COMPOSITIO MATHEMATICA

Stabilité de l'holonomie sur les variétés quasi-projectives

Daniel Caro

Compositio Math. **147** (2011), 1772–1792.

doi:10.1112/S0010437X11005574

FOUNDATION COMPOSITIO MATHEMATICA

The London Mathematical Society

Compositio Math. 147 (2011) 1772–1792
doi:10.1112/S0010437X11005574

Stabilité de l'holonomie sur les variétés quasi-projectives

Daniel Caro

Abstract

Let $\mathcal{V}$ be a mixed characteristic complete discrete valuation ring with perfect residue field k. We solve Berthelot's conjectures on the stability of the holonomicity over smooth projective formal $\mathcal{V}$-schemes. Then we build a category of F-complexes of arithmetic $\mathcal{D}$-modules over quasi-projective k-varieties with bounded and holonomic cohomology. We obtain its stability under Grothendieck's six operations.

Introduction

Afin d'obtenir une cohomologie p-adique sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique p stable par les six opérations cohomologiques de Grothendieck (i.e., image directe, image directe extraordinaire, image inverse, image inverse extraordinaire, produit tensoriel, foncteur dual), Berthelot a construit une version arithmétique de la théorie des modules sur le faisceau des opérateurs différentiels (voir l'introduction de [Ber02] puis dans l'ordre [Ber90, Ber96, Ber00]). Rappelons quelques éléments de sa théorie : soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, de corps résiduel k supposé parfait et de corps de fraction K, $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse et P sa fibre spéciale. Dans la version arithmétique de Berthelot, le faisceau des opérateurs différentiels usuels $\mathcal{D}$ est remplacé par $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$. Plus précisément, il construit le faisceau sur $\mathcal{P}$ des opérateurs différentiels de niveau fini et d'ordre infini noté $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$; ce dernier correspondant à la tensorisation par $\mathbb{Q}$ (indiqué par l'indice $\mathbb{Q}$) du complété faible p-adique (indiqué par le symbole '†' du faisceau classique $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ des opérateurs différentiels sur $\mathcal{P}$. On dispose de plus de la notion de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module, i.e., de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}$ muni d'une structure de Frobenius, i.e., d'un isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-linéaire de la forme $F^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ avec F^* désignant l'image inverse par l'endomorphisme (ou une puissance) du Frobenius absolu $P \to P$. Il a aussi obtenu une notion de F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module holonome en s'inspirant du cas classique : un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module cohérent est holonome s'il est nul ou si la dimension de sa variété caractéristique est égale à la dimension de P. Il conjecture surtout que les F-complexes de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-modules à cohomologie bornée et holonomes sont stables par opérations cohomologiques (de manière analogue à ce qui se passe dans la théorie classique). Malgré la résolution de cette stabilité dans quelques cas importants (e.g., image inverse extraordinaire par un morphisme lisse, produit tensoriel externe, foncteur dual), voici ce qu'il restait à établir : la stabilité de l'holonomie par produit tensoriel interne, image directe et image inverse extraordinaire (voir les

Received 5 May 2010, accepted in final form 15 March 2011, published online 24 August 2011.
2010 Mathematics Subject Classification 14F10, 14F30.
Keywords: p-adic cohomologies, arithmetic $\mathcal{D}$-modules, holonomicity, overconvergent isocrystals, stability.
L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

conjectures [Ber02, 6.3.6]). Pour bénéficier de coefficients p-adiques stables, une autre approche a été de définir les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes [Car09b]. D'après Caro et Tsuzuki (voir [CT08]), les F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes sont stables par les six opérations cohomologiques de Grothendieck. De plus, les F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes sont holonomes. L'égalité entre ces deux notions équivaut d'ailleurs à la validation des conjectures ci-dessus sur la stabilité de l'holonomie (voir [Car09b, 8.2]). Ce travail s'attaque à ce problème dans le cas où la k-variété (où vivent véritablement les complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques) peut se plonger dans un $\mathcal{V}$-schéma formel projectif et lisse.

Abordons à présent le contenu de ce travail. Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel projectif et lisse, H_0 un diviseur de P_0, $\mathfrak{A}$ l'ouvert de $\mathcal{P}$ complémentaire de H_0.

Dans la première partie de ce travail, on suppose que le diviseur H_0 est ample. En fait, comme le diviseur est ample, il ne coûte pas grand chose de supposer que $\mathcal{P}$ est le complété p-adique de l'espace projectif sur $\mathcal{V}$ (d'une certaine dimension) et H_0 est un hyperplan défini par une des coordonnées canoniques. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent. Le résultat principal de ce premier chapitre est que, quitte à rajouter des singularités surconvergentes, i.e., à augmenter H_0, si $\mathcal{E}$ est associé en dehors de H_0 à un isocristal convergent alors $\mathcal{E}$ est associé à un isocristal surconvergent (voir 1.3.7 et la preuve de 2.1.1). Remarquons que, pour donner un sens à ce résultat, la structure de Frobenius est superflue d'après [Car11] (qui étend le cas où le support de $\mathcal{E}$ est lisse traité dans [Car09a]). Cela nous a permis d'améliorer et de simplifier (par rapport à une version antérieure prépubliée de ce travail qui n'utilisait pas [Car11] car écrite avant) la preuve de ce résultat 1.3.7 car on ne doit plus se préoccuper des compatibilités à Frobenius dans les constructions. Le premier ingrédient technique permettant d'éviter le problème de la non lissité du support de $\mathcal{E}$ (la stabilité de la surholonomie nous permettait de nous ramener au cas lisse par descente via le théorème de désingularisation de de Jong ; cette méthode ne fonctionne plus a priori en raison du manque de stabilité de la cohérence) est l'utilisation des opérateurs différentiels 'à la Mebkhout–Narváez-Macarro' (voir [MN90]) et le théorème de comparaison de Noot-Huyghe (qui n'est validé a priori que pour les $\mathcal{V}$-schémas formels projectifs lisses). C'est l'unique raison technique pour laquelle nous nous sommes restreint aux $\mathcal{V}$-schémas formels projectifs et lisses. Le second ingrédient technique dû à Kedlaya (voir [Ked05]) qui nous permet de nous ramener au cas déjà traité où le support de $\mathcal{E}$ est lisse (voir [Car09a]) est le fait que tout point fermé de $\mathcal{P}$ possède un voisinage ouvert qui soit fini et étale sur un espace affine (ce qui nous ramènera au cas où il existe une compactification lisse).

Dans le second chapitre, on ne suppose plus le diviseur H_0 ample. Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}})$. Nous y prouvons (voir 2.1.1) que si $\mathcal{E}|\mathfrak{A} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{A},\mathbb{Q}})$ alors $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$, i.e., $\mathcal{E}$ est un F-complexe surholonome s'il est holonome en dehors des singularités surconvergentes. Ainsi, dans le cas des $\mathcal{V}$-schémas formels projectifs et lisses, cela répond positivement à la conjecture la plus forte de Berthelot de [Ber02, 6.3.6]. Donnons une esquisse de sa preuve : on se ramène via des triangles distingués de Mayer–Vietoris au cas où le diviseur est ample. L'idée ensuite est de procéder par récurrence sur la dimension du support noté X de $\mathcal{E}$. On peut en outre supposer que $\mathcal{E}$ est un module. Or, d'après la première partie, il existe un ouvert affine et lisse Y (dense dans une composante irréductible) de X tel que $\mathcal{E}$ soit associé à un isocristal surconvergent sur Y. Comme les F-isocristaux surconvergents sur les k-variétés lisses sont surholonomes (voir [CT08]), nous concluons la récurrence. Remarquons de plus que, comme il existe des isocristaux surconvergents sur des k-variétés lisses qui ne sont pas cohérents ni a fortiori surholonomes, le théorème 2.1.1

énoncé ci-dessus est faux sans structure de Frobenius (voir 2.1.2). Nous avons donc besoin in fine de la structure de Frobenius pour valider la récurrence. Enfin, notons que la preuve de la surholonomie des F-isocristaux surconvergents de [CT08] utilise notamment la stabilité de la surholonomie par image directe par un morphisme propre, ce qui empêche a priori de vérifier directement (i.e., sans la notion de surholonomie) l'holonomie des F-isocristaux surconvergents sur les k-variétés lisses.

