamma_4 e_2) = N_{L_8/K_4}(\gamma_4 u_2) = N_{L_8/K_4}(\gamma_4\delta_4 e_2 u_2) = \gamma_4^2\epsilon_2,\\
&N_{L_8/K_4}(\gamma_4\delta_4\eta_2) = -\gamma_4^2\epsilon_2^{-1} \text{ ou } \gamma_4^2\epsilon_2^{-1},\\
&N_{L_8/K_4}(\gamma_4 e_2\eta_2) = N_{L_8/K_4}(\gamma_4 u_2\eta_2) = N_{L_8/K_4}(\gamma_4\delta_4 e_2 u_2\eta_2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -\gamma_4^2\epsilon_2 \text{ ou } \gamma_4^2\epsilon_2;\\
&N_{L_8/F_4}(\gamma_4) = \epsilon_2^{-1},\\
&N_{L_8/F_4}(\gamma_4\eta_2) = -\epsilon_2^{-1} \text{ ou } \epsilon_2^{-1},\\
&N_{L_8/F_4}(\delta_4 e_2) = N_{L_8/F_4}(\delta_4 u_2) = \delta_4^2\epsilon_2,\\
&N_{L_8/F_4}(\gamma_4 e_2 u_2) = \epsilon_2,\\
&N_{L_8/F_4}(\delta_4 e_2\eta_2) = N_{L_8/F_4}(\delta_4 u_2\eta_2) = -\delta_4^2\epsilon_2 \text{ ou } \delta_4^2\epsilon_2,\\
&N_{L_8/F_4}(\gamma_4 e_2 u_2\eta_2) = -\epsilon_2 \text{ ou } \epsilon_2.
\end{aligned}$$

Le Lemme 3.3.1 et ces normes relatives nous permettent de dire qu'il y a au moins 24 éléments de $A(S)$ qui ne sont pas des carrés de L_8. De plus, e_2u_2 n'est pas un carré de L_8, vu que $e_2u_2 = \epsilon_2$.

Si $(D, d) = (3, -1)$ ou $(5, -5)$ ou si $d = 1$, alors

$$\eta_2,\ e_2u_2\eta_2,\ \gamma_4\delta_4e_2\eta_2,\ \gamma_4\delta_4u_2\eta_2$$

ne sont pas des carrés de L_8 vu que

$$\begin{aligned}
&N_{L_8/K_4}(\eta_2) = -1,\ N_{L_8/K_4}(e_2u_2\eta_2) = -e_2^2u_2^2,\\
&N_{L_8/K_4}(\gamma_4\delta_4e_2\eta_2) = N_{L_8/K_4}(\gamma_4\delta_4u_2\eta_2) = -\gamma_4^2
\end{aligned}$$

ne sont pas des carrés de K_4.

Notons cependant que $\gamma_4\delta_4u_2$ est un carré de L_8 vu que, d'après le Lemme 3.3.2,

$$\gamma_4\delta_4u_2 = (E_4U_4)(E_4u_4^{-1})u_2 = E_4^2U_4u_4^{-1}u_2 = E_4^2.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Le moment est maintenant venu de donner la preuve du résultat suivant valide sous les hypothèses du Théorème 3.1.1.

THÉORÈME 3.3.4. *Soient* $\{e_2, u_2, \eta_2\}$, $\{e_2u_2 = \epsilon_2, \gamma_4\}$ *et* $\{e_2u_2, \delta_4\}$ *des systèmes fondamentaux d'unités de* L_4, K_4 *et* F_4 *respectivement. Alors un système fondamental d'unités de* L_8 *est donné par*

$$\{\eta_2, e_2, u_2, \gamma_4, \sqrt{\gamma_4\delta_4u_2}\}.$$

Démonstration. La preuve est complète si nous montrons que

$$\gamma_4\delta_4e_2,\ \eta_2,\ e_2u_2\eta_2,\ \gamma_4\delta_4e_2\eta_2,\ \gamma_4\delta_4u_2\eta_2$$

ne sont pas des carrés de L_8; ce sont effectivement les cinq derniers éléments de $A(S)$ qu'il nous reste à investiguer.

Ecrivons $\gamma_4\delta_4e_2$ d'une autre façon. Soit k impair. Alors d'après le Lemme 3.3.2, et grâce au fait que

$$\begin{aligned}\omega^4/2|d|^2 &= M_{4k}/2|d|^{2k} = (M_{2k}{}^2 - 2(-d)^{2k})/2|d|^{2k}\\ &= (G_{2k}{}^2\theta^2 + 2|d|^{2k})/2|d|^{2k} = G_{2k}{}^2\theta^2/2|d|^{2k} + 1,\end{aligned}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}\gamma_4\delta_4e_2 &= E_4{}^2U_4u_4{}^{-1}e_2\\ &= E_4{}^2\left(\frac{\omega|d|^{(k-1)/2} + \beta^k}{\alpha^k}\right)\left(\frac{\omega|d|^{(k-1)/2} - \beta^k}{\alpha^k}\right)\left(\frac{\omega^2d^{k-1} + \alpha^{2k}}{\beta^{2k}}\right)\\ &= E_4{}^2\left(\frac{\omega^4|d|^{2k-2} + G_{2k}d^{k-1}\theta\omega^2 - (\alpha\beta)^{2k}}{(\alpha\beta)^{2k}}\right)\\ &= E_4{}^2\left(-1 + \frac{\omega^4}{d^2} + \frac{G_{2k}}{d^{k+1}}\theta\omega^2\right)\\ &= E_4{}^2\left(\frac{G_{2k}{}^2\theta^2}{2|d|^{2k}} + \frac{\omega^4}{2|d|^2} + \frac{G_{2k}}{|d|^{k+1}}\theta\omega^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{|d|} + \frac{G_{2k}}{|d|^k}\theta\right)^2E_4{}^2.\end{aligned}$$

