Canad. J. Math. Vol. **53** (5), 2001 pp. 944–978

Représentations irréductibles bornées des groupes de Lie exponentiels

J. Ludwig et C. Molitor-Braun

Abstract. Let G be a solvable exponential Lie group. We characterize all the continuous topologically irreducible bounded representations $(T, \mathcal{U})$ of G on a Banach space $\mathcal{U}$ by giving a G-orbit in $\mathfrak{n}^*$ ($\mathfrak{n}$ being the nilradical of $\mathfrak{g}$), a topologically irreducible representation of $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$, for a certain weight ω and a certain $n \in \mathbb{N}$, and a topologically simple extension norm. If G is not symmetric, *i.e.*, if the weight ω is exponential, we get a new type of representations which are fundamentally different from the induced representations.

Résumé. Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel. Nous caractérisons toutes les représentations $(T, \mathcal{U})$ continues bornées topologiquement irréductibles de G dans un espace de Banach $\mathcal{U}$ à l'aide d'une G-orbite dans $\mathfrak{n}^*$ ($\mathfrak{n}$ étant le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$), d'une représentation topologiquement irréductible de $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$, pour un certain poids ω et un certain $n \in \mathbb{N}$, d'une norme d'extension topologiquement simple. Si G n'est pas symétrique, c. à d. si le poids ω est exponentiel, nous obtenons un nouveau type de représentations qui sont fondamentalement différentes des représentations induites.

0 Introduction

Dans cet article nous donnons une classification des représentations bornées topologiquement irréductibles des groupes de Lie résolubles exponentiels G dans des espaces de Banach. Rappelons que les représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie nilpotents ont été décrites par Kirillov en 1960. Sa méthode des orbites coadjointes [Ki] a ensuite permis en 1965 à Bernat de déterminer le dual unitaire des groupes de Lie résolubles exponentiels [Ber], [BerCo]. Puis Pukanszky et Vergne [Pu], [BerCo] ont résolu les problèmes concernant les polarisations qui restaient encore ouverts. Ainsi vers 1970 on connaissait bien toutes les représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie résolubles exponentiels. Par contre les modules bornés irréductibles de ces groupes sur des espaces de Banach ont été peu étudiés.

Donnons quelques définitions. Un module (ou une représentation) $(T, \mathcal{U})$ du groupe G est un homomorphisme

$$T\colon G \to \mathrm{Gl}(\mathcal{U})$$

de G dans le groupe $\mathrm{Gl}(\mathcal{U})$ des endomorphismes continus inversibles d'un espace de Banach $\mathcal{U}$ tel que

$$C = \sup_{s \in G} \|T(s)\|_{\mathrm{op}} < \infty,$$

Reçu par les éditeurs 12 novembre, 1999.
Étude effectuée dans le cadre du projet de recherche MEN/CUL/98/007.
Classification (AMS) par sujet: 43A20.
Mots clés: groupe de Lie résoluble exponentiel, représentation bornée topologiquement irréductible, orbite, norme d'extension, sous-espace invariant, idéal premier, idéal primitif.

et tel que toutes les applications

$$t_u\colon G \to \mathcal{U}, \quad t_u(s) = T(s)u, \quad s \in G \quad (u \in \mathcal{U}),$$

soient continues.

Mentionnons que si le groupe G est moyennable, en particulier si G est résoluble, alors tout module borné est équivalent à un module isométrique. On peut mettre sur $\mathcal{U}$ une nouvelle norme $\|\cdot\|$, qui est équivalente à la norme donnée $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$, telle que $\|T(s)u\| = \|u\|$ pour tout $u \in \mathcal{U}$ et tout $s \in G$ (voir [Pi, Prop. 17.5], dans le cas hilbertien).

Nous disons que le module $(T, \mathcal{U})$ est topologiquement irréductible ou topologiquement simple, si les sous-espaces fermés $T(G)$-invariants de $\mathcal{U}$ sont tous triviaux.

Nous savons qu'un module borné $(T, \mathcal{U})$ de G sur un espace de Banach $\mathcal{U}$ peut être intégré en un module borné de $L^1(G)$:

$$T(f) = \int_G f(s)T(s)\,ds, \quad f \in L^1(G),$$

où ds désigne la mesure de Haar de G. Alors

$$\|T(f)u\|_{\mathcal{U}} \leq C\|f\|_1\,\|u\|_{\mathcal{U}}, \quad u \in \mathcal{U}, f \in L^1(G).$$

Réciproquement tout module borné $(T, \mathcal{U})$ de $L^1(G)$ non dégénéré, c. à d. tel que $T\big(L^1(G)\big)\,\mathcal{U}$ soit dense dans $\mathcal{U}$ provient d'une représentation bornée, notée aussi T, de G dans $\mathcal{U}$ (voir [Di2]). En particulier un module borné $(T, \mathcal{U})$ de G est topologiquement irréductible si et seulement si le module correspondant de $L^1(G)$ l'est.

Une classe de représentations irréductibles particulièrement intéressante est celle des modules algébriquement irréductibles (ou simples) de l'algèbre $L^1(G)$ du groupe G. Ces représentations ont été étudiées par Poguntke [Po2] en 1983 dans le cas exponentiel. Pour les décrire, l'espace dual réel de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ne suffit plus. Poguntke a montré que tout module simple $(T, \mathcal{U})$ de $L^1(G)$ est associé à une certaine forme linéaire $l + i\nu \in \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$, $l, \nu \in \mathfrak{g}^*$ avec $\nu([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = (0)$.

Nous adaptons dans ce travail la construction de Poguntke aux représentations bornées topologiquement irréductibles $(T, \mathcal{U})$ quelconques des groupes résolubles exponentiels G dans un espace de Banach.

La première étape consiste à étudier la restriction de T au radical nilpotent $N = \exp(\mathfrak{n})$ de G. On voit facilement que $\ker_{L^1(N)} T$ est un idéal G-premier de $L^1(N)$. Poguntke a montré que si T est un module simple de $L^1(G)$, alors $I_N = \ker_{L^1(N)} T$ est le noyau d'une G-orbite ${}^G\tau$ dans $\hat{N}$. Nous montrons dans le premier chapitre qu'il en est de même si T est seulement topologiquement irréductible. Pour faire cela nous prenons un groupe exponentiel d'automorphismes $\mathcal{D}$ d'un groupe de Lie nilpotent N et nous montrons d'abord que tout idéal $\mathcal{D}$-premier de l'algèbre de Schwartz $\mathcal{S}(N)$, fermé pour une norme de $\mathcal{S}(N)$, coïncide avec le noyau d'une $\mathcal{D}$-orbite d'une représentation unitaire irréductible τ (théorème 1.1.6). Ce résultat s'applique à $I_N \cap \mathcal{S}(N)$ qui est donc aussi le noyau dans $\mathcal{S}(N)$ d'une G-orbite ${}^G\tau$ dans $\hat{N}$. La proposition 4.1 de [LuMo2] nous permet alors d'en déduire que de même $\ker_{L^1(N)} T$ est le noyau dans $L^1(N)$ d'une G-orbite ${}^G\tau$ dans $\hat{N}$.

Prenons maintenant $l \in \mathfrak{g}^*$ tel que sa restriction à $\mathfrak{n}$, notée q, soit dans la N-orbite de Kirillov de τ. Soit $\mathfrak{g}(l)$ le stabilisateur de l dans $\mathfrak{g}$. Prenons un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{n}$, tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(l) + \mathfrak{h}$ et tel que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{n}$. Soit $\mathfrak{f}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}(l)$, tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{h}$. Soient $F = \exp(\mathfrak{f})$, $H = \exp(\mathfrak{h})$. Alors $G = G(l)H = FH$. Notons $\pi_l = \pi$ la représentation unitaire irréductible de G associée à l et soit $\gamma = (\pi_l)|_H$. Cette représentation est irréductible et peut être identifiée à la représentation $\pi_{(l|\mathfrak{h})}$ de H associée à la restriction de l à $\mathfrak{h}$. Nous montrons dans le deuxième chapitre que

$$\ker\gamma = \ker_{L^1(H)} T = \left(L^1(H) * \ker({}^G\tau)\right)^-$$

(proposition 2.5.4) et donc que l'idéal $L^1(G) * \ker\gamma$ de $L^1(G)$ est contenu dans $\ker T$. Pour caractériser les représentations topologiquement irréductibles de noyau $\ker T$ donné, il suffit donc d'étudier les représentations de l'algèbre

$$\mathcal{A} = L^1(G)/\left(L^1(G) * \ker({}^G\tau)\right)^-.$$

À cet effet on utilise un $p_\lambda \in L^1(H)$ tel que $\gamma(p_\lambda)$ soit un projecteur de rang 1 noté P_λ. Cet élément p_λ de $L^1(H)$ définit un multiplicateur bilatère p de l'algèbre $\mathcal{A}$ et Poguntke a montré que $\mathcal{B} = p\mathcal{A}p = \left(p_\lambda * L^1(G) * p_\lambda\right)/\left(L^1(G) * \ker({}^G\tau)\right)^-$ est isomorphe à une algèbre de la forme $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$ où ω est un poids à croissance exponentielle en général et polynomiale dans des cas particuliers. Pour obtenir ce poids, nous déterminons pour tout $s \in G(l)$ un vecteur $\nu(s) \in L^1(H)/\ker\gamma$ tel que $\gamma\bigl(\nu(s)\bigr) = \pi(s)^{-1} \circ P_\lambda$. Le poids ω sur $G(l)/G(l) \cap N \simeq \mathbb{R}^n \simeq G/H$ est alors défini par $\omega(s) = \|\nu(s)\|_{L^1(H)/\ker\gamma}$, $s \in G(l)$. Nous montrons que le module topologiquement simple $(T, \mathcal{U})$ de $\mathcal{A}$ détermine un module topologiquement simple $(S, \mathcal{W})$, où $\mathcal{W} = T(p)\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$, de l'algèbre $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$. Réciproquement nous prouvons que tout module topologiquement simple $(S, \mathcal{W})$ de

$$\mathcal{B} = L^1(\mathbb{R}^n, \omega) \simeq \left(p_\lambda * L^1(G) * p_\lambda\right)/\left(L^1(G) * \ker({}^G\tau)\right)^-$$

peut être étendu (en général d'une infinité de manières) en des modules topologiquement irréductibles $(T, \mathcal{U})$ de $\mathcal{A}$, donc de $L^1(G)$, et finalement en des modules bornés de G. Pour construire ces extensions nous prenons un vecteur $w \neq 0$ de $\mathcal{W}$ et nous réalisons $\mathcal{W}$ comme le complété de $\mathcal{B}/I_w$ pour une certaine norme $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ de $\mathcal{B}/I_w$. Ici I_w désigne l'annihilateur de w dans $\mathcal{B}$. Nous considérons alors l'idéal à gauche

$$M = \{a \in \mathcal{A}p\ ;\ pcap \in I_w,\ \text{pour tout } c \in \mathcal{A}\}$$

de $\mathcal{A}p$ et nous prenons toutes les normes $\|\!|\cdot|\!\|$ de $\mathcal{A}p/M$ dont les restrictions à $\mathcal{B}/I_w$ sont équivalentes à $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ et qui vérifient que $\|\!|ac|\!\| \le C\|a\|_{\mathcal{A}}\,\|\!|c|\!\|$ pour tout $a \in \mathcal{A}$, $c \in \mathcal{A}p/M$ (pour une constante C). Les complétés $\mathcal{U}^{\|\!|\,|\!\|}$ de $\mathcal{A}p/M$ modulo un certain sous-espace $\mathcal{U}_0^{\|\!|\,|\!\|}$ sont alors des modules topologiquement simples de G. D'ailleurs tous les modules topologiquement simples de $\mathcal{A}$ peuvent être réalisés de cette manière.

En fait pour un module $(S, \mathcal{W})$ donné il existe toujours une extension canonique $(T_{\min}, \mathcal{U}^{\min})$ maximale (associée à une norme minimale $\|\!|\cdot|\!\|_{\min}$) telle que toutes les autres extensions $(T, \mathcal{U})$ en soient des sous-modules. Cette norme minimale est définie de la manière suivante:

$$\|a\|_{\min} = \sup_{\|c\|_{\mathcal{A}} \leq 1} \|S(pca)w\|_{\mathcal{W}}, \quad \forall a \in \mathcal{A}p/M,$$

pour un vecteur fixé w de $\mathcal{W}$.

Nous pouvons distinguer deux types de modules topologiquement simples $(T, \mathcal{U})$, suivant la dimension de $T(p)\mathcal{U}$. Si cette dimension est 1, alors T est intimement lié à un module induit. À titre d'exemple, soit $l \in \mathfrak{g}^*$, soit $\mathfrak{p}$ une polarisation vérifiant la condition de Pukanszky en l. Soit χ_l le caractère unitaire de $P = \exp(\mathfrak{p})$ associé à l. Rappelons que l'espace fonctionnel

$$\mathcal{E}_0(G/P, l) = \Big\{ \xi \colon G \to \mathbb{C}\,;\, \xi \text{ continu à support compact modulo } P, \\ \xi(st) = \frac{\Delta_P(t)}{\Delta_G(t)} \xi(s), \forall s \in G, \forall t \in P \Big\}$$

possède une forme linéaire positive G-invariante unique, notée $\oint ds$. Nous pouvons donc définir les espaces $L^r(G/P, l)$, $1 \leq r < \infty$, comme les complétés des espaces

$$\mathcal{E}_0(G/P, l, r) = \Big\{ \xi \colon G \to \mathbb{C}\,;\, \xi \text{ continu à support compact modulo } P, \\ \xi(st) = \left(\frac{\Delta_P(t)}{\Delta_G(t)}\right)^{1/r} \chi_l(t)^{-1} \xi(s), \forall s \in G, \forall t \in P, \\ \infty > \oint |\xi(s)|^r \, ds = \|\xi\|_r^r \Big\}$$

et la représentation induite $\pi_{l,r}$ sur $L^r(G/P, l)$ par

$$\pi_{l,r}(s)\xi(t) = \xi(s^{-1}t), \quad s, t \in G, \xi \in L^r(G/P, l).$$

On peut vérifier que tous ces modules sont topologiquement irréductibles. Dans cet exemple le module $(S, \mathcal{W})$ associé est donné par le caractère $S_{l,r}(b) = \int_F b(f) e^{-i(l+i(1/r)\nu)(\log(f))} \, df$ pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \omega) \simeq L^1\big(G(l)/G(l) \cap N, \omega\big) \simeq \mathcal{B}$. Ici $\nu(X)$ désigne la trace $\nu(X) = \operatorname{tr}\big(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}(X)\big)$, $X \in \mathfrak{g}(l)$. Pour un r fixé, il existe plusieures ou même une infinité d'extensions du même module de dimension 1 $(S, \mathcal{W})$. En particulier, pour la norme quotient sur $\mathcal{A}p/M$, où $M = \{m \in \mathcal{A}p\,;\, S_{l,r}(pcm) = 0, \forall c \in \mathcal{A}\}$, qui est maximale, nous obtenons un $L^1(G)$-module simple contenu dans tous les $L^1(G)$-sous-modules de $L^r(G/P, l)$. En outre la norme minimale est donnée dans cet exemple par

$$\|a\|_{\min} = \sup_{\|c\|_{\mathcal{A}} \leq 1} |S_{l,r}(pca)|, \quad a \in \mathcal{A}p.$$

Les représentations $(T, \mathcal{U})$, pour lesquelles la dimension de $T(p)\mathcal{U}$ est infinie, sont nouvelles. Elles apparaissent dès que le poids ω est à croissance exponentielle et elles sont assez mystérieuses. Elles ne peuvent plus être construites à partir de modules induits comme dans le cas de dimension 1. La description de ces modules que nous donnons ici est très abstraite. Une réalisation concrète d'un tel module utilise des groupes à 1 paramètre d'opérateurs sans sous-espaces invariants fermés non triviaux sur l'espace de Banach $\mathcal{W} = T(p)\mathcal{U}$ (voir [Be] pour plus de détails sur ces opérateurs). D'ailleurs, remarquons que de tels opérateurs sans sous-espaces fermés invariants ont en particulier été utilisés par Soergel [So] pour construire une représentation topologiquement irréductible non bornée de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Récapitulons en disant que nous pouvons ainsi caractériser les représentations topologiquement irréductibles de $L^1(G)$ par un triplet $(\Omega_q, S, \|\cdot\|)$ où Ω_q est une G-orbite dans $\mathfrak{n}^*$, S une classe d'équivalence de représentations topologiquement irréductibles de $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$ et $\|\cdot\|$ une norme intervenant dans l'extension d'un $p\mathcal{A}p$-module topologiquement simple en un $\mathcal{A}$-module topologiquement simple.