Le théorème 2.1.1 implique que l'image directe (respectivement l'image inverse extraordinaire) par un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels projectifs et lisses d'un F-complexe holonome est un F-complexe holonome. Cette stabilité nous permet de construire les F-complexes à cohomologie bornée et holonome de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur les k-variétés quasi-projectives. Comme c'est le cas pour les complexes surholonomes, on obtient ensuite la stabilité par les six opérations cohomologiques de Grothendieck de cette catégorie de coefficients p-adiques.

Notations. Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, π une uniformisante, k son corps résiduel supposé parfait, K son corps des fractions. On fixe s un entier strictement positif et $\sigma : \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}$ un relèvement de la puissance s-ième de Frobenius. Enfin, m désignera par défaut un entier positif.

• Si M est un $\mathcal{V}$-module (respectivement un groupe abélien), on pose $M_K := M \otimes_{\mathcal{V}} K$ (respectivement $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$). Un module est par défaut un module à gauche.

• Pour tout $\mathcal{V}$-schéma formel faible lisse $X^\dagger$, on désigne par X_0 sa fibre spéciale, $\mathfrak{X}$ le $\mathcal{V}$-schéma formel déduit par complétion p-adique. On note $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger}$, le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini et de niveau m sur $X^\dagger$ (e.g., voir [Car06a, 2]). Si $t_1, \ldots, t_d$ sont des coordonnées locales de $X^\dagger$ et $\partial_1, \ldots, \partial_d$ sont les dérivations correspondantes, on désignera comme d'habitude (voir [Ber96]) la base canonique de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger}$ par $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$.

Pour tout ouvert affine $U^\dagger$ de $X^\dagger$, on pose $D^{(m)}_{U^\dagger} = \Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger})$ et $D_{U^\dagger,K} = \Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}^{(m)}_{X^\dagger})_K$ (qui ne dépend canoniquement pas de m). On note $D^{(m)\dagger}_{U^\dagger}$ la complétion p-adique faible comme $\mathcal{V}$-algèbre de $D^{(m)}_{U^\dagger}$. Enfin, on pose $D^\dagger_{U^\dagger} := \varinjlim_m D^{(m)\dagger}_{U^\dagger}$.

• Pour tout $\mathcal{V}$-schéma formel lisse $\mathfrak{X}$, on note X_0 sa fibre spéciale. Pour tout ouvert affine $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{X}$, on pose $\widehat{D}^{(m)}_{\mathfrak{U}} := \Gamma(\mathfrak{U}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{U}})$, $D^\dagger_{\mathfrak{U}} := \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}})$.

• Si l'entier n ne pose aucune ambiguïté, on écrira plus simplement D (respectivement $D^{(m)\dagger}$, respectivement $D^\dagger$, respectivement $\widehat{D}^{(m)}$) à la place de $D_{\mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}}$ (respectivement $D^{(m)\dagger}_{\mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}}$, respectivement $D^\dagger_{\mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}}$, respectivement $\widehat{D}^{(m)}_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}}$).

• Nous reprenons les notations usuelles des opérations cohomologiques que nous ne rappelons pas (e.g., voir [Ber02] ou le premier chapitre de [Car09b]).

1. Caractérisations des isocristaux surconvergents sur les schémas finis étales sur l'espace affine

Soit $X^\dagger$ un $\mathcal{V}$-schéma formel faible lisse. Grâce à Kedlaya (voir [Ked02] ou [Ked05]), il existe un ouvert affine dense $U^\dagger$ de $X^\dagger$ et un morphisme fini et étale de la forme $g : U^\dagger \to \mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$. Nous étudions dans cette section les opérateurs différentiels de Mebkhout–Narváez-Macarro (voir la fin de [MN90] et les théorèmes de comparaison de Noot-Huyghe avec la théorie de Berthelot des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de [Noo03]) sur un tel $U^\dagger$. Nous en déduirons une description des isocristaux surconvergents sur $U^\dagger$ (voir 1.2.5). Après ce travail préliminaire,

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

ce chapitre culminera avec la proposition 1.3.7 qui donne une condition suffisante pour qu'un $\mathcal{D}$-module arithmétique soit un isocristal surcohérent (voir [Car07, 6] et pour la version sans structure de Frobenius [Car11]). Grosso modo, sur certains sous-schémas de l'espace projectif, dans la définition de la notion d'isocristal surcohérent, on peut affaiblir les hypothèses en remplaçant surcohérent par cohérent. Cette proposition 1.3.7 est l'étape clé aboutissant à sa généralisation 2.1.3 dans le prochain chapitre.

1.1 Compléments sur les opérateurs différentiels de Mebkhout–Narváez-Macarro

Nous vérifions ici que le foncteur section globale appliqué au faisceau des opérateurs différentiels de Mebkhout–Narváez-Macarro commute aux extensions induites par un morphisme fini étale sur un espace affine (voir 1.1.7). On en déduit facilement 1.1.8. Ces résultats nous serviront pour valider la caractérisation 1.2.4 des isocristaux surconvergents sur les schémas finis étales sur l'espace affine ou pour établir la proposition 1.3.7 de la section suivante.

Rappelons d'abord la définition de la complétion p-adique faible donnée par Noot-Huyghe dans [Noo03, 1.3] dans le cas d'une $\mathcal{V}$-algèbre non nécessairement commutative.

Définition 1.1.1. Pour tout entier N, on note B_N l'algèbre des polynômes à N indéterminées sur $\mathcal{V}$ non commutative (i.e., la $\mathcal{V}$-algèbre tensorielle de $\mathcal{V}^N$). Soit A une $\mathcal{V}$-algèbre non nécessairement commutative. On note $\widehat{A}$ la complétion p-adique de A et $A^\dagger$ le sous-ensemble de $\widehat{A}$ des éléments z tels qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$, des éléments $x_1, \ldots, x_n \in A$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}$, des polynômes $P_j \in \pi^j B_N$ tels que $\deg P_j \leqslant c(j+1)$ et

$$z = \sum_{j\in\mathbb{N}} P_j(x_1, \ldots, x_n).$$

L'ensemble $A^\dagger$ est une sous-$\mathcal{V}$-algèbre de $\widehat{A}$ et se nomme 'la complétion p-adique faible de A en tant que $\mathcal{V}$-algèbre' ou 'la complétion p-adique faible de A' s'il n'y a aucune ambiguüté sur l'algèbre de base $\mathcal{V}$ (dans notre travail, ce sera toujours sur $\mathcal{V}$). On dira aussi que 'z est engendré de manière faiblement complète sur $\mathcal{V}$ par les éléments $x_1, \ldots, x_n$ de A'.