Le cas où k est pair se développe de façon semblable, de sorte que

$$\gamma_4\delta_4e_2 = \begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\omega^2 + \dfrac{G_{2k}}{|d|^k}\theta\right)^2E_4{}^2 & \text{si } k \text{ est pair,}\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega^2}{|d|} + \dfrac{G_{2k}}{|d|^k}\theta\right)^2E_4{}^2 & \text{si } k \text{ est impair.}\end{cases}$$

Donc si $\delta_4\gamma_4e_2$ était un carré de L_8, alors 2 serait un carré de L_8, i.e., serait un carré de L_4, ce qui est impossible d'après le Lemme 2.3.1.

Pour les quatre autres éléments, nous pouvons, d'après ce que nous avons dit précédemment, supposer $(D, d) \neq (3, -1)$, $(D, d) \neq (5, -5)$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

et $d \neq 1$. Remarquons que

$$\eta_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}\theta = (D+2+\theta)^2/4(D+2) \text{ si } d = -1 \text{ et si } D \neq 3, \\ (D+\theta)^2/4|d| \text{ si } d \neq \pm 1 \text{ et si } (D, d) \neq (5, -5), \end{cases}$$

$$\gamma_4\delta_4 e_2\eta_2 = \begin{cases} \dfrac{\eta_2}{2}\left(\omega^2 + \dfrac{G_{2k}}{d^k}\theta\right)^2 E_4^2 & \text{si } k \text{ est pair}, \\ \dfrac{\eta_2}{2}\left(\dfrac{\omega^2}{|d|} + \dfrac{G_{2k}}{|d|^k}\theta\right)^2 E_4^2 & \text{si } k \text{ est impair}, \end{cases}$$

$$\gamma_4\delta_4 u_2\eta_2 = \eta_2 E_4^2,$$

$$e_2 u_2 \eta_2 = \epsilon_2\eta_2 = \begin{cases} \dfrac{\eta_2}{2}\left(\dfrac{M_{2k}}{|d|^k} + \omega^2\right)^2 & \text{si } k \text{ est pair}, \\ \dfrac{\eta_2}{2}\left(\dfrac{M_{2k}}{|d|^k} + \dfrac{\omega^2}{|d|}\right)^2 & \text{si } k \text{ est impair}. \end{cases}$$

Lorsque $d = -1$ et $D \neq 3$, nous concluons que si l'un de ces quatre éléments était un carré de L_8, alors $D + 2$ ou $2(D + 2)$ serait un carré de L_8, i.e., serait un carré de L_4, ce qui est impossible d'après le Lemme 2.3.1. De même, lorsque $|d| \neq 1$ et $(D, d) \neq (5, -5)$, nous concluons que si l'un de ces quatre éléments était un carré de L_8, alors $|d|$ ou $2|d|$ serait un carré de L_8, ce qui est encore impossible d'après le Lemme 2.3.1. D'où la conclusion.

C'est maintenant facile de donner la

Démonstration du Théorème 3.1.1. Nous venons de prouver que

$$\{\eta_2, e_2, u_2, \gamma_4\sqrt{\gamma_4\delta_4 u_2}\}$$

est un système fondamental d'unités de L_8. Nous en déduisons immédiatement des relations $\gamma_4 = E_4U_4$, et $\sqrt{\gamma_4\delta_4 u_2}$ que

$$\{\eta_2, e_2, u_2, E_4, U_4\}$$

est un système fondamental d'unités de L_8. Même conclusion pour

$$\{\eta_2, e_2, u_2, e_4, u_4\},$$

vu que

$$E_4 = e_2^{-1}e_4, \; U_4 = u_2^{-1}u_4.$$

COROLLAIRE 3.3.5. *Un système fondamental d'unités de L_8 est donné par*

$$\{\eta_2, e_2, u_2, E_4, U_4\}.$$

4. Conclusion. Nous voulons conclure ce travail au moyen de quelques remarques.

Supposons que nous connaissons un système fondamental d'unités de $\mathbf{Q}(\sqrt{D^2+4d}, \sqrt{D^2+2d})$. Cela n'entraîne pas immédiatement la

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

connaissance d'un système fondamental d'unités de $L_4 = \mathbf{Q}(\sqrt{D^2 + 4d}, \xi)$ où ξ est défini comme au Théorème 2.1.1, même si L_4 peut s'écrire sous la forme

$$L_4 = \mathbf{Q}(\sqrt{D_1^2 + 4d_1}, \sqrt{D_1^2 + 2d_1}) \text{ avec } d_1|D_1.$$