Mentionnons encore comme application de ces constructions que nous trouvons de cette façon des idéaux fermés premiers de $L^1(G)$ qui ne sont pas des idéaux primitifs, lorsque le groupe G n'est pas symétrique.

1 Idéaux D-premiers dans l'algèbre de Schwartz d'un groupe de Lie nilpotent

1.1 Actions exponentielles

Soit $N = \exp(\mathfrak{n})$ un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$.

Définition 1.1.1 Nous disons qu'un groupe d'automorphismes $\mathcal{D}$ de N est exponentiel si

i) $\mathcal{D} = \exp(\mathfrak{d})$ est un groupe résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$, qui agit continûment sur N,
ii) les valeurs propres λ de tout $D \in \mathfrak{d}$ sur $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ sont de la forme $\lambda = a + ib$ avec $a \neq 0$ et
iii) $\mathrm{ad}(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{d}$.

Le groupe exponentiel $\mathcal{D}$ agit sur les fonctions et les représentations de N de la façon suivante:

Pour une fonction intégrable $f : N \to \mathbb{C}$ nous écrivons

$$^{d}f(x) = \delta(d) f\big(d^{-1}(x)\big), \quad x \in N, d \in \mathcal{D},$$

où δ dénote la fonction module de $\mathcal{D}$, c. à d. $\delta(d)$ est l'unique nombre positif tel que

$$\int_N f(x)\,dx = \int_N {}^{d}f(x)\,dx, \quad f \in L^1(N), d \in \mathcal{D}.$$

Pour une représentation $(T, \mathcal{U})$ de N sur un espace vectoriel $\mathcal{U}$, nous écrivons $({}^{d}T, \mathcal{U})$ $(d \in \mathcal{D})$ pour la représentation

$$^{d}T(x) = T\big(d(x)\big), \quad x \in N,$$

sur $\mathcal{U}$.

Soit $\mathcal{S}(N)$ l'algèbre de Schwartz de N, c. à d. $S(N)$ est l'espace de Fréchet

$$\mathcal{S}(N) = \{f : N \to \mathbb{C} \,;\, f \circ \exp \in \mathcal{S}(\mathfrak{n})\}.$$

Ici $\mathcal{S}(\mathfrak{n})$ désigne l'espace ordinaire des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathfrak{n}$. Munissons $\mathcal{S}(N)$ du produit de convolution. Alors $\mathcal{S}(N)$ devient une algèbre de Fréchet qui possède des unités approchées. L'espace des idéaux primitifs $\mathrm{Prim}\big(\mathcal{S}(N)\big)$ de $\mathcal{S}(N)$ est homéomorphe à l'espace dual $\hat{N}$ de N, donc par l'application de Kirillov à l'espace des orbites coadjointes $\mathfrak{n}^*/N$ de N (pour plus de détails voir [Lu4], [LuMo2]).

Le groupe $\mathcal{D}$ laisse évidemment $\mathcal{S}(N)$ invariant et l'application

$$\mathcal{D} \times \mathcal{S}(N) \to \mathcal{S}(N) \colon (d, f) \mapsto {}^d f$$

est continue [LuMo1].

Définition 1.1.2 Soit $\tau \in \hat{N}$ une représentation unitaire irréductible de N. Définissons l'idéal $I_{\mathcal{D}(\tau)}$ de $\mathcal{S}(N)$ par

$$I_{\mathcal{D}(\tau)} = \{f \in \mathcal{S}(N) \,;\, {}^d\tau(f) = 0, \forall d \in \mathcal{D}\}.$$

L'idéal $I_{\mathcal{D}(\tau)}$ est fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ et il est $\mathcal{D}$-invariant.

Soient I_1, I_2 deux idéaux $\mathcal{D}$-invariants de $\mathcal{S}(N)$ tels que $I_1 * I_2 \subset I_{\mathcal{D}(\tau)}$. Alors I_1 ou I_2 est contenu dans $I_{\mathcal{D}(\tau)}$. En effet si $I_1 \not\subset I_{\mathcal{D}(\tau)}$, alors $I_1 \not\subset \ker\ ({}^d\tau)$ pour un certain $d \in \mathcal{D}$. Mais comme $I_1 * I_2 \subset \ker({}^d\tau)$ et comme $\ker({}^d\tau)$ est un idéal premier, nous voyons que $I_2 \subset \ker({}^d\tau)$ et ainsi $I_2 \subset \bigcap_{d' \in \mathcal{D}} \ker({}^{d'd}\tau) = I_{\mathcal{D}(\tau)}$, I_2 étant $\mathcal{D}$-invariant.

Définition 1.1.3 Soit I un idéal de $\mathcal{S}(N)$. Nous disons que I est $\mathcal{D}$-*premier*, si I est $\mathcal{D}$-invariant et si pour tout couple I_1, I_2 d'idéaux $\mathcal{D}$-invariants de $\mathcal{S}(N)$ tels que $I_1 * I_2 \subset I$, $I_1 \subset I$ ou $I_2 \subset I$.

Définition 1.1.4 Nous disons qu'un sous-espace W de $\mathcal{S}(N)$ est fermé pour une norme, s'il existe une norme continue $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{S}(N)$, telle que W soit fermé pour $\|\cdot\|$.

Exemple 1.1.5 Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel. Soit N un sous-groupe invariant fermé connexe nilpotent de G. Soit $(T, \mathcal{U})$ une représentation bornée continue topologiquement irréductible de G sur un espace de Banach $\mathcal{U}$. Nous pouvons intégrer T en une représentation de $L^1(G)$ (voir [Di2]) et nous pouvons aussi restreindre T à N. Soit I le noyau de $T|_N$ dans $\mathcal{S}(N)$. Alors I est fermé pour la norme $\|\cdot\|_1$ et I est $\mathcal{D}$-premier, où $\mathcal{D} = \mathrm{Ad}(G)_{|\mathfrak{n}}$. En effet, si I_1, I_2 sont deux idéaux $\mathcal{D}$-invariants de $\mathcal{S}(N)$, tels que $I_1 * I_2 \subset I$, alors nous avons que

$$\begin{aligned}\big(L^1(G) * I_1 * L^1(G)\big) * \big(L^1(G) * I_2 * L^1(G)\big) \\ &\subset L^1(G) * \overline{L^1(G) * I_1 * I_2 * L^1(G)} * L^1(G) \\ &\subset \ker_{L^1(G)} T,\end{aligned}$$

où $\overline{A}$ désigne la fermeture de A dans $L^1(G)$. Comme $\ker_{L^1(G)} T$ est un idéal premier, T étant irréductible, nous voyons que $L^1(G) * I_1 * L^1(G) \subset \ker_{L^1(G)} T$ ou $L^1(G) * I_2 * L^1(G) \subset \ker_{L^1(G)} T$. Ainsi $I_1 \subset I$ ou $I_2 \subset I$.

Le but de ce chapitre est la preuve du théorème suivant.

Théorème 1.1.6 *Soit $\mathcal{D}$ un groupe exponentiel d'automorphismes du groupe de Lie connexe, simplement connexe et nilpotent N. Alors tout idéal I non trivial $\mathcal{D}$-premier fermé pour une norme de $\mathcal{S}(N)$ est de la forme*

$$I = I_{\mathcal{D}(\tau)}$$

pour une certaine représentation $\tau \in \hat{N}$.

1.2 Preuve du théorème

Nous avons besoin de quelques lemmes et définitions.

Définition 1.2.1 Pour une partie A de $\mathcal{S}(N)$ nous désignons par $h(A)$ l'enveloppe de A dans $\hat{N}$, *i.e.*,

$$h(A) = \left\{ \tau \in \hat{N} \, ; \tau(A) = \{0\} \right\}.$$

La partie $h(A)$ de $\hat{N}$ est fermée dans $\hat{N}$, si nous mettons sur $\hat{N}$ la topologie la moins fine qui rend la surjection canonique $\tau \mapsto \ker \tau$ de $\hat{N}$ sur $\operatorname{Prim}\big(\mathcal{S}(N)\big)$ continue (voir [Di2]).

Définition 1.2.2 Le noyau $\ker C$ d'une partie fermée C de $\hat{N}$ est par définition l'idéal

$$\ker C = \bigcap_{\tau \in C} \ker \tau \subset \mathcal{S}(N).$$

Définition 1.2.3 Soit C une partie fermée de $\hat{N}$. Nous désignons l'idéal minimal dans $\mathcal{S}(N)$ associé à C par $j(C)$ c. à d. $j(C)$ est l'unique idéal de $\mathcal{S}(N)$ dont l'enveloppe $h\big(j(C)\big)$ est égale à C et qui est contenu dans tout idéal J avec $h(J) = C$ (voir [Lu1], [Lu4] pour plus de détails).

Lemme 1.2.4 *Tout idéal $\mathcal{D}$-premier I de $\mathcal{S}(N)$, fermé pour une norme continue $\|\cdot\|$, est le noyau de son enveloppe $h(I) = C$.*

Preuve Comme I est $\mathcal{D}$-invariant, son enveloppe C est aussi $\mathcal{D}$-invariante, de même que $\ker C$. Montrons que I contient $(\ker C)^M$ pour un certain $M \in \mathbb{N}$. Alors on en déduira que $I = \ker C$, I étant $\mathcal{D}$-premier.

Pour montrer que $(\ker C)^M \subset I$, nous rappelons d'abord que $j(C)$ est engendré comme idéal par les éléments $\varphi(f)$, $f = f^* \in \ker C \subset \mathcal{S}(N)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, où $C_0^\infty(\mathbb{R})$ est l'espace de toutes les fonctions de classe C^∞ $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, qui sont nulles

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

dans un voisinage de 0, qui ont un support compact et où $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$, $x \in N$ [Lu4].

Ici $\varphi(f)$ désigne l'intégrale

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\lambda)\big(e(i\lambda f)\big)\, d\lambda,$$

et

$$e(i\lambda f) = \sum_{n>0} \frac{(i\lambda f)^{n(*)}}{n!}.$$

Hulanicki a montré dans [Hu] que pour toute norme continue $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{S}(N)$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $f = f^* \in \mathcal{S}(N)$, il existe une constante $C = C(f, \|\cdot\|)$ telle que

$$\|e(i\lambda f)\| \le C(1 + |\lambda|)^m, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nous choisissons maintenant une norme $\|\cdot\|$ pour laquelle I est fermé et nous prenons $f = f^* \in \ker C$. Montrons que $f^{m+3} \in I$. Soit ϕ une fonction de classe C^∞ à support compact telle que $\phi(t) = t^{m+3}$ sur un intervalle contenant l'intervalle $[-\|f\|_1, \|f\|_1]$. Alors

$$\phi(f) = f^{m+3}$$

[Di1]. Choisissons $\epsilon > 0$ et un élément $\varphi = \varphi_\epsilon$ de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$|\varphi^{(k)}(t) - \phi^{(k)}(t)| \le \epsilon, \quad t \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, m+2.$$

Alors

$$\|f^{m+3} - \varphi(f)\| = \|\phi(f) - \varphi(f)\| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\lambda) - \hat{\varphi}(\lambda)|\, \|e(i\lambda f)\|\, d\lambda \le C'\epsilon,$$

pour une certaine constante C' indépendante de ϵ. Donc $f^{m+3} \in \overline{j(C)}^{\|\cdot\|} \subset \overline{I}^{\|\cdot\|} = I$, comme $\varphi_\epsilon(f) \in j(C) \subset I$ pour tout ϵ. Montrons finalement que $(\ker C)^{2^{m+3}-1} \subset I$. Nous avons pour une famille d'éléments auto-adjoints $f_1, \dots, f_{m+3}$ de $\ker C$, pour $s_1, \dots, s_{m+3} \in \mathbb{R}$ quelconques, que

$$I \ni \Big(\sum_{j=1}^{m+3} s_j f_j\Big)^{m+3} = \Big(\prod_{i=1}^{m+3} s_i\Big)\Big(\sum_{\sigma \in S_{m+3}} \Big(\prod_{i=1}^{m+3} f_{\sigma(i)}\Big)\Big) + \text{termes de la forme } s_1^{n_1} \cdots s_{m+3}^{n_{m+3}}$$

$$\text{avec } n_j > 1 \text{ pour au moins un } j$$

et ainsi

$$\sum_{\sigma \in S_{m+3}} \Big(\prod_{i=1}^{m+3} f_{\sigma(i)}\Big) \in I. \tag{1.2.4.1}$$

Ici S_{m+3} désigne le groupe des permutations de $m+3$ éléments. Nous pouvons écrire tout $f \in \ker C$ de façon unique sous la forme $f = g + ih$, où g, h sont des éléments

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

auto-adjoints de $\ker C$. Alors en prenant une fois g et une fois h comme f_1 dans (1.2.4.1) et en faisant la somme de la première plus i-fois la deuxième expression nous voyons que

$$\sum_{\sigma \in S_{m+3}} \Big(\prod_{i=1}^{m+3} f_{\sigma(i)} \Big) \in I,$$

dès que f_1 est dans $\ker C$ et $f_2, \ldots, f_{m+3}$ sont des éléments auto-adjoints dans $\ker C$. Finalement en répétant cet argument nous voyons que

$$\sum_{\sigma \in S_{m+3}} \Big(\prod_{i=1}^{m+3} f_{\sigma(i)} \Big) \in I,$$

quels que soient $f_1, \ldots, f_{m+3} \in \ker C$ et en particulier $f^{m+3} \in I$ pour tout $f \in \ker C$. Le théorème de Nagata-Higman [Pa, 4.4.10 Proposition] implique que $(\ker C)^{2^{m+3}-1} \subset I$. ■

Définition 1.2.5 Soit C une partie $\mathcal{D}$-invariante de $\hat{N}$. Nous disons que C est $\mathcal{D}$-première si dès que C est réunion de deux parties fermées $\mathcal{D}$-invariantes C_1, C_2 alors $C_1 = C$ ou $C_2 = C$.