Remarques 1.1.2. Avec les notations de 1.1.1, supposons $c \geqslant 1$. Notons $R_0 = 0$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}$, définissons par récurrence sur $j \geqslant 0$ les polynômes Q_j et R_{j+1} en posant : $R_j + P_j = Q_j + R_{j+1}$ où Q_j désigne la somme des monômes de $R_j + P_j$ dont la valuation π-adique du coefficient vaut j tandis que R_{j+1} est la somme des autres termes. On dispose de l'égalité $z = \sum_{j\in\mathbb{N}} Q_j(x_1, \ldots, x_n)$ avec $\deg Q_j \leqslant c(j+1)$ et tous les monômes de Q_j ont une valuation π-adique égale à j (on remarque aussi que $\deg R_{j+1} \leqslant c(j+1)$ et $R_{j+1} \in \pi^{j+1} B_n$).

Lemme 1.1.3. *Soient A une $\mathcal{V}$-algèbre, $c \in \mathbb{R}$, $y_1, \ldots, y_n \in A^\dagger$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}$, des polynômes $P_j \in \pi^j B_n$ tels que $\deg P_j \leqslant c(j+1)$. Alors l'élément $z := \sum_{j\in\mathbb{N}} P_j(y_1, \ldots, y_n)$ appartient à $A^\dagger$. Plus précisément, si $y_1, \ldots, y_n$ sont engendrés de manière faiblement complète sur $\mathcal{V}$ par des éléments $x_1, \ldots, x_m$ de A, alors z est engendré de manière faiblement complète sur $\mathcal{V}$ par $x_1, \ldots, x_m$. En particulier, on dispose de l'égalité $A^\dagger = (A^\dagger)^\dagger$.*

Démonstration. Soit $P(Y_1, \ldots, Y_n) = \lambda \cdot Y_{\phi(1)} Y_{\phi(2)} \cdots Y_{\phi(r)}$ avec $\phi(1), \ldots, \phi(r) \in \{1, \ldots, n\}$ un monôme de P_j avec $\lambda \in \mathcal{V}$. Par hypothèse, $v_\pi(\lambda) \geqslant j$ et $r \leqslant c(j+1)$. Quitte à augmenter c, il existe $x_1, \ldots, x_m \in A$ tels que, pour tout $i' = 1, \ldots, n$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des polynômes $P_{i',k} \in \pi^k B_m$ tels que $\deg P_{i',k} \leqslant c(k+1)$ et $y_{i'} = \sum_{k\in\mathbb{N}} P_{i',k}(x_1, \ldots, x_m)$. On obtient

$$P(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k_1\in\mathbb{N}, \ldots, k_r\in\mathbb{N}} \lambda \cdot P_{\phi(1),k_1}(x_1, \ldots, x_m) \cdots P_{\phi(r),k_r}(x_1, \ldots, x_m).$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

Notons $P_{(k_1,\ldots,k_r)}(X_1,\ldots,X_m) := \lambda \cdot P_{\phi(1),k_1}(X_1,\ldots,X_m)\cdots P_{\phi(r),k_r}(X_1,\ldots,X_m)$ les polynômes de B_m apparaissant dans cette somme. Notons $v_\pi(P_{(k_1,\ldots,k_r)})$ la valuation π-adique minimale des coefficients de $P_{(k_1,\ldots,k_r)}$. Par construction, $v_\pi(P_{(k_1,\ldots,k_r)}) \geqslant j + \sum_{i=1}^r k_i$.

Soit J un entier. Or, pour j fixé, P_j est une somme finie de tels monômes P. Comme $v_\pi(P_{(k_1,\ldots,k_r)}) \geqslant j + \sum_{i=1}^r k_i$, il en résulte qu'il existe un nombre fini de polynômes $P_{(k_1,\ldots,k_r)}$ définis comme ci-dessus et tels que $v_\pi(P_{(k_1,\ldots,k_r)}) = J$. Soit $Q_J(X_1,\ldots,X_m)$ la somme de tous ces polynômes $P_{(k_1,\ldots,k_r)}(X_1,\ldots,X_m)$ tels que $v_\pi(P_{(k_1,\ldots,k_r)}) = J$. Alors $v_\pi(Q_J) \geqslant J$ et $z = \sum_{J\in\mathbb{N}} Q_J(x_1,\ldots,x_m)$.

Il reste à majorer le degré de Q_J : soit $P_{(k_1,\ldots,k_r)}$ un de ces polynômes tels que $v_\pi(P_{(k_1,\ldots,k_r)}) = J$. On a alors $\deg P_{(k_1,\ldots,k_r)} = \sum_{i=1}^r \deg P_{\phi(i),k_i} \leqslant c\sum_{i=1}^r (k_i+1)$. Comme $r \leqslant c(j+1)$, comme $J \geqslant j + \sum_{i=1}^r k_i$, on en déduit alors $\deg P_{(k_1,\ldots,k_r)} \leqslant c(J-j+c(j+1)) \leqslant c(J+1+c(J+1)) = c(1+c)(J+1)$. Posons $C = c(1+c)$. On a donc établi $\deg Q_J \leqslant C(J+1)$. D'où le résultat. □

Le lemme ci-après est immédiat.

Lemme 1.1.4. *Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}$, soient $P_j, Q_j \in \pi^j B_n$ tels que $\deg P_j \leqslant c(j+N_1)$, $\deg Q_j \leqslant c(j+N_2)$. On définit des éléments de $\mathcal{V}[t_1,\ldots,t_n]^\dagger$ en posant : $z = \sum_{j\in\mathbb{N}} P_j(t_1,\ldots,t_n)$, $u = \sum_{j\in\mathbb{N}} Q_j(t_1,\ldots,t_n)$.*

(1) *Il existe, pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^n$ et tout $j \in \mathbb{N}$, des polynômes $\widetilde{P}_j \in \pi^j B_n$ tels que $\deg \widetilde{P}_j \leqslant c(j+N_1)$ et $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{P}_j(t_1,\ldots,t_n)$.*

(2) *Il existe, pour tout $j \in \mathbb{N}$, des polynômes $R_j, \widetilde{R}_j \in \pi^j B_n$ tels que $\deg R_j \leqslant c(j+\max\{N_1, N_2\})$, $\deg \widetilde{R}_j \leqslant c(j+N_1+N_2)$ et $z+u = \sum_{j\in\mathbb{N}} R_j(t_1,\ldots,t_n)$, $zu = \sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{R}_j(t_1,\ldots,t_n)$.*

Lemme 1.1.5. *Soient $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un morphisme fini étale de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, $\mathcal{Y}$ un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ muni de coordonnées locales et $\mathcal{Y}' := f^{-1}(\mathcal{Y})$, $B := \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, $B' := \Gamma(\mathcal{Y}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})$. Le morphisme canonique $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'} \to f^*\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}$ est un isomorphisme. Le morphisme canonique $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}'}$ induit est en fait un morphisme d'anneaux. Enfin, les morphismes qui en résultent $B' \otimes_B D^\dagger_{\mathcal{Y}} \to D^\dagger_{\mathcal{Y}'}$, $D^\dagger_{\mathcal{Y}} \otimes_B B' \to D^\dagger_{\mathcal{Y}'}$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. Notons $f_i : X'_i \to X_i$ (respectivement B_i, B'_i) la réduction modulo π^{i+1} de f (respectivement B, B'). Via un calcul en coordonnées locales, on vérifie que le morphisme canonique $\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i} \to f^*\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$ est un isomorphisme. Par un calcul analogue, on prouve que le morphisme $f^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \to \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}$, induit via son inverse, est en fait un morphisme d'anneaux et que les morphismes $B'_i \otimes_{B_i} D^{(m)}_{Y_i} \to D^{(m)}_{Y'_i}$, $D^{(m)}_{Y_i} \otimes_{B_i} B'_i \to D^{(m)}_{Y'_i}$ induits en prenant les sections globales sont des isomorphismes. Par passage à la limite projective sur i, puis passage à la limite inductive sur le niveau m, on en déduit le lemme. □

