Can. J. Math., Vol. XXIV, No. 5, 1972, pp. 761–767

# GENERALISATION DE LA FORMULE DE RIEMANN-HURWITZ

NGÔ VAN QUÊ

**Introduction: nombre de Chern.** Etant un polynôme $\Phi \in R[X_1, \ldots, X_n]$ à $n$ indéterminés, $\Phi$ est dit de poids homogène $m$ si

$$\Phi(X_1, \ldots, X_n) = \sum q_{\alpha_1\alpha_2} \ldots {}_{\alpha_n} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n},$$

avec $m = \sum_{1 \leqq p \leqq n} 2p\alpha_p$.

Si $E$ est un fibré vectoriel complexe de rang $n$ (i.e., $n$ est la dimension sur $\mathbf{C}$ de la fibre $E_X$) sur une variété différentiable orientée compacte $M$ de dimension $m$, à tout polynôme $\Phi$ à $n$ indéterminés de poids homogène $m$, on associe un nombre de Chern:

$$\begin{aligned} \Phi(E, M) &= \langle \Phi(E), [M] \rangle \\ &= \langle \Phi(C_1(E), \ldots, C_n(E)), [M] \rangle \end{aligned}$$

où $[M]$ est le cycle fondamental défini par l'orientation de $M$ et $\mathrm{C}_i(E)$ la ième classe de Chern de $E$. Dans le cas où le poids homogène de $\Phi$ est différent de la dimension de $M$, on pose: $\Phi(E, M) = 0$.

Il est utile de rappeler [**2**; **4**] que si $\nabla$ est une connexion hermitienne sur $E$, i.e., $\nabla$ est un opérateur différentiel linéaire

$$\nabla : \wedge^p T^*_{\mathbf{C}} \otimes E \to \wedge^{p+1} T^*_{\mathbf{C}} \otimes E,$$

$T^*_{\mathbf{C}}$ étant le fibré des 1-formes complexes sur $M$, telle que

$$\nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^p \omega \wedge \nabla(s),$$

pour toute $p$-forme complexe $\omega$ et section $s$ de $E$ sur $M$, on définit l'opérateur de courbure

$$\nabla^2 = \nabla \circ \nabla : E \to \Lambda^2 T^*_{\mathbf{C}} \otimes E$$

qui est un morphisme de fibré vectoriel. On peut considérer $\nabla^2$ comme une section sur $M$ de $\Lambda^2 T^*_{\mathbf{C}} \otimes \mathrm{End}(E)$, et définir

$$\det\left(\mathrm{Id} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \nabla^2\right) = 1 + C_1(\nabla) + \ldots + C_n(\nabla).$$

Alors, pour tout $i$, $C_i(\nabla)$ est une $2i$-forme réelle fermée dont la classe de cohomologie est par définition $\mathrm{C}_i(E)$, la ième classe de Chern de $E$. Ainsi donc on a

$$\Phi(E, M) = \int_M \Phi(C_1(\nabla), \ldots, C_n(\nabla)).$$

Reçu le 5 mai, 1971.



https://doi.org/10.4153/CJM-1972-073-7 Published online by Cambridge University Press

**Formule de Riemann-Hurwitz généralisée.** (a) Soient donnes deux fibrés vectoriels complexes $E$ et $F$ de rang $n$ sur $M$. Soit $\Phi$ un morphisme de fibré vectoriel complexe sur $M$: $\Phi: E \to F$. Supposons qu'il existe une sous-variété différentiable fermée $N$ de $M$ telle que restreinte sur $M - N$, $\Phi: E|_{M-N}$ $F_{M-N}$ soit un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Considérons alors un voisinage tubulaire fermé $B(N)$ de $N$ et son double différentiable

$$S(N) = B_1(N) \underset{\partial B(N)}{\cup} B_2(N)$$

obtenu de deux exemplaires distincts de $B(N)$ en identifiant leur bord. $S(N)$ est un fibré sur $N$ en sphères $S^r$, $r$ étant la codimension de $N$ dans $M$. Il est immédiat de montrer que $M$ étant compacte orientée, $S(N)$ est aussi une variété compacte orientable de même dimension $m$.

Sur $S(N)$, il existe alors un fibré vectoriel complexe canonique $(E, \phi, F)$ construit en prenant respectivement sur $B_1(N)$ et sur $B_2(N)$ la restriction de $E$ et de $F$ à $B(N)$ et en identifiant sur $B_1(N) \cap B_2(N) = \partial B(N)$ par l'isomorphisme de transition $\phi$ (dans la terminologie de [**1**], $\phi$ est ce qu'on appelle "clutching function").