Lemme 1.2.6 *Soit C une partie $\mathcal{D}$-invariante fermée de $\hat{N}$. Supposons que* $\ker C \subset \mathcal{S}(N)$ *est $\mathcal{D}$-premier. Alors C est $\mathcal{D}$-première.*

Preuve Soient C_1, C_2 deux parties fermées $\mathcal{D}$-invariantes de C telles que $C = C_1 \cup C_2$. Soit $I_j = \ker C_j \subset \mathcal{S}(N)$, $j = 1, 2$. Alors $I_1 * I_2 \subset \ker C_1 \cap \ker C_2 = \ker(C_1 \cup C_2) = \ker C$. Comme $\ker C$ est $\mathcal{D}$-premier, nous avons que $\ker C_j \subset \ker C$ pour $j = 1$ ou $j = 2$. Mais alors $C \subset C_1$ ou $C \subset C_2$. ■

Lemme 1.2.7 *Soit C une partie fermée $\mathcal{D}$-première de $\hat{N}$. Alors C est l'adhérence d'une $\mathcal{D}$-orbite dans $\hat{N}$.*

Preuve Pour $f \in \mathcal{S}(N)$, soit $\|f\| = \sup_{\tau \in C} \|\tau(f)\|_{\mathrm{op}}$ la C^*-semi-norme de f associée à C. Nous savons que $\hat{N}$, donc aussi la partie fermée C, est un espace de Baire [Di2]. Choisissons une suite dense $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}(N)$ et prenons pour $n \in \mathbb{N}$ l'ouvert

$$U_n = \Big\{ \tau \in C \,;\, \|\tau(f_n)\|_{\mathrm{op}} > \frac{1}{2} \|f_n\| \Big\}.$$

Soit $\mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N} \,;\, U_n \neq \varnothing\}$. Alors $V_n = \bigcup_{x \in \mathcal{D}} {}^{x}U_n$, $n \in \mathbb{N}'$, est une partie ouverte $\mathcal{D}$-invariante de C.

Comme C est $\mathcal{D}$-premier, V_n est dense dans C. D'après la propriété de Baire, $V_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}'} V_n$ est aussi dense dans C. Soit $\tau \in V_\infty$. Montrons que la $\mathcal{D}$-orbite de τ est dense dans C. Sinon il existe un ouvert W de C tel que $({}^{\mathcal{D}}\tau) \cap W = \varnothing$. Nous prenons $\rho \in W$ et $g = g^* \in \mathcal{S}(N)$, tel que $\tau'(g) = 0$ pour tout $\tau' \in ({}^{\mathcal{D}}\tau)^-$ et tel que

$\|\rho(g)\|_{\mathrm{op}} = 2$. Quitte à remplacer g par un $\phi(g)$ pour un certain ϕ, nous pouvons supposer en plus que $\|g\|$ est aussi égal à 2.

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - g\| < \frac{1}{4}\|f_n\|$. Donc $\|\rho(f_n)\|_{\mathrm{op}} \geq \frac{3}{4}\|f_n\|$. Alors $\rho \in U_n$ (et donc $n \in \mathbb{N}'$) et on a que $\|\tau'(f_n)\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{4}\|f_n\|$ pour tout $\tau' \in {}^{\mathcal{D}}\tau$ (comme $\tau'(g) = 0$). Ceci nous dit que $\tau \notin V_n$, une contradiction avec $\tau \in V_\infty$. ■

***1.2.8* (Preuve du théorème)** Nous avons vu dans (1.2.4) que I est le noyau de son enveloppe C. Donc C est $\mathcal{D}$-premier par (1.2.6) et, par (1.2.7), C est l'adhérence d'une $\mathcal{D}$-orbite. Finalement

$$I = \ker C = \ker({}^{\mathcal{D}}\tau)$$

pour un $\tau \in \hat{N}$. ■

Exemple 1.2.9 Soit $N = \mathbb{R}$, soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $J = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ ;\ \hat{f}(c) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi itc}\,dt = 0\}$. Soit

$$I = \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ ;\ \left(\frac{d}{dt}\right)^k \hat{f}(c) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Alors I est un idéal fermé de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais I n'est pas fermé pour une norme. En fait, I est l'adhérence de l'idéal minimal $j(\{c\})$ et $I \neq \ker\{c\}$. Cependant il est facile de voir que I est premier. En effet, si $I_1 * I_2 \subset I$ pour deux idéaux I_1, I_2 de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et si $I_j \not\subset I$ pour $j = 1, 2$, alors il existe $f_j \in I_j$, tel que $(\frac{d}{dt})^{n_j}\hat{f}_j(c) \neq 0$ et $(\frac{d}{dt})^i\hat{f}_j(c) = 0$, $0 \leq i < n_j$ pour un certain $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$. Mais alors $(\frac{d}{dt})^{n_1+n_2}(f_1 * f_2)\hat{}(c) = (\frac{d}{dt})^{n_1+n_2}(\hat{f}_1\hat{f}_2)(c) \neq 0$ d'après la règle de Leibnitz, ce qui est en contradiction avec le fait que $f_1 * f_2 \in I$.

L'idéal premier fermé I de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui n'est pas fermé pour une norme, ne coïncide pas avec un noyau. Donc l'hypothèse de « fermé pour une norme » est nécessaire dans le théorème.

1.2.10 Il est facile de voir que l'idéal trivial $\{0\}$ n'est pas un idéal premier. En effet soit Z le centre N. Nous pouvons prendre $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ dans $\mathcal{S}(Z)$ tel que $\mu * \nu = 0$. Alors le produit des idéaux $I_1 = \mathcal{S}(N) * \mu$ and $I_2 = \mathcal{S}(N) * \nu$ est $\{0\}$ mais évidemment $I_1 \neq \{0\}$ et $I_2 \neq \{0\}$.

Remarque 1.2.11 Le théorème 1.1.6 a déjà été démontré dans [Mo1] par une méthode constructive (démonstration par récurrence) beaucoup plus lourde. Le résultat suivant, qui est essentiel pour la suite de l'article, a été démontré dans [LuMo2, Theorem 5.3]. Sa preuve repose sur la proposition 4.1 de [LuMo2] et sur 1.1.6.

Théorème 1.2.12 *Soit $\mathcal{D}$ un groupe exponentiel d'automorphismes du groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe N. Alors tout idéal I non trivial $\mathcal{D}$-premier fermé de $L^1(N)$ est de la forme*

$$I = \ker({}^{\mathcal{D}}\tau) = \{f \in L^1(N)\ ;{}^{d}\,\tau(f) = 0, \forall d \in \mathcal{D}\}$$

pour un certain $\tau \in \hat{N}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

Preuve Voir [LuMo2].

2 Représentations topologiquement irréductibles et sous-algèbres particulières

2.1 Conventions et rappels

2.1.1 Dans la suite $G = \exp(\mathfrak{g})$ désignera un groupe de Lie résoluble exponentiel. Soit $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ et $N = \exp(\mathfrak{n})$ le sous-groupe nilpotent correspondant. Le groupe exponentiel $\mathcal{D} = \mathrm{Ad}(G)|_{\mathfrak{n}}$ agit sur $\mathfrak{n}$, N, $\hat{N}$, $\mathcal{S}(N)$ et $L^1(N)$. Si $\tau \in \hat{N}$ et $g \in G$, nous noterons ${}^g\tau$ pour l'action de g sur τ et ${}^G\tau$ pour l'orbite de τ sous cette action.

2.1.2 D'après la théorie de Kirillov [Ki] et Pukanszky [Pu], les représentations unitaires irréductibles de G sont obtenues de la manière suivante: Soit $\pi \in \hat{G}$. Alors il existe $l \in \mathfrak{g}^*$ et une polarisation $\mathfrak{p}$ de l dans $\mathfrak{g}$ vérifiant le critère de Pukanszky tels que π soit unitairement équivalent à la représentation induite $\pi_l = \mathrm{ind}_P^G \chi_l$, où $P = \exp(\mathfrak{p})$ et où χ_l désigne le caractère $\chi_l(p) = e^{-il(\log p)}$ de P.

2.1.3 Soit $q \in \mathfrak{n}^*$ et $l \in \mathfrak{g}^*$ tels que $l|_{\mathfrak{n}} = q$. Rappelons la définition suivante du stabilisateur $\mathfrak{g}(l)$:

$$\mathfrak{g}(l) = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, \langle l, [X, \mathfrak{g}]\rangle = \langle q, [X, \mathfrak{g}]\rangle \equiv 0\},$$
$$G(l) = \{s \in G\,;\, \mathrm{Ad}^*(s)l = l\} = \exp\bigl(\mathfrak{g}(l)\bigr)\,.$$

Cette algèbre dépend uniquement de q. Décomposons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de la manière suivante: Soit $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{n}$ tel que

$$\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}(l) \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}.$$

Prenons un sous-espace $\mathfrak{f}$ de $\mathfrak{g}(l)$ tel que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{h}.$$

Remarquons que dans la définition de $\mathfrak{h}$ nous avons uniquement exclu la partie de $\mathfrak{g}(l)$ qui n'est pas dans $\mathfrak{n}$. La définition de $\mathfrak{h}$ ne dépend pas de l'extension l de q choisie. Dans la suite de nos raisonnements nous supposerons toujours $\mathfrak{f} \neq 0$, les simplifications obtenues pour $\mathfrak{f} = 0$ étant évidentes.

Posons
$$F = \exp(\mathfrak{f}), \quad H = \exp(\mathfrak{h}).$$

Nous avons que
$$G = F \cdot H = G(l) \cdot H$$

et G est le produit topologique direct de F et de H.

2.2 Différentes représentations unitaires irréductibles

2.2.1 Soit $\pi = \pi_l \in \hat{G}$ la représentation unitaire irréductible de G associée à l. Soit $\gamma = \pi|_H$. Comme $G = G(l) \cdot H$ nous savons que γ est irréductible et que $\gamma \simeq \pi_m \in \hat{H}$, où $m = l|_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*$ (voir [LeLu]).

Remarques 2.2.2

a) Pour tout caractère $\chi = e^{-ir(\log(\cdot))}$ sur H tel que $\chi|_N \equiv 1$ c. à d. $\chi \in N^\perp$ et $r \in \mathfrak{n}^\perp$ (dans h^*), les représentations π_{m+r} et $\gamma \otimes \chi$ sont unitairement équivalentes. En effet, il est bien connu que pour un groupe de Lie connexe $\mathfrak{D} = \exp(\mathfrak{d})$ quelconque, pour tout $f \in \mathfrak{d}^*$, pour tout idéal $\mathfrak{i} \supset [\mathfrak{d}, \mathfrak{d}]$, on a que

$$\mathrm{Ad}^*\big(\mathfrak{D}(f|_{\mathfrak{i}})\big)\, f = f + \big(\mathfrak{d}(f) + \mathfrak{i}\big)^\perp.$$

Comme dans notre cas $\mathfrak{h}(m) = \mathfrak{h}(l) \subset \mathfrak{n}$ (car $\mathfrak{h}(l) \subset \mathfrak{n}$, $\mathfrak{h}(l)$ étant contenu dans $\mathfrak{g}(l) \cap \mathfrak{h}$, on en déduit que $\mathrm{Ad}^*\big(H(q)\big)\, m = m + \mathfrak{n}^\perp$. Donc $\gamma \otimes \chi$ est unitairement équivalente à γ, car $\gamma \otimes \chi$ est associée à la forme linéaire $m + r \in \mathrm{Ad}^*(H)m = \mathrm{Ad}^*(G)m$.

b) Les constructions précédentes ont été inspirées des travaux de Poguntke [Po2]. Cependant nous avons simplifié les raisonnements de Poguntke; en particulier nous évitons le recours aux représentations projectives et aux cocycles.

2.3 But du chapitre

Soit $G = \exp(\mathfrak{g})$ un groupe de Lie résoluble exponentiel, connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $(T, \mathcal{U})$ une représentation topologiquement irréductible de $L^1(G)$ sur un espace de Banach $\mathcal{U}$ de noyau $\ker_{L^1(G)} T$ dans $L^1(G)$. Comme $L^1(G)$ possède une unité approchée, il existe des représentations continues uniques de $L^1(H)$ et de $L^1(N)$, notées également T telles que

$$T(f) = \int_H f(x)T(x)\, dx, \ \text{resp. } T(f) = \int_N f(x)T(x)\, dx.$$

Notons leurs noyaux respectifs par $\ker_{L^1(H)} T$ et $\ker_{L^1(N)} T$.

Soit $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$ et $N = \exp(\mathfrak{n})$. Alors $\ker_{L^1(N)} T$ est un idéal G-premier de $L^1(N)$. Donc, par (1.2.12), il existe $q \in \mathfrak{n}^*$ et $\tau = \pi_q = \mathrm{ind}_{P_0}^N \chi_q \in \hat{N}$ tels que

$$\ker_{L^1(N)} T = \ker({}^G\tau) = \bigcap_{g \in G} \ker({}^g\tau).$$

Nous utiliserons alors la décomposition de $\mathfrak{g}$, ainsi que le sous-groupe $H = \exp(\mathfrak{h})$ et les représentations $\gamma \in \hat{H}$ et $\pi \in \hat{G}$ introduits précédemment.

Nous montrerons que $\ker_{L^1(H)} T$ est égal au noyau $\ker_{L^1(H)} \gamma = \ker \gamma$ et que

$$\big(L^1(G) * \ker_{L^1(N)} T\big)^- = \big(L^1(G) * \ker \gamma\big)^- \subset \ker T.$$

Il ne nous restera ensuite plus qu'à étudier les représentations topologiquement irréductibles de

$$L^1(G)/\big(L^1(G)*\ker_{L^1(N)} T\big)^- = L^1(G)/\big(L^1(G)*\ker\gamma\big)^- \cong L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big).$$

Cela se fera en étudiant les représentations topologiquement irréductibles d'une sous-algèbre de la forme $p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p$, où $p_\lambda \in L^1(H)$ est tel que $\gamma(p_\lambda)$ soit un projecteur de rang 1 et où $p = p_\lambda \mod \ker\gamma$. Nous omettrons les démonstrations d'un certain nombre de résultats se trouvant déjà chez Poguntke.

Dans un chapitre ultérieur nous étudierons alors la question des extensions possibles des représentations topologiquement irréductibles de $p*L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p$ à l'algèbre $L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$ toute entière.

Remarquons que si $q, q_1 \in \mathfrak{n}^*$, $\tau = \operatorname{ind}_{P_0}^N \chi_q$, $\tau_1 = \operatorname{ind}_{P_0'}^N \chi_{q_1}$ sont tels que $\ker({}^G\tau) = \ker({}^G\tau_1)$, alors les G-orbites de q et q_1 dans $\mathfrak{n}^*$ sont égales, car elles sont localement ouvertes [LuMo2]. Ainsi cette étape de la construction dépend uniquement de la G-orbite correspondante dans $\mathfrak{n}^*$. Les raisonnements de Poguntke permettent de conclure que notre construction est aussi à isomorphisme près indépendante du choix du projecteur p pour $\mathfrak{h}$ fixé (voir 2.6.5).