En remplaçant les faisceaux des opérateurs différentiels de Berthelot par ceux de Mebkhout–Narváez-Macarro, la vérification de l'analogue du lemme 1.1.5 est techniquement plus délicate car la complétion p-adique faible est moins maniable que la complétion p-adique. Avant de traiter la partie (voir 1.1.7) moins aisée de cette analogie, donnons d'abord sa partie triviale :

Lemme 1.1.6. *Soit $g : U'^\dagger \to U^\dagger$ un morphisme fini étale de $\mathcal{V}$-schémas formels faibles affines et lisses. Le morphisme canonique de $\mathcal{D}^{(m)}_{U'^\dagger}$-modules à gauche $\mathcal{D}^{(m)}_{U'^\dagger} \to g^*\mathcal{D}^{(m)}_{U^\dagger}$ est un isomorphisme. On dispose de plus des morphismes canoniques de $\mathcal{V}$-algèbres $D^{(m)\dagger}_{U^\dagger} \to D^{(m)\dagger}_{U'^\dagger}$, $D^\dagger_{U^\dagger} \to D^\dagger_{U'^\dagger}$.*

Démonstration. Comme g est fini et étale, on vérifie via un calcul en coordonnées locales (identique à celui de la preuve de 1.1.5) que $\mathcal{D}^{(m)}_{U'^\dagger} \to g^*\mathcal{D}^{(m)}_{U^\dagger}$ est un isomorphisme. Via son inverse, on construite alors le morphisme canonique $g^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{U^\dagger} \to \mathcal{D}^{(m)}_{U'^\dagger}$. On établit ensuite par un calcul en coordonnées locales que celui-ci est en fait un morphisme de $\mathcal{V}$-algèbres. En prenant les sections globales, on obtient un morphisme de $\mathcal{V}$-algèbres $D^{(m)}_{U^\dagger} \to D^{(m)}_{U'^\dagger}$. D'où, par fonctorialité de la complétion p-adique faible de $\mathcal{V}$-algèbres, le morphisme $D^{(m)\dagger}_{U^\dagger} \to D^{(m)\dagger}_{U'^\dagger}$. Par passage à la limite sur le niveau, cela donne le morphisme canonique de $\mathcal{V}$-algèbres : $D^\dagger_{U^\dagger} \to D^\dagger_{U'^\dagger}$. □

Proposition 1.1.7. *Soient $g : U^\dagger \to \mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$ un morphisme fini étale de $\mathcal{V}$-schémas formels faibles lisses et $A^\dagger := \Gamma(U^\dagger, \mathcal{O}_{U^\dagger})$.*

Les morphismes canoniques $A^\dagger$-linéaires induits (via 1.1.6)

$$A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} D^{(m)\dagger} \to D^{(m)\dagger}_{U^\dagger}, \quad D^{(m)\dagger} \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} A^\dagger \to D^{(m)\dagger}_{U^\dagger}, \tag{1.1.7.1}$$

$$A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} D^\dagger \to D^\dagger_{U^\dagger}, \quad D^\dagger \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} A^\dagger \to D^\dagger_{U^\dagger} \tag{1.1.7.2}$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. Par symétrie et par passage à la limite inductive sur le niveau, contentons-nous de vérifier que le morphisme canonique $\theta : A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} D^{(m)\dagger} \to D^{(m)\dagger}_{U^\dagger}$ est un isomorphisme.

Comme $A^\dagger$ est une $\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger$-algèbre finie, $\mathcal{V}\{\underline{t}\} \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} A^\dagger \xrightarrow{\sim} \widehat{A}$. Il en résulte le premier isomorphisme : $A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} \widehat{D}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widehat{A} \otimes_{\mathcal{V}\{\underline{t}\}} \widehat{D}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widehat{A} \,\widehat{\otimes}_{\mathcal{V}\{\underline{t}\}} \widehat{D}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widehat{D}^{(m)}_{\mathfrak{U}}$, le dernier isomorphisme résultant de 1.1.5 (voir sa preuve). Cet isomorphisme composé s'inscrit dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} \widehat{D}^{(m)} \arrow[r, "\sim"] & \widehat{D}^{(m)}_{\mathfrak{U}} \\
A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} D^{(m)\dagger} \arrow[r, "\theta"] \arrow[u, hook] & D^{(m)\dagger}_{U^\dagger} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} \tag{1.1.7.3}$$

Comme $A^\dagger$ est une extension plate de $\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger$, comme $D^{(m)\dagger}$ et $D^{(m)\dagger}_{U^\dagger}$ sont séparés (pour la topologie p-adique), il en résulte que les flèches verticales de (1.1.7.3) sont injectives. On obtient ainsi l'injectivité de θ.

Prouvons à présent la surjectivité de θ via les étapes suivantes :

(0) *Fixons quelques notations.* Soient $x_1, \ldots, x_s \in A^\dagger$ engendrant $A^\dagger$ comme $\mathcal{V}[t_1, \ldots, t_n]^\dagger$-module. Notons X le vecteur colonne de coordonnées $x_1, \ldots, x_s$.

- Pour tout $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \leqslant p^m$ (i.e., $a_1, \ldots, a_n \leqslant p^m$), soient $A^{(\underline{a})} = (a^{(\underline{a})}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant s} \in M_s(\mathcal{V}[t_1, \ldots, t_n]^\dagger)$ tel que

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{a} \rangle_{(m)}}(X) = A^{(\underline{a})} X, \tag{1.1.7.4}$$

où $\underline{\partial}^{\langle \underline{a} \rangle_{(m)}}(X)$ désigne le vecteur colonne de coordonnées $\underline{\partial}^{\langle \underline{a} \rangle_{(m)}}(x_1), \ldots, \underline{\partial}^{\langle \underline{a} \rangle_{(m)}}(x_s)$. Il existe une constante réelle $c \geqslant 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, des polynômes $P^{(\underline{a})}_{ijk} \in \pi^k B_n$ tels que $\deg P^{(\underline{a})}_{ijk} \leqslant c(k+1)$ et $a^{(\underline{a})}_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{N}} P^{(\underline{a})}_{ijk}(t_1, \ldots, t_n)$.

- Pour tout $1 \leqslant b \leqslant s$, soit $B^{(b)} = (b^{(b)}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant s} \in M_s(\mathcal{V}[t_1, \ldots, t_n]^\dagger)$ tel que

$$x_b \cdot X = B^{(b)} X, \tag{1.1.7.5}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

où $x_b \cdot X$ est le vecteur colonne de coordonnées $x_b x_1, \dots, x_b x_s$. Quitte à augmenter c, il existe pour tout $k \in \mathbb{N}$, des polynômes $P^{(b)}_{ijk} \in \pi^k B_n$ tels que $\deg P^{(b)}_{ijk} \leqslant c(k+1)$ et vérifiant $b^{(b)}_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}} P^{(b)}_{ijk}(t_1, \dots, t_n)$.