Ceci étant, pour tout polynôme $\Phi$ de poids homogène $m$, on a

THÉORÈME 1 (Formule de Riemann-Hurwitz généralisée).

$$\Phi(E, M) - \Phi(F, M) = \Phi((E, \phi, F), S(N)),$$

*le second membre étant défini par une orientation convenable de* $S(N)$.

*Preuve.* En effet, soit donnée une connexion hermitienne $\nabla_1$ sur $E$. Soit $B'(N)$ un voisinage tubulaire de $N$, contenu dans l'intérieur de $B(N)$. A l'aide d'une partition de l'unité on exhibe sur $F$ une connexion hermitienne $\nabla_2$ telle que sur $M - B'(N)$ on ait ce diagramme commutatif de faisceaux de sections:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\nabla_1} & T^*\mathbf{c} \otimes E \\ \phi \downarrow & & \downarrow \mathrm{Id} \otimes \phi \\ F & \xrightarrow{\nabla_2} & T^*\mathbf{c} \otimes F. \end{array}$$

D'où:

$$C_i(\nabla_1)|_{M-B(N)} = C_i(\nabla_2)|_{M-B(N)}.$$

Ainsi donc on a

$$(1)\quad \phi(E, M) - \phi(F, M) = \int_M \phi(C_1(\nabla_1), \dots, C_n(\nabla_1)) - \phi(C_1(\nabla_2), \dots, C_n(\nabla_2))$$

$$= \int_{B(N)} \Phi(C_1(\nabla_1), \dots, C_n(\nabla_1)) - \Phi(C_1(\nabla_2), \dots, C_n(\nabla_2)).$$

Or, par la méthode standard de raccordement, on montre facilement qu'il existe une connexion hermitienne $\nabla$ sur $(E, \phi, F)$ telle que sur

$$(E, \phi, F)|_{B_1(N)} \simeq E|_{B(N)}, \nabla \text{ soit égale à } \nabla_1,$$

et sur

$$(E, \phi, F)|_{B_2(N)} \simeq F|_{B(N)}, \nabla \text{ soit égale à } \nabla_2.$$

D'où le second membre de (1) n'est autre que

$$\int_{S(N)} \Phi(C_1(\nabla), \ldots, C_n(\nabla)) = \Phi((E, \phi, F), S(N))$$

pour une orientation convenable de $S(N)$.

(b) Supposons que sur $N$, $\phi$ est de rang constant, ce qui entraîne que sur $N$, nous avons une suite exacte de fibrés vectoriels.

$$0 \to K_1 \to E|_N \xrightarrow{\phi} F|_N \to K_2 \to 0.$$

Nous désignerons par $L$, le sous-fibré de $F|_N$, qui est l'image $\phi(E|_N)$. Ainsi donc, on a ces isomorphismes

$$E|_N \simeq K_1 \oplus L,$$
$$F|_N \simeq L \oplus K_2.$$

Désignons par $\pi: B(N) \to N$, la fibration de $B(N)$ sur $N$. Comme $N$ est un rétract par déformation de $B(N)$, on a:

$$\begin{aligned} E|_{B(N)} &\simeq \pi^*K_1 \oplus \pi^*L, \\ F|_{B(N)} &\simeq \pi^*K_2 \oplus \pi^*L, \end{aligned} \tag{2}$$

où $\pi^*L$, $\pi^*K_1$, $\pi^*K_2$ sont respectivement des fibrés induits par $\pi$ sur $B(N)$. L'image par $\phi$: $E|_{B(N)} \to F|_{B(N)}$ du sous-fibré $\pi^*L$ de $E|_{B(N)}$ est un sous-fibré isomorphe à $\pi^*L$ de $F|_{B(N)}$ et dont le fibré quotient est isomorphe à $\pi^*K_2$. Donc on peut supposer que modulo des isomorphismes de (2), l'isomorphisme $\phi$ soit de la forme

$$\begin{array}{ccc} \phi: E|_{\partial B(N)} & \to & F|_{\partial B(N)} \\ \wr| & & \wr| \\ \pi^*K_1 \oplus \pi^*L & \to & \pi^*K_2 \oplus \pi^*L \\ (x, y) & \to & (\psi(x), y) \end{array}$$

où $\psi$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels:

$$\pi^*K_1|_{\partial B(N)} \to \pi^*K_2|_{\partial B(N)}.$$

Autrement dit, dans le cas considéré, on a le lemme suivant:

LEMME. *Sur $S(N)$, on a l'isomorphisme de fibrés vectoriels*

$$(E, \phi, F) \simeq \pi^*L \oplus (\pi^*K_1, \psi, \pi^*K_2)$$

*où le second membre est la somme directe de $\pi^*L$, le fibré induit de $L$ sur $S(N)$ par la fibration $\pi: S(N) \to N$ et de $(\pi^*K_1, \psi, \pi^*K_2)$, qui est le fibré construit sur*

$$S(N) = B_1(N) \underset{\partial B(N)}{\cup} B_2(N)$$

*par une certaine fonction de transition $\psi$.*

Nous désignerons, pour simplifier, par $1 + C_1(K) + \ldots + C_p(K)$ la classe totale de Chern sur $S(N)$ de $(\pi^*K_1, \psi, \pi^*K_2)$. Et si $1 + C_1(L) + \ldots + C_{n-p}(L)$ est la classe totale de Chern de $L$ sur $N$, $\pi^*(1 + C_1(L) + \ldots + C_{n-1}(L))$, la classe induite par $\pi: S(N) \to N$, sera celle de $\pi^*L$ sur $S(N)$.

Supposons dans la suite que $N$ est une sous-variété orientable connexe de $M$. On a la proposition suivante:

PROPOSITION. *Soient $\Phi_1$ et $\Phi_2$ des polynômes respectivement de $p$ et de $n - p$ indéterminés et de poids homogènes $r$ et $n - r$ ($r$ = codim $N$). On a*

$$\langle \Phi_1(C_1(K), \ldots, C_p(Kg) \wedge \pi^*\Phi_2(C_1(L), \ldots, C_{n-p}(L)); [S(N)] \rangle = k\Phi_2(L, N)$$

*ou $k$ est une constante et $\Phi_2(L, N)$ est le nombre de Chern défini par $\Phi_2$ relativement a une certaine orientation de $N$.*

*Preuve.* Il suffit de se donner des connexions hermitiennes $\nabla$ sur $(\pi^*K_1, \psi, \pi^*K_2)$ et $\nabla_1$ sur $L$. On a

$$\begin{aligned}\langle \Phi_1(C_1(K), \ldots, C_p(K)) \wedge \pi^*\Phi_2(C_1(L), \ldots, C_{n-p}(L)), [S(N)] \rangle \\ = \int_{S(N)} \Phi_1(C_1(\nabla), \ldots, C_p(\nabla)) \wedge \pi^*\Phi_2(C_1(\nabla_1), \ldots, C_{n-p}(\nabla_1)).\end{aligned}$$

Par intégration par partie le long des fibres $S(N)|_{x \in N}$ de $S(N)$ sur $N$, le second membre est aussi

$$\int_N \left(\int_{S(N)|_{x\in N}} \Phi_1(C_1(\nabla), \ldots, C_p(\nabla))\right) \wedge \Phi_2(C_1(\nabla_1), \ldots, C_{n-p}(\nabla_1)).$$

Or

$$\int_{S(N)|_{x\in N}} \Phi_1(C_1(\nabla), \ldots, C_p(\nabla)) = \Phi_1(K_x, S(N)|_x)$$

où

$$K_x = (\pi^*K_1|_{B(N)_x}, \psi_x, \pi^*K_2|_{B(N)_x})$$

est le fibré construit sur $S(N)|_x$ à l'aide de la fonction de transition $\psi_x$,

$$\psi_x: \pi^*K_1|_{\partial B(N)_x} \xrightarrow{\sim} \pi^*K_2|_{\partial B(N)_x},$$

la restriction de $\psi$ à $\partial B(N)_x$.