2.4 Étude des noyaux des différentes représentations

2.4.1 Soit $m = l_{|\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*$, $\gamma = \pi_{|H} \simeq \pi_m \in \hat{H}$. Dans [LeLu] les auteurs montrent qu'il existe un sous-espace G-invariant noté $\mathrm{ES}(\gamma)$, dense dans l'espace $\mathcal{H}_\gamma$ de γ, tel que pour tous les $\lambda, \mu \in \mathrm{ES}(\gamma)$, on puisse construire un élément $p(\lambda,\mu) \in L^1(H)$ pour lequel $\gamma\big(p(\lambda,\mu)\big)$ est l'opérateur $P_{\lambda,\mu}$ de rang 1 sur $\mathcal{H}_\gamma$. Ici $P_{\lambda,\mu}$ est défini par

$$P_{\lambda,\mu}\xi = \langle \xi, \mu\rangle \lambda, \quad \xi \in \mathcal{H}_\gamma.$$

D'ailleurs dans la suite nous supposerons que $\langle\lambda,\lambda\rangle = 1$ et nous noterons p_λ l'élément $p(\lambda,\lambda)$ de $L^1(H)$, tel que $\gamma(p_\lambda)$ soit le projecteur orthogonal de rang 1 $P_{\lambda,\lambda} = P_\lambda$. Ainsi $p = p_\lambda \mod \ker\gamma$ est un idempotent dans $L^1(H)/\ker\gamma$.

La définition et le lemme suivant se trouvent dans [Po2, 5.2] et restent valables avec notre définition modifiée de γ.

Définition 2.4.2 Posons

$$\mathcal{J}_0 = \{ f \in L^1(H) \,;\, \gamma(f) \text{ est de rang fini}\}$$

et

$$\mathcal{J} = \overline{\mathcal{J}_0}^{L^1(H)}.$$

Évidemment $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}$ sont des idéaux de $L^1(H)$ et $\mathcal{J}_0/\ker\gamma$ est l'idéal bilatère minimal de $L^1(H)/\ker\gamma$.

Lemme 2.4.3 *Soient $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}$ les idéaux définis en (2.4.2). Soit χ un caractère sur H tel que $\chi|_N \equiv 1$. Alors $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}$ sont invariants par multiplication par χ.*

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

Preuve Comme $\gamma(\chi \cdot f) = \gamma \otimes \chi(f)$ et que $\gamma \otimes \chi$ et γ sont unitairement équivalents par (2.2.2), on voit que si $\gamma(f)$ est de rang fini, il en est de même de $\gamma(\chi \cdot f)$. ■

Proposition 2.4.4 *Soient τ et γ comme précédemment. Alors*

$$\ker\gamma = \big(L^1(H) * \ker({}^G\tau)\big)^- = \ker_{L^1(H)} T.$$

Preuve Comme pour tout $\chi \in N^\perp \subset \hat{H}$ la représentation $\gamma \otimes \chi$ est équivalente à γ, nous avons que $\chi \ker\gamma = \ker\gamma$. Ceci entraîne que $L^\infty(H/N)\ker\gamma = \ker\gamma$. Donc d'après [HaLu, Theorem 2.3],

$$\ker\gamma = (L^1(H) * \ker_{L^1(N)}\gamma)^-.$$

D'autre part il est bien connu [LeLu, 5. Theorem 9], que $\pi_m|_N$ est faiblement équivalent à ${}^G\pi_q = {}^G\tau$, c. à d. que $\ker_{L^1(N)}\gamma = \ker({}^G\tau)$. Donc,

$$\ker\gamma = \big(L^1(H) * \ker({}^G\tau)\big)^-.$$

D'après (2.3) nous savons déjà que $\big(L^1(H) * \ker({}^G\tau)\big)^- = \big(L^1(H) * \ker_{L^1(N)} T\big)^- \subset \ker_{L^1(H)} T$. Ainsi $\ker\gamma \subset \ker_{L^1(H)} T$. Supposons qu'il existe $f \in \ker_{L^1(H)} T$ tel que $\gamma(f) \neq 0$. Alors il existe $\nu \in \mathrm{ES}(\gamma)$ tel que $\gamma(f)\nu \neq 0$. Prenons $\lambda \in \mathrm{ES}(\gamma)$ comme précédemment et $p_\lambda \in L^1(H)$ tel que $\gamma(p_\lambda) = P_\lambda$. Alors

$$P_\lambda = \frac{1}{\|\gamma(f)\nu\|^2} P_{\lambda,\gamma(f)\nu} P_{\gamma(f)\nu,\lambda} = \frac{1}{\|\gamma(f)\nu\|^2} P_{\lambda,\nu} \circ \gamma(f^*) \circ \gamma(f) \circ P^*_{\lambda,\nu}.$$

De plus, comme $\lambda, \nu \in \mathrm{ES}(\gamma)$, il existe $f_0 \in \mathcal{J}_0$ tel que $\gamma(f_0) = P_{\lambda,\nu}$. Donc

$$p_\lambda = \frac{1}{\|\gamma(f)\nu\|^2} f_0 * f^* * f * f_0^* \mod \ker\gamma.$$

Puisque $\ker\gamma \subset \ker_{L^1(H)} T$ et que $f \in \ker_{L^1(H)} T$, il en est de même de p_λ. Comme $\mathcal{J}_0$ est minimal modulo $\ker\gamma$ et comme $p_\lambda \in \mathcal{J}_0 \cap \ker_{L^1(H)} T$, nous pouvons en déduire que $\mathcal{J}_0$ donc aussi $\mathcal{J}$ est contenu dans $\ker_{L^1(H)} T$. Mais $\mathcal{J}$ est invariant par multiplication avec les $\chi \in N^\perp$. Donc d'après [HaLu, 2.3], $\mathcal{J} = (L^1(H) * \mathfrak{I})^-$ où $\mathfrak{I}$ est un idéal H-invariant de $L^1(N)$. Comme $\mathcal{J} \subset \ker_{L^1(H)} T$, nous avons que $\mathfrak{I} \subset \ker_{L^1(N)} T = \ker({}^G\tau)$ et donc $\mathcal{J} = (L^1(H) * \mathfrak{I})^- \subset \big(L^1(H) * \ker({}^G\tau)\big)^- = \ker\gamma$, ce qui est absurde. Donc $\ker\gamma = \ker_{L^1(H)} T$. ■

Remarque Ce raisonnement prouve en particulier que $T(p_\lambda) \neq 0$, et donc que $\mathcal{W} = T(p_\lambda)\mathcal{U} \neq \{0\}$.

Le résultat suivant, qui étudie le noyau des différents prolongements de γ à $L^1(G)$, ne sera pas utilisé dans la suite.

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

Proposition 2.4.5 *Nous avons que*

$$\bigcap_{\chi \in N^{\perp} \subset \hat{G}} \ker(\pi \otimes \chi)_{L^1(G)} = \big(L^1(G) * \ker \gamma\big)^{-} = \big(L^1(G) * \ker_{L^1(N)} T\big)^{-}.$$

Cette intersection de noyaux est donc déterminée univoquement par la représentation T de départ.

Preuve D'après [LeLu, 5. Theorem 10], nous savons que $\mathrm{ind}_N^G \tau$ est faiblement équivalente à $\int_{(G/N)^{\wedge}} \pi \otimes \chi d\chi$. Donc

$$\bigcap_{\chi \in N^{\perp} \subset \hat{G}} \ker(\pi \otimes \chi)_{L^1(G)} = \ker(\mathrm{ind}_N^G \tau).$$

D'autre part d'après [HaLu, 2.3 et 2.4.4]

$$\begin{aligned} \ker(\mathrm{ind}_N^G \tau) &= \big(L^1(G) * \ker({}^G\tau)\big)^{-} = \big(L^1(G) * \ker_{L^1(N)} T\big)^{-} \\ &= \Big(L^1(G) * \big(L^1(H) * \ker({}^G\tau)\big)\Big)^{-} = (L^1(G) * \ker \gamma)^{-}. \end{aligned}$$ ■

2.5 Algèbre $L^1\big(F, L^1(H)/\ker \gamma\big)$

2.5.1 Rappelons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{h}$ avec $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{g}(l)$. Posons $F = \exp(\mathfrak{f})$. En tant qu'ensembles, identifions F et $G(l)/G(l) \cap N$. Les éléments de G se décomposent de manière unique en

$$g = v \cdot h \quad \text{avec} \quad v \in F \text{ et } h \in H.$$

Munissons H d'une mesure de Haar et $F = \exp(\mathfrak{f}) \simeq G(l)/G(l) \cap N$ de la mesure de Haar du groupe commutatif $G(l)/G(l) \cap N$, donc de la mesure provenant de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{f}$. Alors on obtient une mesure de Haar sur G par

$$\int_G f(g)\, dg = \int_{\mathfrak{f}} \int_H f\big(\exp(V) \cdot h\big)\, dh\, dV.$$

Il existe une bijection

$$\begin{aligned} \Psi \colon L^1(G) &\longrightarrow L^1\big(F, L^1(H)\big) \\ f &\longmapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

avec $\tilde{f}(v)(h) = f(vh)$ pour presque tout $v \in F$ et presque tout $h \in H$. On vérifie alors que

$$\|\tilde{f}\|_{L^1(F, L^1(H))} = \|f\|_{L^1(G)},$$

c. à d. l'application précédente est une isométrie [Po2].

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

2.5.2 Puisque la partie fermée $F = \exp(\mathfrak{f})$ de G n'est pas un sous-groupe, nous sommes forcés d'introduire la convolution d'algèbre de convolution généralisée dans $L^1\big(F, L^1(H)\big)$. Quels que soient $X, Y \in F$, définissons

$$P_{X,Y} \colon L^1(H) \longrightarrow L^1(H)$$
$$(P_{X,Y} f)(h) = f\big(\exp(-Y)\exp(-X)\exp(X+Y)h\big).$$

Le produit de convolution dans $L^1\big(F, L^1(H)\big)$ est alors défini par

$$(\tilde{f} * \tilde{g})\big(\exp(V_0)\big) = \int_{\mathfrak{f}} \Big[P_{V_0+V,-V}\Big(\tilde{f}\big(\exp(V_0+V)\big)^{\exp(-V)}\Big)\Big] *_{L^1(H)} \tilde{g}\big(\exp(-V)\big)\, dV.$$

On montre que
$$(\tilde{f} * \tilde{g})\big(\exp(V_0)\big) = (f * g)\tilde{}\,\big(\exp(V_0)\big),$$
c. à d. l'application Ψ est un isomorphisme [Po2].

2.5.3 Notons par Δ_H et Δ_G les fonctions modules sur H et sur G. Puisque G agit sur H par conjugaisons on a que

$$d\big(\exp(V_0)\cdot h \cdot \exp(-V_0)\big) = \Delta_G\big(\exp(V_0)\big)^{-1} dh.$$

L'involution dans $L^1(G)$ est alors donnée par

$$f^*(g) = \Delta_G(g^{-1})\overline{f(g^{-1})} \quad \forall g \in G, \forall f \in L^1(G)$$

et celle de $L^1(H)$ est donnée par

$$f^*(h) = \Delta_H(h^{-1})\overline{f(h^{-1})} \quad \forall h \in H, \forall f \in L^1(H).$$

Finalement l'involution dans $L^1\big(F, L^1(H)\big)$ est donnée par

$$(\tilde{f})^*\big(\exp(V)\big) = \Big[\Big(\tilde{f}\big(\exp(-V)\big)\Big)^{\exp V}\Big]^{*_{L^1(H)}}.$$

On montre que
$$(\tilde{f})^* = (\tilde{f^*})$$
c. à d. que l'application Ψ est un $*$-isomorphisme.

2.5.4 La projection

$$P \colon L^1\big(F, L^1(H)\big) \longrightarrow L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$$
$$f \longmapsto P(f)$$

définie par
$$P(f)\big(\exp(V)\big) = f\big(\exp(V)\big) \mod \ker\gamma, \forall V \in \mathfrak{f},$$

est un $*$-homomorphisme, car $\ker\gamma$ est G-invariant. Considérons alors le $*$-homomorphisme

$$\Phi = P \circ \Psi \colon L^1(G) \longrightarrow L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$$

et constatons que

$$\ker\Phi = \big(L^1(G) * \ker\gamma\big)^{-}.$$

Donc $L^1(G)/\big(L^1(G)*\ker\gamma\big)^{-}$ et $L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$ sont $*$-isomorphes. De plus, si on munit $L^1(G)/\big(L^1(G)*\ker\gamma\big)^{-}$ et $L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$ respectivement des normes

$$\|f\|_{L^1(G)/(L^1(G)*\ker\gamma)^-} = \inf\big\{\,\|f+q\|_1\ ;\, q \in \big(L^1(G)*\ker\gamma\big)^{-}\big\}$$

et

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1(F,L^1(H)/\ker\gamma)} &= \int_{\mathfrak{f}} \big\| f\big(\exp(V)\big)\big\|_{L^1(H)/\ker\gamma}\, dV\\ &= \int_{\mathfrak{f}} \inf_{\tilde q\in\ker\gamma} \big\| f\big(\exp(V)\big) + \tilde q\big\|_{L^1(H)}\, dV,\end{aligned}$$

ces deux espaces sont isométriques. Donc l'algèbre

$$\begin{aligned}L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) &\cong L^1(G)/\big(L^1(G)*\ker\gamma\big)^{-}\\ &= L^1(G)/\big(L^1(G)*\ker({}^G\tau)\big)^{-} = L^1(G)/\big(L^1(G)*\ker_{L^1(N)} T\big)^{-}\end{aligned}$$

est déterminée univoquement (à isomorphisme et isométrie près) par la représentation T donnée au départ (voir [Po2]).

2.6 Algèbre $p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p$

Les constructions suivantes sont également dues à Poguntke.