(1) *Soit* $z \in D^{(m)\dagger}_{U^\dagger}$. Il existe alors des éléments $y_1, \dots, y_e$ de $D^{(m)}_{U^\dagger}$ tels que z soit engendré de manière faiblement complète par $y_1, \dots, y_e$. Comme $D^{(m)}_{U^\dagger}$ est une $\mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]^\dagger$-algèbre engendrée par $x_1, \dots, x_s$ et par $\underline{\partial}^{\langle \underline{a}\rangle_{(m)}}$ pour $\underline{a} \leqslant p^m$, $y_1, \dots, y_e$ sont alors engendrés de manière faiblement complète par $x_1, \dots, x_s$ où l'on choisit $x_1 = 1$, par $t_1, \dots, t_n$ et par $\underline{\partial}^{\langle \underline{a}\rangle_{(m)}}$ pour $\underline{a} \leqslant p^m$. Il découle alors de 1.1.3 que z est engendré de manière faiblement complète par $x_1, \dots, x_s$, par $t_1, \dots, t_n$ et par $\underline{\partial}^{\langle \underline{a}\rangle_{(m)}}$ pour $\underline{a} \leqslant p^m$. Posons $N := n + s + n(p^m + 1)$. Il existe ainsi, pour tout $J \in \mathbb{N}$, des polynômes $P_J \in \pi^J B_N$ tels que $\deg P_J \leqslant c(J+1)$ et $z = \sum_{J\in\mathbb{N}} P_J(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_s, \underline{\partial}^{\langle \underline{a}\rangle_{(m)}}, \underline{a} \leqslant p^m)$.

(2) D'après les formules [Ber96, 2.2.4(ii) et (iv)], le passage de droite à gauche d'un polynôme en $t_1, \dots, t_n$ par rapport à un opérateur de la forme $\underline{\partial}^{\langle \underline{a}\rangle_{(m)}}$ n'augmente pas le degré en $t_1, \dots, t_n$. On peut donc supposer que P_J est une somme *finie* de monômes de la forme

$$\begin{aligned} M_J = \pi^J P(t_1, \dots, t_n) Q_1(\underline{\partial}^{\langle \underline{a}\rangle_{(m)}}, \underline{a} \leqslant p^m) \\ \times P_1(x_1, \dots, x_s) \cdots Q_r(\underline{\partial}^{\langle \underline{a}\rangle_{(m)}}, \underline{a} \leqslant p^m) P_r(x_1, \dots, x_s), \end{aligned}$$

où P est un monôme de B_n et, pour $i = 1, \dots, r$, P_i est un monôme unitaire de B_s et Q_i est un monôme unitaire $B_{n(p^m+1)}$, avec toujours $\deg M_J \leqslant c(J+1)$ (en tant que monôme de B_N).

(3) *Linéarisation de* $P_1(x_1, \dots, x_s), \dots, P_r(x_1, \dots, x_s)$. En utilisant (1.1.7.5) et via 1.1.4(2), on vérifie que, pour tout $1 \leqslant u \leqslant r$, il existe un vecteur ligne $L^{(u)} = (l^{(u)}_1, \dots, l^{(u)}_s)$ à coefficients dans $\mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]^\dagger$ et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$ et tout $j \in \mathbb{N}$, des polynômes $L^{(u)}_{ij} \in \pi^j B_n$ tels que $\deg(L^{(u)}_{ij}) \leqslant c(j + \deg(P_u))$, $l^{(u)}_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} L^{(u)}_{ij}(t_1, \dots, t_n)$ et $P_u(x_1, \dots, x_s) = L^{(u)} X$. Remarquons que pour $\deg(P_u) = 0$, on a eu besoin d'avoir $x_1 = 1$ et qu'en fait on peut affiner en remplaçant $\deg(L^{(u)}_{ij}) \leqslant c(j + \deg(P_u))$ par $\deg(L^{(u)}_{ij}) \leqslant c(j + \deg(P_u) - 1)$.

(4) *Passage de droite à gauche par rapport à* $\underline{\partial}^{\langle \underline{a}\rangle_{(m)}}$ *des combinaisons linéaires de* $x_1, \dots, x_s$ *à coefficients dans* $\mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]^\dagger$. Pour tout $\underline{a} \leqslant p^m$, avec [Ber96, 2.2.4(iv)] puis via la formule de Leibnitz de [Ber96, 2.3.4.1], on obtient

$$\begin{aligned} \underline{\partial}^{\langle \underline{a}\rangle_{(m)}} L^{(u)} X &= \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{a}} \left\{ \begin{matrix} \underline{a} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{a} - \underline{h}\rangle_{(m)}} (L^{(u)} X) \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle_{(m)}} \\ &= \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{a}} \left\{ \begin{matrix} \underline{a} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \sum_{\underline{h}' \leqslant \underline{a} - \underline{h}} \left\{ \begin{matrix} \underline{a} - \underline{h} \\ \underline{h}' \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{a} - \underline{h} - \underline{h}'\rangle_{(m)}} (L^{(u)}) A^{(\underline{h}')} X \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle_{(m)}} \\ &= \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{a}} L^{(u,\underline{a})}_{\underline{h}} X \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle_{(m)}}, \end{aligned} \tag{1.1.7.6}$$

où $L^{(u,\underline{a})}_{\underline{h}} = (l^{(u,\underline{a})}_{\underline{h},1}, \dots, l^{(u,\underline{a})}_{\underline{h},1}) := \left\{ \begin{smallmatrix} \underline{a} \\ \underline{h} \end{smallmatrix} \right\} \sum_{\underline{h}' \leqslant \underline{a} - \underline{h}} \left\{ \begin{smallmatrix} \underline{a} - \underline{h} \\ \underline{h}' \end{smallmatrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{a} - \underline{h} - \underline{h}'\rangle_{(m)}} (L^{(u)}) A^{(\underline{h}')}$ est un vecteur ligne à coefficients dans $\mathcal{V}[t_1, \dots, t_n]^\dagger$. Or, d'après 1.1.4, il existe, pour tout $i = 1, \dots, s$ et tout $j \in \mathbb{N}$, des polynômes $L^{(u,\underline{a})}_{\underline{h},ij} \in \pi^j B_n$ tels que $\deg(L^{(u,\underline{a})}_{\underline{h},ij}) \leqslant c(j + \deg(P_u) + 1)$ et $l^{(u,\underline{a})}_{\underline{h},i} = \sum_{j\in\mathbb{N}} L^{(u,\underline{a})}_{\underline{h},ij}(t_1, \dots, t_n)$.

En résumé : le passage de droite à gauche par rapport à $\underline{\partial}^{\langle \underline{a}\rangle_{(m)}}$ des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_s$ coûte l'ajout de '1' dans l'inégalité de la forme $\deg(L^{(u,\underline{a})}_{\underline{h},ij}) \leqslant c(j + \deg(P_u) + 1)$. Ce nombre (1) correspond aussi au degré des monômes $\underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle_{(m)}}$ (car $\underline{h} \leqslant p^m$).

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

(5) En réitérant le procédé de l'étape (4), on vérifie que M_J est égal à une somme finie de termes de la forme

$$R_J = \pi^J LXQ(\underline{\partial}^{\langle \underline{a} \rangle_{(m)}}, \underline{a} \leqslant p^m),$$

où $Q \in B_{n(p^m+1)}$ est un monôme tel que $\deg(Q) \leqslant \deg(Q_1) + \cdots + \deg(Q_r) \leqslant \deg(M_J)$, $L = (l_1, \ldots, l_s)$ est un vecteur ligne à coefficients dans $\mathcal{V}[t_1, \ldots, t_n]^\dagger$ tel que, pour tout $i = 1, \ldots, s$ et tout $j \in \mathbb{N}$, il existe des polynômes $L_{ij} \in B_n$ tels que $\deg(L_{ij}) \leqslant c(j + \deg(M_J))$ et $l_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} \pi^j L_{ij}(t_1, \ldots, t_n)$.