Or si $\gamma(x, y)$ est une courbe dans $N$, joignant deux points $x$ et $y$, $K_1|_{\gamma(x,y)}$ et $K_2|_{\gamma(x,y)}$ sont triviaux. Donc, on a des isomorphismes verticaux dans le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \pi^*K_1|_{\partial B(N)_x} & \xrightarrow{\psi_x} & \pi^*K_2|_{\partial B(N)_x} \\ \wr\| & & \wr\| \\ \pi^*K_1|_{\partial B(N)_y} & \xrightarrow{\psi_y} & \pi^*K_2|_{\partial B(N)_y}, \end{array}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1972-073-7 Published online by Cambridge University Press

et modulo ces isomorphismes, $\psi_x$ et $\psi_y$ sont homotopes. Ainsi $K_x$ et $K_y$, considérés comme fibrés sur la sphère

$$S^r \simeq S(N)|_x \simeq S(N)|_y,$$

sont isomorphes; ce qui implique

$$\Phi_1(K_x, S(N)|_x) = k,$$

constante indépendante de $x$, la variété $N$ étant connexe par arc. D'où

$$\int_N(\int_{S(N)|_x}\Phi_1(C_1(\nabla), \ldots, C_p(\nabla))) \wedge \Phi_2(C_1(\nabla_1), \ldots, C_{n-p}(\nabla_1))$$
$$= k\int_N\Phi_2(C_1(\nabla_1), \ldots, C_{n-p}(\nabla_1)) = k\Phi_2(L, N).$$

(c) Un cas important des considérations précédentes est lorsque $\Phi \equiv X_n \in R[X_1, \ldots, X_n]$. Alors, pour tout fibré complexe $E$ de rang $n$ sur $M$, on a $\Phi(E) = C_n(E)$, la classe de Chern de plus grand degré de $E$. D'après le théorème de Gauss-Bonnet [**4**], $C_n(E)$ n'est autre que la classe d'Euler-Poincaré de $E$.

Si la dimension de $M$ est deux fois le rang du fibré complexe $E$, nous noterons

$$\langle C_n(E), [M]\rangle = \chi(E, M).$$

Ceci dit, d'après la formule de Whitney, on a, pour

$$(E, \Phi, F) = \pi^*L \oplus (\pi^*K_1, \psi, \pi^*K_2)$$

dans les hypothèses du lemme de la section (b),

$$C_n(E, \phi, F) = \pi^*C_{n-p}(L) \wedge C_p(K).$$

Immédiatement par application de la proposition de la section (b), on a

THÉORÈME 2 (Formule de Riemann-Hurwitz). *Sous les hypothèses de la section* (b) *précédente, on a*:

$$\chi(E, M) - \chi(F, M) = k\chi(L, N)$$

*le rang* $(n - p)$ *du fibré complexe* $L$ *étant égal a la moitié de la dimension de* $N$.

La formule est encore évidemment valable avec le second membre nul lorsque $2(n - p) > m - r$, dimension de $N$.

(d) *Cas de fibrés réels.* Nous nous sommes restreints dans tout ce qui précède à la catégorie des fibrés vectoriels complexes. Mais si $E$ et $F$ sont des fibrés réels sur $M$, le morphisme $\phi$ étant alors un morphisme de fibrés réels, avec des hypothèses identiques, on a de même la formule de Riemann-Hurwitz généralisée en considérant non plus des nombres de Chern mais des nombres de Pontrjagin respectivement de $E$ et $F$ sur $M$ et de $(E, \phi, F)$ sur $S(N)$.

En particulier, soient $E$ et $F$ des fibrés vectoriels réels orientés sur $M$. Dans les hypothèses de la section (b), supposons en plus que $L$, étant l'image de

$$\phi\colon E|_N \to F|_N,$$

soit un fibré vectoriel sur $M$ orientable. Alors, on a de même la formule de Riemann-Hurwitz avec les nombres d'Euler:

$$\chi(E, M) - \chi(F, M) = k\chi(L, N)$$

le rang de $L$ étant égal à la dimension de $N$. La formule reste encore valable avec second membre nul si le rang de $L$ est plus grand que la dimension de $N$.

**Application.** Rappelons l'application bien connue de la formule de Riemann-Hurwitz aux revêtements ramifiés.

Soit $\pi: M \rightarrow S$ une application différentiable surjective d'une variété compacte orientée $M$ sur une variété différentiable orientée de même dimension $m$. L'application $\pi$ est un revêtement ramifié, s'il existe une sous-variété orientable $N$ fermée de $S$, de codimension plus grande ou égale à 2, telle que:

(1) $\pi: M - \pi^{-1}(N) \rightarrow S - N$ soit une submersion conservant l'orientation et, $M - \pi^{-1}(N)$ soit aussi un revêtement connexe à $q$ feuillets de $S - N$;

(2) $\pi^{-1}(N)$ soit une sous-variété fermée de $M$ et $\pi: \pi^{-1}(N) \rightarrow N$ soit un difféomorphisme.