2.6.1 Rappelons que $p_\lambda \in L^1(H)$ est tel que

$$\gamma(p_\lambda) = P_{\lambda,\lambda} = P_\lambda \quad \text{avec} \quad \langle\lambda,\lambda\rangle = 1 \text{ et } \lambda \in \mathrm{ES}(\gamma).$$

On vérifie que

$$(p_\lambda * f * p_\lambda)\tilde{}(x) = p_\lambda^x *_{L^1(H)} \tilde f(x) *_{L^1(H)} p_\lambda$$

pour tout $f \in L^1(G)$ et presque tout $x \in G$. Ici pour $g \in L^1(H)$ et $x \in G$, le symbole g^x désigne la fonction

$$g^x(y) = \Delta_G(x) g(xyx^{-1}), \quad y \in H.$$

Alors on a que

$$\gamma(g^x) = \pi(x)^{-1}\gamma(g)\pi(x), \quad \|g^x\|_1 = \|g\|_1,$$

puisque $\pi|_H = \gamma$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

2.6.2 Revenons à la représentation γ et à son extension $\pi = \pi_l$. On a les formules suivantes:

$$\gamma(p_\lambda^x) = P_{\pi(x)^*\lambda,\pi(x)^*\lambda} = P_{\pi(x^{-1})\lambda}$$
$$\gamma(p_\lambda^x * g * p_\lambda) = \langle \gamma(g)\lambda, \pi(x)^*\lambda\rangle P_{\pi(x)^*\lambda,\lambda},$$

où $g \in L^1(H)$. Puisque $\lambda \in \mathrm{ES}(\gamma)$, il en est de même de $\pi(x)^*\lambda$ pour tout $x \in G$ et il existe $\nu_\lambda(x) \in L^1(H)$ tel que

$$\gamma\big(\nu_\lambda(x)\big) = P_{\pi(x)^*\lambda,\lambda}$$

par [LeLu]. Donc, pour tout $g \in L^1(H)/\ker\gamma$ et tout $x \in G$, il existe une constante $c(x,g) = \langle \gamma(g)\lambda, \pi(x)^*\lambda\rangle$ telle que

$$p_\lambda^x * g * p_\lambda = c(x,g)\cdot \nu_\lambda(x) \mod \ker\gamma.$$

De plus

$$\nu_\lambda(x) = p_\lambda^x * \nu_\lambda(x) * p_\lambda \mod \ker\gamma.$$

Notons

$$p = p_\lambda \mod \ker\gamma, \quad \nu(x) = \nu_\lambda(x) \mod \ker\gamma$$

pour les fonctions correspondantes dans l'espace quotient. Alors l'espace

$$p^x * \big(L^1(H)/\ker\gamma\big) * p = \big(p_\lambda^x * L^1(H) * p_\lambda\big)/\ker\gamma$$

est de dimension 1 pour $x \in G$ fixé et admet $\nu(x)$ comme base.

D'après [Po2] on a:

Proposition 2.6.3 *Considérons $\nu(x) \in L^1(H)/\ker\gamma$ et posons*

$$\omega(x) = \|\nu(x)\|_{L^1(H)/\ker\gamma}.$$

Alors la fonction ω est un poids symétrique sur G, constant sur les classes modulo H.

Preuve Remarquons d'abord que

$$\gamma\big(\nu_\lambda(x)\big) = \pi(x)^*\circ\gamma(p_\lambda).$$

Alors

$$\begin{aligned}\gamma\big(\nu_\lambda(xy)\big) &= \pi(xy)^{-1}\circ\gamma(p_\lambda)\circ\gamma(p_\lambda)\\ &= \pi(y)^{-1}\circ\pi(x)^{-1}\circ\gamma(p_\lambda)\circ\pi(y)\circ\pi(y)^{-1}\circ\gamma(p_\lambda)\\ &= \gamma\big(\nu_\lambda(x)^y *_{L^1(H)} \nu_\lambda(y)\big)\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

entraîne que

$$\nu_\lambda(xy) = \nu_\lambda(x)^y *_{L^1(H)} \nu_\lambda(y) \quad \bmod \ \ker\gamma$$

et donc

$$\omega(xy) \le \omega(x)\omega(y).$$

Comme

$$\left\| \gamma\big(\nu_\lambda(x)\big) \right\|_{\mathrm{op}} = 1,$$

on a

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= \inf_{r\in\ker\gamma} \|\nu_\lambda(x) + r\|_{L^1(H)} \\
&\ge \inf_{r\in\ker\gamma} \left\| \gamma\big(\nu_\lambda(x) + r\big) \right\|_{\mathrm{op}} \\
&= \left\| \gamma\big(\nu_\lambda(x)\big) \right\|_{\mathrm{op}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Finalement l'égalité

$$\gamma\Big(\big(\nu_\lambda(x^{-1})^x\big)^* \Big) = \gamma\big(\nu_\lambda(x)\big)$$

entraîne que

$$\omega(x) = \omega(x^{-1})$$

et ω est un poids symétrique sur G. De plus

$$\gamma\big(\nu_\lambda(xh)\big) = \gamma\big({}_{h^{-1}}\nu_\lambda(x)\big) \quad \forall h \in H$$

implique que

$$\omega(xh) = \omega(x) \quad \forall h \in H$$

et ω est constant sur les classes modulo H.

Le résultat suivant a également été décrit dans [Po2].

Proposition 2.6.4 *Considérons l'algèbre de convolution commutative*

$$\mathcal{B} = L^1\Big(G(l)/\big(G(l)\cap N\big), \omega\Big) \equiv L^1(F,\omega),$$

F étant identifié au groupe commutatif $G(l)/\big(G(l)\cap N\big)$. Il existe un isomorphisme isométrique

$$\Lambda\colon p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p \longrightarrow L^1(F,\omega).$$

Preuve Pour tout $\tilde f \in L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$, on a que

$$(p * \tilde f * p)(x) = p^x *_{L^1(H)} \tilde f(x) *_{L^1(H)} p \in p^x * \big(L^1(H)/\ker\gamma\big) * p = \mathbb{C}\cdot\nu(x).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

Donc, il existe $h(x) \in \mathbb{C}$ tel que

$$h(x) \cdot v(x) = (p * \tilde{f} * p)(x).$$

La fonction h ainsi définie appartient à $L^1(F, \omega)$ et

$$\Lambda\colon\ p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p \longrightarrow L^1(F,\omega), \quad \Lambda(p * \tilde{f} * p) = h,$$

est une isométrie entre $p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p$ et $L^1(F,\omega)$. On montre que Λ est bijectif. De plus, si on munit $L^1(F,\omega)$ du produit de convolution et de l'involution pour la mesure de Lebesgue et si on munit $p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p$ du produit de convolution et de l'involution de l'espace $L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$, alors Λ est en fait un $*$-isomorphisme. Puisque $L^1(F,\omega)$ est commutatif, il en est de même de $p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p$. ■

Remarques 2.6.5

a) Deux prolongements l distincts de q à $\mathfrak{g}^*$ donnent des représentations π_l qui diffèrent uniquement par un caractère unitaire. Donc, puisque $\gamma\big(v_\lambda(x)\big) = \pi(x)^{-1} \circ \gamma(p_\lambda)$, $v(x) = v_\lambda(x) \mod \ker\gamma$ et que $\omega(x) = \|v(x)\|_{L^1(H)/\ker\gamma}$, des prolongements l distincts conduisent au même poids ω.

b) Rappelons que $p_\lambda \in L^1(H)$ est tel que

$$\gamma(p_\lambda) = P_{\lambda,\lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathrm{ES}(\gamma) \text{ et } \langle\lambda,\lambda\rangle = 1.$$

Soit $p_\mu \in L^1(H)$ tel que

$$\gamma(p_\mu) = P_{\mu,\mu} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathrm{ES}(\gamma) \text{ et } \langle\mu,\mu\rangle = 1.$$

Alors les algèbres $(p_\lambda \mod \ker\gamma) * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * (p_\lambda \mod \ker\gamma)$ et $(p_\mu \mod \ker\gamma) * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * (p_\mu \mod \ker\gamma)$ sont $*$-isomorphes et homéomorphes. En effet, puisque $\lambda, \mu \in \mathrm{ES}(\gamma)$, il existe $r \in L^1(H)$ tel que $\gamma(r) = P_{\lambda,\mu}$. On en déduit que l'application

$$\begin{aligned}(p_\lambda \mod \ker\gamma) * \tilde{f} * (p_\lambda \mod \ker\gamma)&\\ \longmapsto (r^* * p_\lambda \mod \ker\gamma) * \tilde{f} * (p_\lambda * r \mod \ker\gamma)&\end{aligned}$$

est un $*$-isomorphisme et un homéomorphisme pour ces deux algèbres. Il suffit donc de faire l'étude pour une seule telle fonction p, le sous-groupe H étant fixé.

c) Le raisonnement de cette partie reste évidemment valable pour les représentations algébriquement irréductibles sur un espace de Banach, qui sont des représentations bornées topologiquement irréductibles particulières.

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

2.7 Conclusions du chapitre

Soit $(T, \mathcal{U})$ une représentation topologiquement irréductible de G. Alors l'orbite ${}^G\tau \subset \hat{N}$, $\tau \in \hat{N}$, telle que $\ker_{L^1(N)} T = \ker({}^G\tau)$ est déterminée univoquement par $(T, \mathcal{U})$. On construit ensuite $H \subset G$ et $\gamma \in \hat{H}$ tels que $\ker_{L^1(H)} T = \ker\gamma$. Ceci montre que $\big(L^1(G) * \ker\gamma\big)^- \subset \ker_{L^1(G)} T$ et que, pour caractériser complètement la représentation $(T, \mathcal{U})$, il suffit d'étudier les représentations topologiquement irréductibles de

$$\begin{aligned} L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) &\cong L^1(G)/\big(L^1(G) * \ker\gamma\big)^- \\ &= L^1(G)/\big(L^1(G) * \ker({}^G\tau)\big)^- \\ &= L^1(G)/\big(L^1(G) * \ker_{L^1(N)} T\big)^-. \end{aligned}$$

Ce dernier quotient ne dépend pas de H, à isomorphisme et isométrie près, et notre construction est donc indépendante du choix de H. Puisque la sous-algèbre $p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p$ est elle aussi (à isomorphisme près, voir [Po2]) indépendante du choix de p, $\mathfrak{h}$ étant fixé une fois pour toute, et qu'elle est $*$-isomorphe et isométrique à $L^1(F, \omega) \equiv L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$, on est donc ramené aux deux problèmes suivants:

(i) étudier les représentations topologiquement irréductibles de $L^1(F, \omega)$
(ii) étendre les représentations topologiquement irréductibles de la sous-algèbre $p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p$ à l'algèbre $L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$ toute entière.

Le premier de ces deux problèmes sera abordé au chapitre 3, le second au chapitre 4.

3 Représentations topologiquement simples de $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$

3.1 Abondance de modules irréductibles

Soit $\omega\colon \mathbb{R}^n \to [1, \infty[$ un poids mesurable symétrique défini sur $\mathbb{R}^n$ qui est borné sur toute partie bornée et soit $\mathcal{B} = L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$ l'algèbre de Banach involutive des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ intégrables pour la mesure $\omega(x)dx$, le produit dans cette algèbre étant le produit de convolution de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Supposons donc que ce poids ω soit exponentiel, c. à d. qu'il existe une seminorme non triviale r sur $\mathbb{R}^n$ telle que $r(x) \le \log\omega(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Comme le poids ω est borné par un $C \ge 1$ sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$ nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \ge 1$, et pour tout $s \in \mathbb{N}$ tel que $\|x\| \le s \le 2\|x\|$,

$$\omega(x) = \omega\left(s\left(\frac{x}{s}\right)\right) \le \omega\left(\frac{x}{s}\right)^s \le C^s \le e^{d\|x\|},$$

où $d = 2\log(C)$.

Les caractères de $\mathcal{B} = L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$ sont alors déterminés par les homomorphismes continus

$$\chi_\alpha(x) = e^{-i\alpha(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où α est une forme linéaire complexe de $\mathbb{R}^n$ telle que $|\mathfrak{Im}\alpha(x)| \leq \log\bigl(\omega(x)\bigr)$ pour tout x.

L'algèbre $\mathcal{B}$ possède beaucoup de modules topologiquement simples de dimension infinie. En effet, soit $\mathcal{W}$ un espace de Banach de dimension infinie possédant un opérateur borné u qui n'admet pas de sous-espaces u-invariants fermés non triviaux (voir [Be, Chapter XIV]). Nous prenons une forme linéaire réelle η de $\mathbb{R}^n$ non nulle, telle que

$$|\eta(x)| \leq (1/\|u\|_{\mathrm{op}})r(x); \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors pour $f \in \mathcal{B}$ l'opérateur

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{\eta(x)u}\,dx$$

est borné par

$$\|T(f)\|_{\mathrm{op}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|e^{|\eta(x)|\,\|u\|_{\mathrm{op}}}\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\omega(x)\,dx = \|f\|_\omega.$$

Nous obtenons ainsi une représentation bornée $(T, \mathcal{W})$ sur $\mathcal{W}$. Montrons que cette représentation est topologiquement simple. Comme $\mathcal{B}$ possède une unité approchée bornée, il suffit de montrer que la représentation correspondante

$$T(x) = e^{\eta(x)u} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\bigl(\eta(x)u\bigr)^j}{j!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

du groupe $\mathbb{R}^n$ l'est. Soit $\mathcal{Z}$ un sous-espace T-invariant fermé de $\mathcal{W}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\eta(x) = 1$. Pour tout $z \in \mathcal{Z}$ on a que

$$T(sx)z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(su)^j}{j!}(z) \in \mathcal{Z}; \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

En dérivant en s pour $s = 0$ on trouve que $u(z) \in \mathcal{Z}$. Donc $\mathcal{Z}$ est u-invariant. Comme u n'admet que des sous-espaces fermés invariants triviaux, nous savons que $\mathcal{Z} = \{0\}$ ou que $\mathcal{Z} = \mathcal{W}$ et $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{B}$-module topologiquement simple.

Il existe donc beaucoup de modules topologiquement simples de $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$. La caractérisation de tous ces modules topologiquement simples reste une question ouverte. Par contre, le lemme de Schur dit que les caractères χ_α sont les seuls modules algébriquement simples de $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$, puisque l'algèbre $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$ est commutative.