(6) *Conclusion.* Posons $R_{J,i,j} := L_{ij}(t_1, \ldots, t_n)Q(\underline{\partial}^{\langle \underline{a} \rangle_{(m)}}, \underline{a} \leqslant p^m) \in B_{n+n(p^m+1)}$. Ainsi,

$$R_J = \sum_{i=1}^{s} x_i \sum_{j\in\mathbb{N}} \pi^{J+j} R_{J,i,j}.$$

Comme $\deg(M_J) \leqslant \deg(P_J) \leqslant c(J+1)$, alors $\deg(Q) \leqslant c(J+1)$ et $\deg(L_{ij}) \leqslant c(j + c(J+1))$. D'où : $\deg(R_{J,i,j}) \leqslant c(j + c(J+1)) + c(J+1) \leqslant c(1+c)(J+j+1)$.

Lorsque j et J sont fixés, l'ensemble des polynômes $R_{J,i,j}$ qui apparaissent comme décrits ci-dessus est de cardinal fini. Notons $\widetilde{R}_{J,i,j}$ la somme finie des éléments de cet ensemble. On obtient alors la somme

$$z = \sum_{i=1}^{s} x_i \sum_{J,j\in\mathbb{N}} \pi^{J+j} \widetilde{R}_{J,i,j}.$$

Comme $\deg(\widetilde{R}_{J,i,j}) \leqslant c(1+c)(J+j+1)$, il en résulte que $\sum_{J,j\in\mathbb{N}} \pi^{J+j} \widetilde{R}_{J,i,j} \in D^{(m)\dagger}$. □

Proposition 1.1.8. *On garde les notations et hypothèses de 1.1.7. Les morphismes canoniques*

$$D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}} \otimes_{D^\dagger} D^\dagger_{U^\dagger} \to D^\dagger_{\mathfrak{U}}, \quad D^\dagger_{U^\dagger} \otimes_{D^\dagger} D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}} \to D^\dagger_{\mathfrak{U}}$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. D'après 1.1.7, $D^\dagger \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} A^\dagger \xrightarrow{\sim} D^\dagger_{U^\dagger}$. D'où :

$$D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}} \otimes_{D^\dagger} D^\dagger_{U^\dagger} \xleftarrow{\sim} D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}} \otimes_{D^\dagger} D^\dagger \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} A^\dagger \xleftarrow{\sim} D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}} \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} A^\dagger.$$

Or, comme $A^\dagger$ est une $\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger$-algèbre finie, $\mathcal{V}\{\underline{t}\} \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} A^\dagger \xrightarrow{\sim} \widehat{A}$. Donc, $D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}} \otimes_{\mathcal{V}\{\underline{t}\}} \widehat{A} \xrightarrow{\sim} D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}} \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^\dagger} A^\dagger$. L'isomorphisme $D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}} \otimes_{\mathcal{V}\{\underline{t}\}} \widehat{A} \xrightarrow{\sim} D^\dagger_{\mathfrak{U}}$ de 1.1.5 nous permet de conclure. □

1.2 Caractérisation des isocristaux surconvergents via les opérateurs différentiels de Mebkhout–Narváez-Macarro

Nous donnons une description des isocristaux surconvergents sur l'espace affine (voir 1.2.2 et 1.2.3). Nous en déduisons ensuite, grâce à la section précédente, une description des isocristaux surconvergents sur les schémas finis et étales sur l'espace affine (voir 1.2.5).

Dans cette section, nous garderons les notations suivantes : soient $\mathcal{P} := \widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}$ l'espace projectif formel sur $\mathcal{V}$ de dimension n, $u_0, \ldots, u_n$ les coordonnées projectives de $\mathcal{P}$, H_0 l'hyperplan défini par $u_0 = 0$, i.e., $H_0 := \mathbb{P}^n_k \backslash \mathbb{A}^n_k$. On désigne par $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$ (respectivement $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$) le faisceau des fonctions (respectivement opérateurs différentiels de niveau fini) sur $\mathcal{P}$ à singularités surconvergentes le long de H_0 (voir [Ber96, 4.2]). On pose de plus $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}} := \mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$, où $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ est le faisceau usuel des opérateurs différentiels sur $\mathcal{P}$.

D'après le théorème de comparaison de Noot-Huyghe (voir [Noo97] ou [Noo98]), on dispose dans cette situation géométrique de l'isomorphisme : $D^{\dagger}_K = D^{\dagger}_{\mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}},K} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}})$. Elle établit de plus la formule

$$\Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}) = \left\{ \sum_{\underline{k},\underline{l}\in\mathbb{N}^n} a_{\underline{k},\underline{l}}\underline{t}^{\underline{k}}\underline{\partial}^{[\underline{l}]} \;\middle|\; \exists \eta < 1, \exists c \geqslant 1 \text{ tels que } |a_{\underline{k},\underline{l}}| < c\eta^{|\underline{k}|+|\underline{l}|} \right\},$$

où $t_1 = u_1/u_0, \ldots, t_n = u_n/u_0$ désignent les coordonnées canoniques sur l'espace affine.

1.2.1 *Théorèmes de type A sur l'espace affine ou un de ses ouverts affines.* Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent.

• D'après le théorème de type A pour les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents (voir [Noo97]), $E := \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ est un $D^{\dagger}_K$-module cohérent et le morphisme canonique

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_K} E \to \mathcal{E} \tag{1.2.1.1}$$

est un isomorphisme. Ainsi, les foncteurs $\Gamma(\mathcal{P}, -)$ et $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_K} -$ induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents et celle des $D^{\dagger}_K$-modules cohérents.

• De même, le foncteur $\Gamma(\mathcal{P}, -)$ induit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents (respectivement $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents) et celle des D_K-modules cohérents (respectivement $\mathcal{V}[\underline{t}]^{\dagger}_K$-modules cohérents).

• Pour tout ouvert affine $\mathfrak{U}' \subset \widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}$, d'après le théorème de type A pour les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}}$-modules cohérents (voir [Ber96, 3.6.5]), le morphisme canonique

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U}',\mathbb{Q}} \otimes_{D^{\dagger}_{\mathfrak{U}',K}} \Gamma(\mathfrak{U}', \mathcal{E}) \to \mathcal{E}|\mathfrak{U}' \tag{1.2.1.2}$$

est un isomorphisme. En combinant (1.2.1.2) et (1.2.1.1), il en résulte que le morphisme canonique

$$D^{\dagger}_{\mathfrak{U}',K} \otimes_{D^{\dagger}_K} E \to \Gamma(\mathfrak{U}', \mathcal{E}) \tag{1.2.1.3}$$

est un isomorphisme.

1.2.2 Grâce à Berthelot (voir [Car06b, 2.2.12] pour une version écrite d'ailleurs plus forte), la catégorie $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathbb{A}^n_k/K)$ est équivalence à celle des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents. D'après les théorèmes de type A (voir 1.2.1), la catégorie $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathbb{A}^n_k/K)$ est donc équivalence à celle des $D^{\dagger}_K$-modules cohérents, $\mathcal{V}[\underline{t}]^{\dagger}_K$-cohérents.