Si $D_1^2 + 4d_1$ était sans facteur carré, nous aurions la conclusion, mais ce n'est pas le cas vu que pour $k \neq 1$, $D_1^2 + 4d_1$ possède un facteur carré. En effet, nous déduisons de l'équation (2.2.1) que

$$D_1^2 + 4d_1 = \begin{cases} \dfrac{M_k^2}{|d|^k} - 4 = \dfrac{M_k^2 - 4|d|^k}{|d|^k} = \dfrac{(D^2 + 4d)G_k^2}{|d|^k} & \text{si } k \text{ est pair,} \\[2ex] \dfrac{M_k^2}{|d|^{k-1}} + 4d = \dfrac{M_k^2 + 4d^k}{|d|^{k-1}} = \dfrac{(D^2 + 4d)G_k^2}{|d|^{k-1}} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

De même, la connaissance d'un système fondamental d'unités de $\mathbf{Q}(\sqrt{D^2 + 4d}, \sqrt[4]{M_4(D, d)})$ n'entraîne pas immédiatement la connaissance d'un système fondamental d'unités de $L_8 = \mathbf{Q}(\sqrt{D^2 + 4d}, \omega)$ où ω est défini comme au Théorème 3.1.1, même si L_8 peut s'écrire sous la forme

$$L_8 = \mathbf{Q}(\sqrt{D_1^2 + 4d_1}, \sqrt[4]{M_4(D_1, d_1)}) \text{ avec } d_1|D_1.$$

En effet, nous avons vu au cours de la preuve du Théorème 3.2.2 que pour $k \neq 1$, $D_1^2 + 4d_1$ contient un facteur carré.

Dans l'énoncé de la Proposition 2.2.3, nous supposons que $\mathbf{Q}(\xi)$ est de degré 2 sur $\mathbf{Q}$. C'est toujours le cas lorsque $d > 0$. En effet, pour tout $d > 0$, il est aisé de vérifier que si k est pair, nous avons

$$\left(\frac{M_k}{|d|^{k/2}} - 1\right)^2 < \xi^2 = \left(\frac{M_k}{|d|^{k/2}}\right)^2 - 2 < \left(\frac{M_k}{|d|^{k/2}}\right)^2$$

et que si k est impair, nous avons

$$\left(\frac{M_k}{|d|^{(k-1)/2}}\right)^2 < \xi^2 = \left(\frac{M_k}{|d|^{(k-1)/2}}\right)^2 + 2d < \left(\frac{M_k}{|d|^{(k-1)/2}} + 1\right)^2;$$

bref, ξ^2 est toujours compris entre deux carrés consécutifs lorsque $d > 0$.

Nous supposons dans l'énoncé du Théorème 3.2.2 que K_4 est de degré 4 sur $\mathbf{Q}$. C'est toujours le cas lorsque $d > 0$ vu que ω^4 est compris entre deux carrés consécutifs; en effet, si k est pair,

$$\left(\frac{M_{2k}}{|d|^k} - 1\right)^2 < \omega^4 = \left(\frac{M_{2k}}{|d|^k}\right)^2 - 2 < \left(\frac{M_{2k}}{|d|^k}\right)^2.$$

et si k est impair,

$$\left(\frac{M_{2k}}{|d|^{k-1}} - 1\right)^2 < \omega^4 = \left(\frac{M_{2k}}{|d|^{k-1}}\right)^2 - 2d^2 < \left(\frac{M_{2k}}{|d|^{k-1}}\right)^2.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press

Des remarques semblables peuvent se faire pour le corps $\mathbf{Q}(\theta\xi)$ de la Proposition 2.2.4 et pour le corps $\mathbf{Q}(\theta\omega)$ du Théorème 3.2.3.

Bibliographie

1. G. Frei and C. Levesque, *Independent systems of units in certain algebraic number fields*, J. reine angew. Math. *311/312* (1979), 116–144.

2. F. Halter-Koch und H.-J. Stender, *Unabhängige Einheiten für die Körper* $K = \mathbf{Q}(\sqrt[n]{D^n \pm d})$ *mit* $d|D^n$, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *42* (1974), 33–40.

3. T. Kubota, *Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. *10* (1956), 65–85.

4. S. Kuroda, *Über die Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper*, Nagoya Math. J. *1* (1950), 1–10.

5. H.-J. Stender, *Lösbare Gleichungen* $ax^n - by^n = c$ *und Grundeinheiten für einige algebraische Zahlkörper vom Grade* $n = 3, 4, 6$, J. reine angew. Math. *290* (1977), 24–62.

6. ——— *Verstümmelte Grundeinheiten für biquadratische und bikubische Zahlkörper*, Math. Ann. *232* (1978), 55–64.

7. H. Wada, *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, Tokyo U., Fac. of Sc. J., Series I, *13* (1966), 201–209.

Université Laval,
Québec, Québec

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-077-0 Published online by Cambridge University Press