3.2 Estimation du poids ω

Poguntke a trouvé une estimation du poids ω (voir [Po2]). Pour la décrire, posons $\mathfrak{m}(l) = \mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}$, où l est une forme linéaire de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{k}$ un sous-espace de $\mathfrak{g}(l)$, tel que $\mathfrak{g}(l) = \mathfrak{k} \oplus \bigl(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(l)\bigr)$. Prenons une polarisation $\mathfrak{p}_0$

en $q = l|_{\mathfrak{n}}$, qui est $G(q) = \exp\bigl(\mathfrak{g}(q)\bigr)$-invariante. Déterminons une suite de Jordan-Hölder

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 \supset \mathfrak{n}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{n}_{m+1} = \{0\}$$

de $\mathfrak{n}$ pour l'action de $\mathfrak{m}(l)$. Soit

$$I = \bigl\{\, j \in \{0, \dots, m\}\ ;\ \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{n}_{j+1} \neq \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{n}_j \bigr\}.$$

Écrivons $I = \{j_1, \dots, j_k\}$ et posons $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{n}_{j_i}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Nous pouvons choisir des sous-espaces $\mathfrak{v}_i$, $i = 1, \dots, k$ tels que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{v}_i \oplus \mathfrak{p}_{i+1}$, $i = 1, \dots, k$. Pour tout i la dimension d_i de $\mathfrak{v}_i$ est égale à 1 ou 2. Les $\mathfrak{g}(q)$-modules $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{i+1}$ sont irréductibles. Écrivons $\lambda_i(T) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_{i+1}}(T)$, $T \in \mathfrak{g}(q)$. Poguntke a prouvé que tout caractère χ de l'algèbre $L^1(\mathbb{R}^n, \omega) \simeq p * L^1\bigl(F, L^1(H)/\ker\gamma\bigr) * p$ est de la forme

$$\chi(h) = \int_{\mathbb{R}^n} h(t)\chi(t)\, dt, \quad h \in L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$$

où

$$\chi(t) = \chi_\nu(t) = e^{\nu(T)}, \quad t \simeq T \in \mathbb{R}^n \simeq \exp(\mathfrak{f})$$

et où ν est une forme linéaire complexe sur $\mathfrak{f}$ telle que

$$1/2 \sum_{0}^{k} |\operatorname{tr}(\lambda_i)(T)| \geq \bigl|\Re\mathfrak{e}\bigl(\nu(T)\bigr)\bigr|, \quad T \in \mathfrak{f}. \tag{3.2.1}$$

Comme on a toujours que $|\chi_\nu(h)| \leq \|h\|_\omega$ pour tout $h \in L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$, nous voyons que $\omega(t) \geq |\chi_\nu(t)|$ pour presque tout t. Puisque les relations précédentes doivent être vérifiées pour toute forme linéaire ν telle que (3.2.1), il faut que

$$\omega\bigl(\exp(T)\bigr) \geq e^{1/2 \sum_0^k |\operatorname{tr}(\lambda_i)(T)|}, \quad T \in \mathfrak{f}.$$

Donc on voit que le poids ω est à croissance exponentielle dans au moins une direction de $F = \exp(\mathfrak{f})$ si et seulement si $\lambda_i \neq 0$ pour au moins un i. Rappelons que Boidol a montré dans [Boi] que cette condition est équivalente à la condition suivante: Soit $\mathfrak{m}(l)^k = [\mathfrak{m}(l), \mathfrak{m}(l)^{k-1}]$, $k = 1, 2 \dots$, la suite centrale descendante de $\mathfrak{m}(l)$. Alors un des λ_i au moins est non nul si et seulement si $l\bigl(\mathfrak{m}(l)^\infty\bigr) \neq \{0\}$, où $\mathfrak{m}(l)^\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}(l)^k$.

3.3 Le groupe de Leptin-Poguntke

Terminons par l'exemple du groupe de Leptin-Poguntke, que nous noterons $\mathrm{LP} = \exp(\mathfrak{lp})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{lp}$ de ce groupe possède une base $\{T, X, Y, Z\}$ avec les crochets

$$[T, X] = -X, \quad [T, Y] = Y, \quad [X, Y] = Z.$$

Le radical nilpotent $\mathfrak{n}$ est l'espace engendré par X, Y et Z. Soit $l \in \mathfrak{lp}^*$ la forme linéaire définie par $l(T) = l(X) = l(Y) = 0$, $l(Z) = 2\pi$. Alors $\mathfrak{lp}(l) = \mathrm{vec}(T, Z)$, $\mathfrak{p} =$

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

vec(T, Y, Z) est une polarisation de Vergne en l et la restriction de π_l à $N = \exp(\mathfrak{n})$ est équivalente à $\gamma = \operatorname{ind}_{N\cap P}^{N} \chi_q$. Pour une fonction $f \in \mathcal{S}(N)$ l'opérateur $\pi_q(f)$ est un opérateur à noyau et ce noyau est une fonction de Schwartz f_q en deux variables donnée par

$$f_q(x, u) = \hat{f}^{2,3}\Big(x - u, -\frac{1}{2}(x + u), 1\Big).$$

Ici $\hat{f}^{2,3}$ désigne la transformée de Fourier partielle de f dans les variables 2 et 3. Nous remarquons que

$$\ker\gamma = \Big\{ f \in L^1(N)\ ;\ \int_{\mathbb{R}} f\big(x\exp(tZ)\big)\, e^{-2\pi it}\, dt = 0,\ \text{pour tout } x \in N \Big\}.$$

Dans cet exemple on a $N = H$ et $\gamma = \tau$. Définissons

$$L^1(N, q) = \Big\{ f : N \to \mathbb{C}\ ;\ f \text{ mesurable, } f\big(x\exp(tZ)\big) = e^{2\pi it} f(x)\ ;\ \forall x \in N,$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \|f\|_{L^1(N,q)} = \int_{\mathbb{R}^2} \big| f\big(\exp(xX)\exp(yY)\big)\big|\, dx\, dy < \infty \Big\}.$$

Les espaces $L^1(N)/\ker\gamma$ et $L^1(N, q)$ sont isomorphes et isométriques. Nous pouvons donc les identifier. Par conséquent,

$$L^1(\mathrm{LP})/\big(L^1(\mathrm{LP}) * \ker\gamma\big)^{-} \simeq L^1\big(\mathbb{R}, L^1(N, q)\big).$$

Prenons pour $\lambda \in \mathcal{H}^{\infty}_{\pi_q} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ la fonction de Gauss $\lambda(x) = e^{-\pi x^2/2}$. Nous pouvons donc utiliser la fonction

$$p_\lambda\big(\exp(xX + yY + zZ)\big) = e^{-\pi x^2/4} e^{-\pi y^2} \mu(z)$$

dans $S(N) = S(\mathbb{R}^3)$, où $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\hat{\mu}(1) = 1$. En outre on trouve que

$$\nu\big(\exp(tT)\big)\big(\exp(xX + yY + zZ)\big)$$
$$= \frac{e^{t/2}\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2t} + 1}} e^{-\pi x^2/[2(1+e^{2t})]} e^{-2\pi y^2/[2(1+e^{-2t})]} e^{-i\pi xy(1-e^{-2t})/(e^{-2t}+1)} e^{2\pi iz}$$

dans $L^1(N, q)$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a que

$$\omega(t) = \big\|\nu\big(\exp(tT)\big)\big\|_{L^1(N)/\ker\gamma} = \big\|\nu\big(\exp(tT)\big)\big\|_{L^1(N,q)} = \sqrt{2}\sqrt{e^t + e^{-t}} \simeq e^{|t/2|}.$$

4 Extensions topologiquement simples

4.1 But du chapitre

Aux chapitres 2 et 3 nous avons été amenés à considérer les représentations topologiquement irréductibles de la sous-algèbre $p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p \simeq L^1(F, \omega)$ de l'algèbre $L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$. Il faudra donc pouvoir étendre ces représentations à l'algèbre $L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$ toute entière. L'étude de telles extensions est l'objet du présent chapitre. Mentionnons que notre construction diffère de celle donnée par Fell et Doran [FeDo], étant donné que nos représentations ne sont en général pas des $*$-représentations.

4.2 Sous-modules d'un module topologiquement simple

Hypothèses 4.2.1 Dans la suite $\mathcal{A}$ désignera une algèbre normée et $(a_j)_j$ une unité approchée bornée dans $\mathcal{A}$, à savoir

$$\|a_j\|_{\mathcal{A}} \leq C$$

où C est une constante positive. Soit p un multiplicateur linéaire agissant à gauche et à droite de manière continue sur $\mathcal{A}$:

$$\|pa\|_{\mathcal{A}} \leq K \cdot \|a\|_{\mathcal{A}}$$
$$\|ap\|_{\mathcal{A}} \leq K \cdot \|a\|_{\mathcal{A}}, \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

pour une certaine constante positive K, et

$$(ap)b = a(pb).$$

Alors, vu l'existence d'une unité approchée,

$$p(ab) = (pa)b, \quad (ab)p = a(bp); \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Supposons en plus que

$$p^2 = p, \quad p\mathcal{A}p \not\equiv 0.$$

On en déduit que $(pa_jp)_j$ est une unité approchée bornée dans l'algèbre $p\mathcal{A}p$.

Soit $(T, \mathcal{U})$ un $\mathcal{A}$-module borné non dégénéré, c. à d. tel que $T(\mathcal{A})\mathcal{U}$ soit dense dans $\mathcal{U}$. Cela signifie qu'il existe une constante $C_T > 0$ telle que

$$\|T(a)w\|_{\mathcal{U}} \leq C_T \cdot \|a\|_{\mathcal{A}} \cdot \|w\|_{\mathcal{U}} \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall w \in \mathcal{U}.$$

Exemple 4.2.2 L'algèbre $\mathcal{A} = L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$ étudiée au chapitre 2 et $p = p_\lambda \mod \ker\gamma$ avec $p_\lambda \in L^1(H)$ tel que $\gamma(p_\lambda) = P_{\lambda,\lambda}$ (2.6.1), agissant à gauche et à droite sur $\mathcal{A}$ par convolution, vérifient les hypothèses précédentes.

Lemme 4.2.3 *Soit $(T, \mathcal{U})$ un $\mathcal{A}$-module borné non dégénéré, $\mathcal{U}$ étant un espace de Banach. Alors p agit de manière naturelle sur $\mathcal{U}$. De plus, $T(p)$ ainsi obtenu est un projecteur borné et $T(p)\mathcal{U}$ est fermé dans $\mathcal{U}$. On a*

$$T(p)T(a) = T(pa), \quad T(a)T(p) = T(ap) \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Preuve On définit l'action de p sur $T(\mathcal{A})\mathcal{U}$ par

$$T(p)\big(T(a)u\big) = T(pa)u \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall u \in \mathcal{U}.$$

Vu l'existence d'une unité approchée bornée, cette action est bien définie, continue et peut être prolongée en une action de p sur $\mathcal{U}$ tout entier, puisque $T(\mathcal{A})\mathcal{U}$ est dense dans $\mathcal{U}$ par hypothèse. Pour montrer que $T(p)\mathcal{U}$ est fermé, supposons que

$$T(p)(u_j) \longrightarrow u$$

dans $\mathcal{U}$. Alors

$$T(p)(u_j) = T(p)\big(T(p)(u_j)\big) \longrightarrow T(p)u$$

et $u = T(p)u \in T(p)\mathcal{U}$. ■

Proposition 4.2.4 *Soit $(T, \mathcal{U})$ un $\mathcal{A}$-module topologiquement simple. Si $T(p)\mathcal{U} \not\equiv 0$, alors $\big(T|_{p\mathcal{A}p}, T(p)\mathcal{U}\big)$ est un $(p\mathcal{A}p)$-module topologiquement simple.*

Preuve Comme $(T, \mathcal{U})$ est topologiquement simple, $(T, \mathcal{U})$ est non dégénéré. Supposons $T(p)u \neq 0$ dans $T(p)\mathcal{U}$. Alors $T(\mathcal{A})\big(T(p)u\big) = T(\mathcal{A}p)\big(T(p)u\big)$ est dense dans $\mathcal{U}$ par simplicité de T et $T(p\mathcal{A}p)\big(T(p)u\big) = T(p)\Big(T(\mathcal{A})\big(T(p)u\big)\Big)$ est dense dans $T(p)\mathcal{U}$. ■

Proposition 4.2.5 *Tout $\mathcal{A}$-module topologiquement simple $(T, \mathcal{U})$ avec $T(p)(\mathcal{U}) \not\equiv 0$ peut être identifié à un $\mathcal{A}$-module de la forme $\overline{\mathcal{A}p/M}^{\|\cdot\|_{\mathcal{U}}}$, où*

$$M = M_w = \big\{x \in \mathcal{A}p \; ; \; T(p\mathcal{A}x)w = \{0\}\big\} \quad (0 \neq w \in T(p)\mathcal{U} \text{ fixé})$$

est un idéal à gauche de $\mathcal{A}$ contenu dans $\mathcal{A}p$ et où la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ vérifie

$$\|\cdot\|_{\mathcal{U}} \leq C_T \|\cdot\|_{\mathcal{A}p/M}$$

avec

$$\|\dot{a}\|_{\mathcal{A}p/M} = \inf_{m \in M} \|a + m\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \quad \forall a \in \mathcal{A}p.$$

Preuve Fixons $w = T(p)w \in T(p)\mathcal{U}$ tel que $\|w\|_{\mathcal{U}} = 1$. Posons

$$M = \{a \in \mathcal{A}p \; ; \; T(a)w = 0\}.$$

Donc M est un idéal à gauche fermé de $\mathcal{A}$ contenu dans $\mathcal{A}p$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathcal{A}p &\longrightarrow T(\mathcal{A}p)w \\ a &\longmapsto T(a)w \end{aligned}$$

est une surjection linéaire de noyau M. Donc

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathcal{A}p/M &\longrightarrow T(\mathcal{A}p)w \\ \dot{a} &\longmapsto T(a)w \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

est une bijection linéaire. Définissons $|||\cdot|||_{\mathcal{U}}$ sur $\mathcal{A}p/M$ par

$$|||\dot{a}|||_{\mathcal{U}} = \|T(a)w\|_{\mathcal{U}} \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Comme $T(\mathcal{A}p)w$ est dense dans $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ étant un module topologiquement irréductible, Φ peut être prolongé en une isométrie linéaire entre $\mathcal{U}^{|||} = \overline{\mathcal{A}p/M}^{|||\cdot|||_{\mathcal{U}}}$ et $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}})$. De plus, il existe une constante C_T telle que

$$\begin{aligned} |||\dot{a}|||_{\mathcal{U}} &= \|T(a+m)w\|_{\mathcal{U}} \\ &\leq C_T \cdot \|a+m\|_{\mathcal{A}} \cdot \|w\|_{\mathcal{U}} \\ &= C_T \cdot \|a+m\|_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

quel que soit $m \in M$. Donc

$$|||\dot{a}|||_{\mathcal{U}} \leq C_T \cdot \inf_{m\in M} \|a+m\|_{\mathcal{A}} = C_T \cdot \|\dot{a}\|_{\mathcal{A}p/M} \leq C_T \cdot \|a\|_{\mathcal{A}}.$$

Finalement, l'action de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}p/M$ est donnée par $L(a)\dot{x} = a \cdot \dot{x} = (ax)\dot{}$ et peut être prolongée en une action continue de $\mathcal{A}$ sur $\overline{\mathcal{A}p/M}^{|||\cdot|||_{\mathcal{U}}}$. L'application Φ est alors un isomorphisme de $\mathcal{A}$-modules. Soit ensuite

$$M_0 = \left\{ x \in \mathcal{A}p \,;\, T(p\mathcal{A}x)w = \{0\} \right\}.$$

Nous remarquons que $M \subset M_0$ et que M_0/M est un sous-espace $\mathcal{A}$-invariant de $\mathcal{A}p/M$. Donc $(M_0/M)^- = \{0\}$ dans $\overline{\mathcal{A}p/M}^{|||\cdot|||_{\mathcal{U}}}$. Ainsi $M_0 = M$. ■

Remarque 4.2.6 Dans la proposition précédente, M est entièrement déterminé par le $(p\mathcal{A}p)$-module $T(p)\mathcal{U}$. Afin de déterminer tous les modules topologiquement simples de $\mathcal{A}$, dont $T(p)\mathcal{U}$ est équivalent à un $(p\mathcal{A}p)$-module $(S, \mathcal{W})$ donné, il suffit donc de trouver toutes les normes $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{A}p/M$, dont les restrictions à $p\mathcal{A}p/M$ sont équivalentes à la norme de $\mathcal{W}$ et telles que $\overline{(\mathcal{A}p/M)}^{|||\cdot|||}$ soit un $\mathcal{A}$-module topologiquement simple.