Lemme 1.2.3. *Soit E un D_K-module, cohérent pour sa structure induite de $\mathcal{V}[\underline{t}]^{\dagger}_K$-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *E est un isocristal surconvergent sur $\mathbb{A}^n_k$;*

(2) *E est muni d'une structure de $D^{\dagger}_K$-module cohérent prolongeant sa structure de D_K-module ;*

(3) *le morphisme canonique $E \to D^{\dagger}_K \otimes_{D_K} E$ est un isomorphisme.*

Démonstration. D'après 1.2.2, (2) $\Leftrightarrow$ (1). Par noethéranité de D_K, E est D_K-cohérent et donc (3) $\Rightarrow$ (2). Supposons que E soit un isocristal surconvergent sur $\mathbb{A}^n_k$. Notons $\mathcal{E}$ le $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent, $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent associé. D'après [Car05, 2.2.8] (voir les notations

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

de [Car05, 2.2.2]), le morphisme canonique $\mathcal{E} \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$ est un isomorphisme. Il suffit alors d'utiliser les théorèmes de type A pour respectivement les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents et les $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents. □

Proposition 1.2.4. *Soient $g : U^{\dagger} \to \mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$ un morphisme fini étale de $\mathcal{V}$-algèbres formels faibles lisses et $A^{\dagger} := \Gamma(U^{\dagger}, \mathcal{O}_{U^{\dagger}})$. Soit E un $D_{U^{\dagger},K}$-module, cohérent pour sa structure induite de $A^{\dagger}_K$-module. Notons $g_*(E)$ le D_K-module $\mathcal{V}[\underline{t}]^{\dagger}_K$-cohérent induit par E (ainsi, g_* est le foncteur oubli). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *la connexion de E est surconvergente, i.e., E est un isocristal surconvergent sur U_0 ;*
(2) *la connexion de $g_*(E)$ est surconvergente, i.e., $g_*(E)$ est un isocristal surconvergent sur $\mathbb{A}^n_k$;*
(3) *le morphisme canonique D_K-linéaire $g_*(E) \to D^{\dagger}_K \otimes_{D_K} g_*(E)$ est un isomorphisme ;*
(4) *le morphisme canonique $D_{U^{\dagger},K}$-linéaire $E \to D^{\dagger}_{U^{\dagger},K} \otimes_{D_{U^{\dagger},K}} E$ est un isomorphisme.*

Dans ce cas, la structure de $D_{U^{\dagger},K}$-module de E se prolonge de manière unique en une structure de $D^{\dagger}_{U^{\dagger},K}$-module.

Démonstration. Par [LeS07, 7.2.15], on vérifie l'équivalence entre les deux premières assertions. Il résulte de l'isomorphisme de 1.1.6 (avec aussi un passage aux sections globales) que le morphisme canonique $D_K \otimes_{\mathcal{V}[\underline{t}]^{\dagger}} A^{\dagger} \xrightarrow{\sim} D_{U^{\dagger},K}$ est un isomorphisme. Grâce à 1.1.7.2, il en résulte qu'il en est de même du morphisme canonique : $D^{\dagger}_K \otimes_{D_K} D_{U^{\dagger},K} \to D^{\dagger}_{U^{\dagger},K}$. On en déduit l'équivalence entre (3) et (4). Enfin, l'équivalence entre (2) et (3) découle de 1.2.3. La conclusion de la proposition se déduit du fait que le morphisme canonique $D^{\dagger}_{U^{\dagger},K} \otimes_{D_{U^{\dagger},K}} E \to E$ est alors aussi un isomorphisme (car composé avec le morphisme de (4), on obtient l'identité de E). □

Corollaire 1.2.5. *Avec les notations de 1.2.4, la catégorie $\mathrm{Isoc}^{\dagger}(U_0/K)$ des isocristaux surconvergents sur U_0 est équivalente à celles des $D^{\dagger}_{U^{\dagger},K}$-modules cohérents, cohérents pour leur structure induite de $A^{\dagger}_K$-module.*

Démonstration. Cela résulte aussitôt des équivalences 1.2.4(1) $\Leftrightarrow$ 1.2.4(3) $\Leftrightarrow$ 1.2.4(4) et 1.2.3(2) $\Leftrightarrow$ 1.2.3(3).

1.3 Caractérisation des isocristaux surcohérents sur certains sous-schémas de l'espace affine

Dans la suite de cette section, nous conserverons les notations suivantes : soient $\mathcal{P} := \widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}$ l'espace projectif formel sur $\mathcal{V}$ de dimension n, $u_0, \ldots, u_n$ les coordonnées projectives de $\mathcal{P}$ (ou, par abus de notations, de $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$ ou $\mathbb{P}^n_k$), H_0 l'hyperplan défini par $u_0 = 0$, i.e., $H_0 := \mathbb{P}^n_k \backslash \mathbb{A}^n_k$. On note $t_1 = u_1/u_0, \ldots, t_n = u_n/u_0$ les coordonnées canoniques de l'espace affine. Soient $U^{\dagger}$ un ouvert affine de $\mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$, $\mathfrak{U}$ son complété p-adique, $T_0 := \mathbb{P}^n_k \backslash U_0$ le diviseur réduit de $\mathbb{P}^n_k$ dont le support est le complémentaire de U_0. Soit $v : Y^{\dagger} \hookrightarrow U^{\dagger}$ une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels faibles affines et lisses, avec Y_0 intègre et $\dim Y_0 = n - r$ pour un certain entier r. On suppose de plus qu'il existe un morphisme fini et étale $g_0 : U_0 \to \mathbb{A}^n_k$ tel que $g_0(Y_0) \subset \mathbb{A}^{n-r}_k$ (grâce aux travaux de Kedlaya dans [Ked02] ou [Ked05], cette hypothèse est en fait génériquement valable). On note $g : U^{\dagger} \to \mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$ le relèvement de g_0. Les complétés p-adiques de v ou g seront encore notés respectivement v ou g.

Le résultat principal de cette section est la caractérisation de 1.3.7 des isocristaux surcohérents sur Y_0.

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

1.3.1 Comme $U^\dagger$ est un ouvert de $\mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$, on obtient le morphisme canonique de restriction (pour tout niveau m) $\mathrm{restr}: D^{(m)}_{\mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}} \to D^{(m)}_{U^\dagger}$. Par fonctorialité de la complétion p-adique faible puis par passage à la limite sur le niveau, il en résulte le morphisme canonique :

$$\mathrm{restr}: \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} D^\dagger_{\mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}} \to D^\dagger_{U^\dagger}. \tag{1.3.1.1}$$

Remarques 1.3.2. Soit $X^\dagger = \mathrm{Spf}\, B^\dagger$ un $\mathcal{V}$-schéma formel faible affine, lisse et muni de coordonnées locales. Soit M un $B^\dagger_K$-module cohérent muni d'une connexion intégrable $M \to M \otimes_{B^\dagger} \Omega^1_{B^\dagger}$ (i.e., un $D_{X^\dagger,K}$-module cohérent, $B^\dagger_K$-cohérent). Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{B}_K$-module cohérent muni d'une connexion intégrable $\mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\widehat{B}} \Omega^1_{\widehat{B}}$ (i.e., un $D_{\mathfrak{X},K}$-module cohérent, $\widehat{B}_K$-cohérent). On dispose de l'inclusion canonique $D_{X^\dagger,K} \hookrightarrow D_{\mathfrak{X},K}$ définie par $\sum a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mapsto \sum a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]}$. On calcule que cette flèche est un morphisme d'anneaux et que le morphisme induit $\widehat{B}_K \otimes_{B^\dagger_K} D_{X^\dagger,K} \to D_{\mathfrak{X},K}$ est un isomorphisme. Il en résulte que si l'on dispose d'un morphisme $D_{X^\dagger,K}$-linéaire $M \to \mathcal{M}$, alors le morphisme canonique induit $\widehat{B}_K \otimes_{B^\dagger_K} M \to \mathcal{M}$ est $D_{\mathfrak{X},K}$-linéaire.