Remarquons alors que si $N_0$ est une composante connexe de $N$, il existe un voisinage tubulaire $B(N_0)$ tel que $\pi^{-1}(B(N_0))$ soit un voisinage tubulaire de $\pi^{-1}(N_0)$. Ainsi

$$\pi: \pi^{-1}(B(N_0)) - \pi^{-1}(N_0) \rightarrow B(N_0) - N_0$$

est un revêtement connexe à $q$ feuillets de $B(N_0) - N_0$. Or, si $N_0$ est de codimension plus grande que 2, $B(N_0) - N_0$ est simplement connexe. Ce qui est impossible si $q > 1$. Nous pouvons donc supposer que $N$ soit de codimension 2.

Ceci dit, considérons le morphisme tangent $d\pi$ du fibré vectoriel sur $M$.

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[rr, "d\pi"] \arrow[dr] & & \pi^*T(S) \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Nous sommes dans les hypothèses de la formule de Riemann-Hurwitz: d'où

$$\chi(T(M), M) - \chi(\pi^*(T(S)), M) = k\chi(T(\pi^{-1}(N)), \pi^{-1}(N))$$

où encore

$$\chi(M) - q\chi(S) = k\chi(N).$$

On démontre facilement que $k$ est égal au signe près à $q - 1$: De fait, on a:

$$\chi(M) - q\chi(S) = -(q - 1)\chi(N).$$

En effet $k$ étant égal au signe près à $(q - 1)$, pour déterminer le signe, comme la formule est évidemment universelle, il suffit de regarder, sur un

https://doi.org/10.4153/CJM-1972-073-7 Published online by Cambridge University Press

exemple précis. Or, on peut voir facilement qu'il existe un revêtement ramifié à deux feuillets de la sphère $S^2$ par un tore $S^1 \times S^1$ avec quatre points de ramifications. D'où:

$$\begin{aligned} \chi(S^1 \times S^1) - 2\chi(S^2) &= 4k \\ 0 - 4 &= 4k \\ k &= -2 = -(q-1). \end{aligned}$$

*Exemple* (qui m' a été suggéré par J. Morrow, Washington University, Seattle). Soit $D$ une courbe algébrique non singulière de degré $q$ de l'espace projectif $P^2(\mathbf{C})$. Rappelons que d'après Kodaira [**3**, p. 119]

$$\chi(D) = +(-q^2 + 3q).$$

D'autre part le diviseur $[D]$ définit évidemment un fibré vectoriel complexe sur $P^2(\mathbf{C})$ isomorphe à $H \otimes \ldots \otimes H = H^q$, $H$ étant le fibré universel de Hopf.

Soit un recouvrement de $P^2(\mathbf{C})$ par des ouverts $U_i$ de coordonnées.

Désignons par $\phi_i = 0$, l'équation de définition de $D \cap U_i$ dans $U_i$.

Si $\xi_i$ est la coordonnée vectorielle de $H|_{U_i}$,

$$\begin{aligned} H|_{U_i} &\simeq U_i \times \mathbf{C} \\ x &\longrightarrow (\pi(x), \xi_i(x)) \end{aligned}$$

où $\pi$: $H \rightarrow P^2(\mathbf{C})$ est l'application de fibration, alors dans $H|_{U_i}$, l'équation $\phi_i \circ \pi = \xi_i{}^q$ définit une sous-variété $V_i \subseteq H|_{U_i}$. Il n'est pas difficile de montrer que $V_i$ se raccordent pour définir une sous-variété non singulière $V$ de $H$ et que $V$ est revêtement ramifié à $q$ feuillets de $P^2(_U)$, ramifié le long de la sous-variété $D$ de $P^2(\mathbf{C})$. Ainsi on a:

$$\begin{aligned} \chi(V) - q\chi(P^2(\mathbf{C})) &= -(q-1)\chi(D) \\ \chi(V) - 3q &= -(q-1)(3q - q^2) \\ \chi(V) &= q(6 - 4q + q^2). \end{aligned}$$

## Bibliographie


1. F. Atiyah, *K-theory* (W. A. Benjamin, New York, 1967).
2. R. Bott and S. S. Chern, *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections*, Acta Math. *114* (1965), 71–112.
3. K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces*. I, Ann. of Math. 71 (1960), 111–152.
4. Ngô van Quê, *Classes de Chern et théorème de Gauss-Bonnet*, Pacific J. Math. (1970), 393–410.



*Université de Montréal,*
*Montréal, P.Q.;*
*Université de São Paulo,*
*São Paulo, Brazil*