4.3 Norme minimale et normes d'extension

Définition 4.3.1 Soit $(S, \mathcal{W})$ un $(p\mathcal{A}p)$-module topologiquement simple et soit

$$M_w = M = \left\{ x \in \mathcal{A}p \,;\, S(p\mathcal{A}xp)w = \{0\} \right\}$$

où $\mathcal{W} \ni w \neq 0$ a été fixé arbitrairement. Alors M est un idéal fermé à gauche de $\mathcal{A}$ contenu dans $\mathcal{A}p$ et

$$\|\dot{x}\|_{\min} = \sup_{\|a\|_{\mathcal{A}} \leq 1} \|S(pax)w\|_{\mathcal{W}}$$

définit une norme sur $\mathcal{A}p/M$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes de $\|\cdot\|_{\min}$:

$$\|a\dot{x}\|_{\min} \le \|a\|_{\mathcal{A}} \cdot \|\dot{x}\|_{\min},$$
$$\|p\dot{x}\|_{\min} \le K\|\dot{x}\|_{\min},$$
$$\|\dot{x}\|_{\min} \le C'\|x\|_{\mathcal{A}},$$
$$\frac{1}{C''}\|S(px)w\|_{\mathcal{W}} \le \|\dot{px}\|_{\min} \le C''\|S(px)w\|_{\mathcal{W}},$$

pour des constantes positives K, C' et C'', quels que soient $a \in \mathcal{A}$ et $\dot{x} = x + M \in \mathcal{A}p/M$.

Définition 4.3.2 Nous appelons norme d'extension toute norme $\interleave \cdot \interleave$ sur $\mathcal{A}p/M$ qui vérifie

$$\interleave a \cdot \dot{x} \interleave \le C_{\interleave} \|a\|_{\mathcal{A}} \interleave \dot{x} \interleave,$$

pour une certaine constante positive $C_{\interleave}$, quels que soient $\dot{x} = x+M \in \mathcal{A}p/M$, $a \in \mathcal{A}$ et telle que

$$\interleave \cdot \interleave_{|p\mathcal{A}p/M} \simeq \|S(\cdot)w\|_{\mathcal{W}}.$$

Exemple La norme $\|\cdot\|_{\min}$ est évidemment une norme d'extension d'après les inégalités dans (4.3.1).

Proposition 4.3.3 *Soit $\interleave \cdot \interleave$ une norme d'extension sur $\mathcal{A}p/M$. Alors il existe une constante positive $C' = C'_{\interleave}$ telle que*

$$\|\dot{x}\|_{\min} \le C'\interleave \dot{x} \interleave, \quad \interleave p\dot{x} \interleave \le C' \interleave \dot{x} \interleave,$$
$$\interleave \dot{x} \interleave \le C'\|\dot{x}\|_{\mathcal{A}p/M} \le C'\|x\|_{\mathcal{A}} \quad \forall \dot{x} = x + M \in \mathcal{A}p/M.$$

Preuve D'après notre hypothèse sur $\interleave \cdot \interleave$, il existe une constante D positive telle que

$$\frac{1}{D}\interleave b + M \interleave \le \|S(b)w\|_{\mathcal{W}} \le D\interleave b + M \interleave, \quad \forall b \in p\mathcal{A}p.$$

Donc pour tout $\dot{x} = x + M \in \mathcal{A}p/M$, pour tout $m \in M$,

$$\begin{aligned}\|\dot{x}\|_{\min} &= \sup_{\|a\|_{\mathcal{A}} \le 1} \left\| S\big(pa(x+m)\big)\, w \right\|_{\mathcal{W}} \\ &\le D \sup_{\|a\|_{\mathcal{A}} \le 1} \interleave pa(x+M) \interleave \le DC_{\interleave} K \interleave x + M \interleave.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le théorème de factorisation [BoDu], nous avons que $\mathcal{A}p = \mathcal{A}p \cdot p\mathcal{A}p$ et il existe, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $x \in \mathcal{A}p$, un $x_1 \in \mathcal{A}p$ tel que $\|x_1 - x\|_{\mathcal{A}} \le \epsilon$ et un $b \in p\mathcal{A}p$ tel que $\|b\|_{\mathcal{A}} \le CK^2$ et tel que $x = x_1 \cdot b$. Donc

$$\begin{aligned}\interleave \dot{x} \interleave &= \interleave x_1 \cdot (b + M) \interleave \le C_{\interleave} \|x_1\|_{\mathcal{A}} \cdot \interleave b + M \interleave \\ &\le DC_{\interleave} \|x_1\|_{\mathcal{A}} \|S(b)w\|_{\mathcal{W}} \le CK^2 DC_{\interleave} C_S \|w\|_{\mathcal{W}} (\|x\|_{\mathcal{A}} + \epsilon).\end{aligned}$$

Finalement pour ϵ tendant vers 0 et en choisissant $C' = C'_{\|}$ suffisamment grand, on trouve que

$$\|\dot{x}\| \leq C' \|x\|_{\mathcal{A}},$$
$$\|\dot{x}\|_{\min} \leq C' \|\dot{x}\|$$

et

$$\|p\dot{x}\| = \lim_j \|pa_j\dot{x}\| \leq C_{\|} \sup_j \|pa_j\|_{\mathcal{A}} \|\dot{x}\| \leq C_{\|} KC \|\dot{x}\| \leq C' \|\dot{x}\|. \qquad \blacksquare$$

Définition 4.3.4 Soit $\|\cdot\|$ une norme d'extension sur Ap/M. Nous notons $\mathcal{U}^{\|}$ le complété de $\mathcal{A}p/M$ pour la norme $\|\cdot\|$. Nous écrivons $(L, \mathcal{U}^{\|})$ pour le module de $\mathcal{A}$ obtenu en étendant par continuité la multiplication à gauche ainsi que l'action de p de $\mathcal{A}p/M$ à $\overline{(\mathcal{A}p/M)}^{\|\cdot\|}$.

4.4 Normes t.s.

Proposition 4.4.1 *Soit $\|\cdot\|$ une norme d'extension sur $\mathcal{A}p/M$. Le module $(L, \mathcal{U}^{\|})$ est cyclique et le $(p\mathcal{A}p)$-module $\big(L, L(p)\mathcal{U}^{\|}\big) = \big(L, \overline{(p\mathcal{A}p/M)}^{\|}\big)$ est isomorphe au module $(S, \mathcal{W})$. De plus, on peut choisir le vecteur cyclique de $(L, \mathcal{U}^{\|})$ dans $L(p)\mathcal{U}^{\|}$.*

Preuve L'application

$$\Phi \colon p\mathcal{A}p/M \to \mathcal{W}, \quad \Phi(b+M) = S(b)w,$$

est injective, car

$$\mathcal{W}_0 = \big\{ b \in p\mathcal{A}p \,;\, S(p\mathcal{A}pb)w = \{0\}\big\} = \{b \in p\mathcal{A}p \,;\, S(b)w = 0\} = M \cap p\mathcal{A}p.$$

En outre Φ est $(p\mathcal{A}p)$-équivariante. Comme la norme $\|\cdot\|$ sur $p\mathcal{A}p/M$ est équivalente à la norme $\|S(\cdot)w\|_{\mathcal{W}}$, l'application Φ se prolonge en un isomorphisme des $(p\mathcal{A}p)$-modules $\mathcal{W}^{\|} = \overline{(p\mathcal{A}p/M)}^{\|} \subset \mathcal{U}^{\|}$ et $\mathcal{W}$. D'autre part la multiplication à gauche avec p est continue sur $\mathcal{A}p/M$ pour la norme $\|\cdot\|$. Donc $L(p)$ est un projecteur bien défini et borné sur $\mathcal{U}^{\|}$. En outre il est facile de voir que $L(p)\mathcal{U}^{\|}$ est l'adhérence de $p\mathcal{A}p/M$ dans $\mathcal{U}^{\|}$.

Montrons que $\mathcal{U}^{\|}$ est cyclique. Soit $\xi \in \mathcal{U}^{\|}$ et soit $\epsilon > 0$. Il existe $\dot{x} = x + M \in \mathcal{A}p/M$ tel que $\|\xi - \dot{x}\| < \epsilon$.

D'après le théorème de factorisation [BoDu], nous avons que $\mathcal{A}p = \mathcal{A} \cdot p\mathcal{A}p$, donc

$$\mathcal{A}p/M = L(\mathcal{A})(p\mathcal{A}p)/M.$$

Ainsi il existe $a \in \mathcal{A}$ et $b \in p\mathcal{A}p$, tel que $\dot{x} = L(a)\dot{b}$. Prenons l'élément $\omega \in L(p)\mathcal{U}^{\|}$, tel que $\Phi(\omega) = w$. Alors $\Phi\big(L(b)\omega\big) = S(b)w$ et ainsi nous voyons que

$L(b)\omega = b + M$. Donc $L(ab)\omega = \dot{x}$ et $|||\xi - L(ab)\omega||| < \epsilon$. Ainsi $(L, \mathcal{U}^{|||})$ est cyclique. ■

Remarque La proposition (4.3.3) implique que pour toute norme d'extension $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{A}p/M$ il existe une application linéaire continue $i_{\mathcal{U}^{|||}}\colon \mathcal{U}^{|||} \to \mathcal{U}^{\min} = \mathcal{U}^{\|\cdot\|_{\min}}$, qui est l'identité sur $\mathcal{A}p/M$. D'où la définition suivante.

Définition 4.4.2 Nous appelons *norme d'extension t.s. (topologiquement simple)* toute norme $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{A}p/M$, telle que l'application $i_{\mathcal{U}^{|||}}$ de la remarque précédente soit injective.

Proposition 4.4.3 *Le noyau $\mathcal{N}$ de $i_{\mathcal{U}^{|||}}$ est égal à l'ensemble de tous les $\xi \in \mathcal{U}^{|||}$, tels que $L(pc)\xi = 0$ pour tout $c \in \mathcal{A}$.*

Preuve Soit $\xi \in \mathcal{N}$ et $c \in \mathcal{A}$. Alors, comme $i_{\mathcal{U}^{|||}}$ est $\mathcal{A}$-équivariant, nous avons que

$$i_{\mathcal{U}^{|||}}\big(L(pc)(\xi)\big) = L(pc)(i_{\mathcal{U}^{|||}}\xi) = 0.$$

Puisque $|||\cdot||| \cong \|\cdot\|_{\min}$ sur $p\mathcal{A}p/M$, $i_{\mathcal{U}^{|||}}$ est injective sur $L(p)\mathcal{U}^{|||} = \overline{p\mathcal{A}p/M}^{|||} \simeq \mathcal{W}$ et $L(pc)\xi = 0$.

Réciproquement, si $L(pc)\xi = 0$ pour tout c, alors $i_{\mathcal{U}^{|||}}\big(L(pc)\xi\big) = 0$ et ainsi

$$\sup_{\|c\|_{\mathcal{A}}\le 1} \|L(pc)(i_{\mathcal{U}^{|||}}\xi)\|_{\min} = 0.$$

Montrons que

$$\sup_{\|c\|_{\mathcal{A}}\le 1} \|L(pc)\eta\|_{\min} \ge \frac{1}{C}\|\eta\|_{\min} \tag{4.4.3.1}$$

pour tout $\eta \in \mathcal{U}^{\min}$. En effet, pour $x \in \mathcal{A}$, nous avons que

$$\begin{aligned}\sup_{\|c\|_{\mathcal{A}}\le 1} \|L(pc)\dot{x}\|_{\min} &= \sup_{\|c\|_{\mathcal{A}}\le 1}\ \sup_{\|d\|_{\mathcal{A}}\le 1} \|S(pdpcx)w\|_{\mathcal{W}}\\ &\ge \frac{1}{C}\lim_{j}\ \sup_{\|c\|_{\mathcal{A}}\le 1} \|S(pa_jpcx)w\|_{\mathcal{W}}\\ &= \frac{1}{C}\sup_{\|c\|_{\mathcal{A}}\le 1} \|S(pcx)w\|_{\mathcal{W}} = \frac{1}{C}\|\dot{x}\|_{\min}.\end{aligned}$$

D'autre part nous avons d'après (4.3.1) pour tout $\eta \in \mathcal{U}^{\min}$ que

$$\sup_{\|c\|_{\mathcal{A}}\le 1} \|L(pc)\eta\|_{\min} \le K\|\eta\|_{\min}.$$

Ainsi l'inégalité (4.4.3.1) est valable pour tout η dans $\mathcal{U}^{\min}$ et donc si $\xi \in \mathcal{U}^{|||}$ vérifie que $L(pc)\xi = 0$ pour tout c, alors $\|i_{\mathcal{U}^{|||}}(\xi)\|_{\min} = 0$ et $\xi \in \mathcal{N}$. ■

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

***4.4.4* (Exemples de normes d'extension t.s.)**

a) La norme $\|\cdot\|_{\min}$ sur $\mathcal{U}^{\min}$ est évidemment t.s.
b) Supposons que $\mathcal{A}p\mathcal{A}$ soit dense dans $\mathcal{A}$. Alors toute norme d'extension $\|\!|\cdot|\!\|$ est une norme d'extension t.s.

En effet, si pour un $\xi \in \mathcal{U}^{|\!|\!|}$ on a que $\|i_{\mathcal{U}^{|\!|\!|}}\xi\|_{\min} = 0$, c. à d. que $L(pa)\xi = 0$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ d'après la proposition précédente, alors $\{0\} = \big(L(\mathcal{A})L(p\mathcal{A})\xi\big)^{-} = \big(L(\mathcal{A})\xi\big)^{-}$ et donc $\xi = 0$.

Une telle situation arrive pour l'algèbre $L^1(G)$ si la G-orbite ${}^G\tau \subset \hat{N}$ est fermée. En effet, soient $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}$ comme dans (2.4.2). Cet idéal $\mathcal{J}_0$ est minimal modulo $\ker\gamma$ et donc $\mathcal{J}_0 = L^1(H) * p_\lambda * L^1(H) + \ker\gamma$. Ainsi, d'après (2.4.3) et [HaLu] nous avons que

$$\mathcal{J} = (L^1(H) * p_\lambda * L^1(H) + \ker\gamma)^- = (L^1(H) * \mathcal{I})^-,$$

où $\mathcal{I}$ est un idéal fermé G-invariant de $L^1(N)$, car il en est ainsi de $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}$. Puisque $\ker({}^G\tau) \subset \mathcal{I}$ et que $\mathrm{Ad}^*(G)\tau = {}^G\tau$ est fermé, l'enveloppe de $\mathcal{I}$ est contenue dans ${}^G\tau$. Comme, $\mathcal{J} \neq \ker\gamma$ et comme ${}^G\tau$ est fermé dans $\hat{N}$, il faut que l'enveloppe de $\mathcal{I}$ soit vide, c. à d. que $\mathcal{I} = L^1(N)$ d'après la propriété de Wiener de $L^1(N)$ [Le], [Mo2]. Ainsi

$$(L^1(H) * p_\lambda * L^1(H) + \ker\gamma)^- = (L^1(H) * L^1(N))^- = L^1(H).$$

Donc pour $\mathcal{A} = L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$, $\mathcal{A}p\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{A}$ et toute norme d'extension est une norme t.s.

Proposition 4.4.5 *Soit $\|\!|\cdot|\!\|$ une norme d'extension sur $\mathcal{A}p/M$. Le $\mathcal{A}$-module $(L, \mathcal{U}^{|\!|\!|})$ est topologiquement simple si et seulement si $\|\!|\cdot|\!\|$ est t.s.*

Preuve Si $\|\!|\cdot|\!\|$ n'est pas t.s., alors le sous-espace fermé $L(\mathcal{A})$-invariant

$$\mathcal{N} = \big\{\xi \in \mathcal{U}^{|\!|\!|}\ ;\ L(p\mathcal{A})\xi = \{0\}\big\}$$

n'est pas réduit à $\{0\}$, d'après (4.4.3). Donc $\mathcal{U}^{|\!|\!|}$ n'est pas topologiquement simple.

Supposons $\|\!|\cdot|\!\|$ t.s. Montrons que $(L, \mathcal{U}^{|\!|\!|})$ est topologiquement simple. Soient $\xi, \eta \in \mathcal{U}^{|\!|\!|}$, $\eta \neq 0$. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\mathcal{U}^{|\!|\!|}$ possède un vecteur cyclique ω contenu dans $L(p)\mathcal{U}^{|\!|\!|} = \mathcal{W}^{|\!|\!|}$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\|\!|\xi - L(a)\omega|\!\| < \epsilon$. Le vecteur η étant non nul et la norme $\|\!|\cdot|\!\|$ étant t.s., il existe $c \in \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{W}^{|\!|\!|} \ni L(pc)\eta \neq 0$. Le $(p\mathcal{A}p)$−module $\mathcal{W}^{|\!|\!|}$ est topologiquement simple. Il existe donc $b \in p\mathcal{A}p$ tel que $\|\!|L(b)L(pc)\eta - \omega|\!\| < \frac{\epsilon}{C_{|\!|\!|}\|a\|_{\mathcal{A}}+1}$. Soit $d = abpc \in \mathcal{A}$. Alors

$$\begin{aligned}\|\!|L(d)\eta - \xi|\!\| &\leq \|\!|\xi - L(a)\omega|\!\| + \|\!|L(a)\omega - L(d)\eta|\!\| \\ &\leq \epsilon + C_{|\!|\!|}\|a\|_{\mathcal{A}}\,\|\!|\omega - L(bpc)\eta|\!\| < 2\epsilon.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{U}^{|\!|\!|}$ est topologiquement simple. ■

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

Remarque 4.4.6 Soit $\|\!| \cdot |\!\|$ une norme d'extension sur $\mathcal{A}p/M$. Supposons à présent que le sous-espace fermé

$$\mathcal{N} = \{\xi \in \mathcal{U}^{\|\!|} \ ; \|i_{\mathcal{U}^{\|\!|}}\xi\|_{\min} = 0\}$$

est différent de 0. Alors sur l'espace quotient

$$\mathcal{V}^{\|\!|} = \mathcal{U}^{\|\!|}/\mathcal{N}$$

la norme quotient $\|\!|\xi|\!\|' = \inf_{\eta\in\mathcal{N}} \|\!|\xi + \eta|\!\|$ devient une norme t.s. En effet, l'application $i_{\mathcal{V}^{\|\!|}}$ appliquée à $\mathcal{V}^{\|\!|}$ est injective par construction et on vérifie aisément que les propriétés (4.3.2) restent valables pour la norme $\|\!| \cdot |\!\|'$.

Remarque 4.4.7 Les extensions topologiquement simples du $(p\mathcal{A}p)$-module $(S, \mathcal{W})$ peuvent donc toutes se réaliser comme des sous-modules de Banach $\mathcal{U}^{\|\!|} = \overline{\mathcal{A}p/M}^{\|\!|}$ du module universel $(L, \mathcal{U}^{\min})$.

En effet, l'application canonique

$$(\mathcal{A}p/M, \|\!| \cdot |\!\|) \to (\mathcal{A}p/M, \|\cdot\|_{\min})$$

est continue et $\mathcal{A}$-équivariante et se prolonge en un entrelacement injectif de $\mathcal{U}^{\|\!|}$ sur un sous-espace dense de $\mathcal{U}^{\min}$, qui contient $\mathcal{A}p/M$.

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les représentations topologiquement irréductibles, c. à d. les modules topologiquement simples, de $L^1(G)$. Rappelons d'abord les définitions suivantes:

Définition 4.4.8

a) Les $\mathcal{A}$-modules de Banach $(T, \mathcal{U})$ et $(T, \mathcal{U}')$ sont équivalents s'il existe un opérateur d'entrelacement borné bijectif $u \colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$.
b) Notons par $\mathcal{A}^{\hat{}\,\mathrm{top}}$ l'ensemble des classes d'équivalence des modules topologiquement simples de l'algèbre de Banach $\mathcal{A}$.

Dans ce qui précède nous venons de démontrer le théorème suivant:

Théorème 4.4.9 *Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel, connexe, simplement connexe. Tout $T \in L^1(G)^{\hat{}\,\mathrm{top}}$ est caractérisé univoquement par un triplet $({}^G q, S, \|\!| \cdot |\!\|)$ où*

$$q \in \mathfrak{n}^* \textit{ et } {}^G q \textit{ est l'orbite de } q \textit{ dans } \mathfrak{n}^*$$

$$S \in L^1(\mathbb{R}^n, \omega)^{\hat{}\,\mathrm{top}}$$

$$\|\!| \cdot |\!\| \textit{ est une norme d'extension t.s.}$$

L'orbite ${}^G q$ est obtenue de la manière suivante: $q \in \mathfrak{n}^*$ est tel que $\ker_{L^1(N)} T = \ker({}^G\tau)$ où $\tau \in \hat{N}$ est l'irréductible associée à q. L'algèbre $L^1(\mathbb{R}^n, \omega)$, ω étant un poids à croissance exponentielle ou polynomiale, s'obtient par:

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

Il existe un idempotent p agissant sur l'algèbre

$$L^1(G)/\big(L^1(G) * \ker({}^G\tau)\big)^- = L^1(G)/\big(L^1(G) * \ker_{L^1(N)} T\big)^-$$

tel que

$$p * \Big(L^1(G)/\big(L^1(G) * \ker_{L^1(N)} T\big)^-\Big) * p \cong L^1(\mathbb{R}^n, \omega) \cong L^1\Big(G(l)/\big(G(l) \cap N\big), \omega\Big),$$

avec $l \in \mathfrak{g}^*$, tel que $l|_{\mathfrak{n}} = q$. L'obtention de p fait appel à la construction d'un sous-groupe $H \supset N$ et d'une représentation unitaire $\gamma \in \hat{H}$ telle que $\ker \gamma = \ker_{L^1(H)} T$*. La construction précédente est indépendante du choix de l'idempotent p, le sous-groupe H étant fixé une fois pour toutes. La norme d'extension $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ permet de construire les $\big[L^1(G)/\big(L^1(G) * \ker_{L^1(N)} T\big)^-\big]$-modules topologiquement simples à partir d'un $\big[p * L^1(G)/\big(L^1(G) * \ker_{L^1(N)} T\big)^- * p\big]$-module topologiquement simple $(S, \mathcal{W})$ comme sous-modules d'un module universel $\mathcal{U}^{\min}$.*

Ceci détermine toutes les représentations topologiquement irréductibles de noyau donné dans $L^1(N)$. De plus,

$$T = ({}^G q, S, |\!|\!| \cdot |\!|\!|) \quad \textit{et} \quad T_1 = ({}^G q_1, S_1, |\!|\!| \cdot |\!|\!|_1)$$

sont équivalents si et seulement si ${}^G q = {}^G q_1$, S et S_1 sont des représentations équivalentes, $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ et $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_1$ sont des normes d'extension équivalentes.

4.5 Relation entre les noyaux

4.5.1 Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel, connexe, simplement connexe. La relation suivante entre le noyau d'une représentation topologiquement irréductible de $L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$ et entre le noyau de sa restriction à $p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p$ est obtenue facilement. Afin de simplifier les notations, identifions $L^1(G)$ et $L^1\big(F, L^1(H)\big)$, ainsi que la représentation $(T, \mathcal{U})$ de $L^1(G)$ et la représentation correspondante de $L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$.

Proposition 4.5.2 *Soit $(T, \mathcal{U})$ une représentation topologiquement irréductible de $L^1(G)$. Soit p l'idempotent construit précédemment et agissant sur l'algèbre $L^1(G)/\big(L^1(G) * \ker_{L^1(N)} T\big)^-$. Soit $\mathcal{W} = T(p)\mathcal{U}$ et $S = T|_{\mathcal{W}}$. Alors*

$$\ker T = \{f \in L^1(G)\ ;\ S(p * u * f * v * p) = 0, \forall u, v \in L^1(G)\}$$

et $\ker T$ *est entièrement déterminé par la restriction S de T.*

Preuve Il suffit d'appliquer l'irréductibilité de $(T, \mathcal{U})$. ■

Corollaire 4.5.3 *Soient $(T, \mathcal{U})$ et $(T', \mathcal{U}')$ deux représentations topologiquement irréductibles de $L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$ et soient $(S, \mathcal{W})$ et $(S', \mathcal{W}')$ avec $\mathcal{W} = T(p)\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}' = T(p)\mathcal{U}'$ les représentations topologiquement irréductibles de $p * L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big) * p$ obtenues par restriction. Alors*

$$\ker S = \ker S' \iff \ker T = \ker T'.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2001-038-0 Published online by Cambridge University Press

Corollaire 4.5.4 *Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel non symétrique. Alors il existe beaucoup d'idéaux premiers, non primitifs.*

Preuve Soit T une représentation topologiquement irréductible de $L^1(G)$, construite comme expliqué dans ce travail, associée à un poids ω exponentiel. Un tel poids existe puisque G n'est pas symétrique [Po2]. Soit $\mathcal{A} = L^1\big(F, L^1(H)/\ker\gamma\big)$. Si $T|_{p\mathcal{A}p}$ n'est pas un caractère, son noyau n'est pas de codimension 1. De tels T existent, puisque ω est exponentiel (3.1). D'après [Po2] cependant, le noyau de la restriction d'une représentation algébriquement irréductible T' à $p\mathcal{A}p$ est de codimension 1. Donc, par (4.5.3), $\ker T \neq \ker T'$. Ainsi $\ker T$ est un idéal premier non primitif. ■

Références

[Be] B. Beauzamy, *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces.* North-Holland Mathematical Library **42**, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[Ber] P. Bernat, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **82**(1965), 37–99.

[BerCo] P. Bernat, N. Conze, M. Duflo, M. Lévy-Nahas, M. Rais, P. Renouard et M. Vergne, *Représentations des groupes de Lie résolubles.* Dunod, Paris, 1972.

[BoDu] F. F. Bonsall et J. Duncan, *Complete Normed Algebras.* Springer, New York-Heidelberg, 1973.

[Boi] J. Boidol, **-Regularity of Exponential Lie Groups.* Invent. Math. **56**(1980), 231–238.

[BoiLe] J. Boidol, H. Leptin, J. Schürman et D. Vahle, *Räume primitiver Ideale von Gruppenalgebren.* Math. Ann. **236**(1978), 1–13.

[CorGr] L. Corwin et F. P. Greenleaf, *Representations of nilpotent Lie groups and their applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Di1] J. Dixmier, *Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **6**(1960), 305–317.

[Di2] ———, *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthiers-Villard, Paris, 1969.

[FeDo] J. M. G. Fell et R. S. Doran, *Representations of $*$-Algebras, Locally Compact Groups and Banach $*$-Algebraic Bundles.* Vol. **2**, Academic Press, Boston, 1988.

[HaLu] W. Hauenschild et J. Ludwig, *The injection and the projection theorem for spectral sets.* Monatsh. Math. **92**(1981), 167–177.

[Hu] A. Hulanicki, *A functional calculus for Rockland operators on nilpotent Lie groups.* Studia Math. **78**(1984), 253–266.

[Ki] A. A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups.* Uspekhi Mat. Nauk. **17**(1962), 53–104.

[Le] H. Leptin, *Ideal Theory in Group Algebras of Locally Compact Groups.* Invent. Math. **31**(1976), 259–278.

[LeLu] H. Leptin et J. Ludwig, *Unitary Representation Theory of Exponential Lie Groups.* De Gruyter Expositions in Mathematics **18**, De Gruyter, Berlin, 1994.

[Lu1] J. Ludwig, *Polynomial growth and ideals in group algebras.* Manuscr. Math. **30**(1980), 215–221.

[Lu2] ———, *Irreducible representations of exponential solvable Lie groups and operators with smooth kernels.* J. Reine Angew. Math. **339**(1983), 1–26.

[Lu3] ———, *On Primary Ideals in the Group Algebra of a Nilpotent Lie Group.* Math. Ann. **262**(1983), 287–304.

[Lu4] ———, *Minimal C^*-dense ideals and algebraically irreducible representations of the Schwartz-algebra of a nilpotent Lie group.* Harmonic Analysis (Luxembourg, 1987), Springer Lecture Notes in Math. **1359**(1988), 209–217.

[LuMo1] J. Ludwig et C. Molitor-Braun, *L'algèbre de Schwartz d'un groupe de Lie nilpotent.* Travaux mathématiques **VII**, Sém. Math. Luxembourg, 1995, 25–67.

[LuMo2] ———, *Exponential actions, orbits and their kernels.* Bull. Austral. Math. Soc. **57**(1998), 497–513.

[LuRoSa] J. Ludwig, G. Rosenbaum et J. Samuel, *The elements of bounded trace in the C^*-algebra of a nilpotent Lie group.* Invent. Math. **83**(1986), 167–190.

[Mo1] C. Molitor-Braun, *Actions exponentielles et idéaux premiers.* Thèse, Metz, 1996.

[Mo2] ———, *Exponential actions and maximal $\mathcal{D}$-invariant ideals.* Manuscr. Math. **96**(1998), 23–35.
[Pa] T. W. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of $*$-Algebras.* Vol. **I**, Algebras and Banach Algebras, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. **49**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
[Pi] J. P. Pier, *Amenable Locally Compact Groups.* J. Wiley and Sons, New York, 1984.
[Po1] D. Poguntke, *Operators of Finite Rank in Unitary Representations of Exponential Lie Groups.* Math. Ann. **259**(1982), 371–383.
[Po2] ———, *Algebraically irreducible representations of L^1-algebras of exponential Lie groups.* Duke Math. J. (4) **50**(1983), 1077–1106.
[Pu] L. Pukanszky, *On the Unitary Representations of Exponential Groups.* J. Funct. Anal. **2**(1968), 73–113.
[So] W. Soergel, *An irreducible not admissible Banach representation of* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Proc. Amer. Math. Soc. (4) **104**(1988), 1322–1324.

Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile de Saulcy
F-57045 Metz cedex 1
France
courriel: ludwig@poncelet.sciences.univ-metz.fr

Séminaire de mathématique
Centre Universitaire de Luxembourg
162A, Avenue de la Faïencerie
L-1511 Luxembourg
Luxembourg
courriel: molitor@cu.lu