Lemme 1.3.3. *Soit $\alpha: \widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}$ l'immersion fermée définie par $u_1 = 0, \ldots, u_r = 0$. Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans $\mathbb{P}^{n-r}_k$ et $E := \Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}, \mathcal{E})$. Alors, $\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \bigcap_{i=1}^r \ker(t_i: E \to E)$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{P}' := \widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{I}$ l'idéal définissant l'immersion fermée α. On vérifie par complétion p-adique $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}'\to\mathcal{P}} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}/\mathcal{I}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{P}}$. Avec les notations de [Car06b, 1.1.6], en ajoutant les singularités surconvergentes le long de H_0, par passage à la limite sur le niveau et tensorisation par $\mathbb{Q}$, on obtient alors l'isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}'\to\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}/\mathcal{I}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$. Cela implique

$$\begin{aligned}\alpha^!(\mathcal{E}) &= \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}'\to\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\alpha^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}} \alpha^{-1}\mathcal{E}[-r] \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\alpha^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}} \alpha^{-1}\mathcal{E}[-r].\end{aligned}$$

On calcule que que $\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$ engendré par les sections globales $t_1, \ldots, t_r$. Via la résolution de Koszul induite par la suite régulière des éléments $t_1, \ldots, t_r$ qui engendrent l'idéal $\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$, on calcule $\mathcal{H}^0(\alpha^!(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \bigcap_{i=1}^r \ker(t_i: \mathcal{E} \to \mathcal{E})$. Or, comme $\mathcal{E}$ est à support dans $\mathbb{P}^{n-r}_k$, le théorème de Berthelot–Kashiwara implique $\mathcal{H}^0(\alpha^!(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \alpha^!(\mathcal{E})$. D'où $\alpha^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \bigcap_{i=1}^r \ker(t_i: \mathcal{E} \to \mathcal{E})$. On conclut en lui appliquant le foncteur section globale. □

Lemme 1.3.4. *Soient $\beta: \mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}$ une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels affines et lisses, $x_1, \ldots, x_r$ des générateurs de l'idéal définissant β, $\mathcal{E}$ un $(F\text{-})\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Z},\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans Z'. On dispose alors de l'isomorphisme canonique : $\Gamma(\mathcal{Z}', \beta^!(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \bigcap_{i=1}^r \ker(x_i: \Gamma(\mathcal{Z}, \mathcal{E}) \to \Gamma(\mathcal{Z}, \mathcal{E}))$.*

Démonstration. On procède de manière analogue à la preuve de 1.3.3. □

Lemme 1.3.5. *Soit $\alpha: \widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}$ l'immersion fermée définie par $u_1 = 0, \ldots, u_r = 0$. Soit $\beta: \widehat{\mathbb{A}}^{n-r}_{\mathcal{V}} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}$ le morphisme induit par α. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent à support*

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

dans $\mathbb{P}_k^{n-r}$. Le diagramme canonique,

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathbb{P}_k^{n-r}, \alpha^!(\mathcal{E})) \arrow[rr, "\sim", "1.3.3"'] \arrow[d, hook] & & \bigcap_{i=1}^r \ker(t_i : \Gamma(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{E}) \to \Gamma(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{E})) \arrow[d, hook] \\
\Gamma(\mathbb{A}_k^{n-r}, \alpha^!(\mathcal{E})) \arrow[r, equal] & \Gamma(\mathbb{A}_k^{n-r}, \beta^!(\mathcal{E}|\mathbb{A}_k^n)) \arrow[r, "\sim", "1.3.4"'] & \bigcap_{i=1}^r \ker(t_i : \Gamma(\mathbb{A}_k^n, \mathcal{E}) \to \Gamma(\mathbb{A}_k^n, \mathcal{E}))
\end{tikzcd} \tag{1.3.5.1}$$

où les isomorphismes horizontaux proviennent de 1.3.3 et 1.3.4, est commutatif.

Démonstration. Cela découle de la construction des isomorphismes horizontaux. □

1.3.6 *Quelques équivalences de catégories.* D'après [Car09a], on dispose du foncteur pleinement fidèle $\mathrm{sp}_{Y_0 \hookrightarrow \mathfrak{U},+}$ de la catégorie $\mathrm{Isoc}(Y_0/K)$ des isocristaux convergents sur Y_0 dans celle des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans Y_0. Son image essentielle est constituée par les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{U},\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans Y_0 tels que $v^!(\mathcal{G})$ soit $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent.

La catégorie des isocristaux surcohérents sur Y_0 notée $\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y_0/K)$ est la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules surcohérents $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}|\mathfrak{U}$ soit dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y_0 \hookrightarrow \mathfrak{U},+}$. D'après [Car11], on dispose de l'équivalence $\mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T_0,+} : \mathrm{Isoc}^\dagger(Y_0/K) \cong \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y_0/K)$ entre la catégorie des isocristaux surconvergents sur Y_0 et celle des isocristaux surcohérents sur Y_0. Cela correspond à une extension sans Frobenius du théorème analogue de [Car07], ce qui nous permet d'obtenir la proposition 1.3.7 qui suit sans structure de Frobenius (et par la même occasion, il est inutile de se préoccuper de la compatibilité à Frobenius des constructions, ce qui simplifie la preuve).

Proposition 1.3.7. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent tel que $\mathcal{E}|\mathfrak{U}$ soit dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y_0 \hookrightarrow \mathfrak{U},+}$. Il existe alors un isocristal surconvergent G sur Y_0 et un isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}}$-linéaire :*

$$\mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T_0,+}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}({}^\dagger T_0).$$

Autrement dit, $\mathcal{E}({}^\dagger T_0) \in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y_0/K)$. De plus, si $\mathcal{E}$ est muni d'une structure de Frobenius, alors $\mathcal{E}({}^\dagger T_0)$ est surholonome (voir [CT08]).

Démonstration. Notons $A^\dagger := \Gamma(U^\dagger, \mathcal{O}_{U^\dagger})$, $E := \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ et $E' := D^\dagger_{U^\dagger} \otimes_{D^\dagger} E$ où l'extension $\mathrm{restr} : D^\dagger \to D^\dagger_{U^\dagger}$ choisie pour calculer le produit tensoriel est celle induite par l'immersion ouverte $U^\dagger \subset A^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$, i.e., celle de (1.3.1.1). Notons $\widetilde{Y}^\dagger := g^{-1}(\mathbb{A}^{n-r\dagger}_{\mathcal{V}})$, $a : \widetilde{Y}^\dagger \to \mathbb{A}^{n-r\dagger}_{\mathcal{V}}$ le morphisme fini étale induit par g. Soient $w : Y^\dagger \hookrightarrow \widetilde{Y}^\dagger$ (respectivement $\widetilde{v} : \widetilde{Y}^\dagger \hookrightarrow U^\dagger$) un relèvement de l'immersion fermée $Y_0 \hookrightarrow \widetilde{Y}_0$ (respectivement $\widetilde{Y}_0 \hookrightarrow U_0$). Notons $\beta : \mathbb{A}^{n-r\dagger}_{\mathcal{V}} \hookrightarrow \mathbb{A}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$ et $\alpha : \mathbb{P}^{n-r\dagger}_{\mathcal{V}} \hookrightarrow \mathbb{P}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$ les immersions fermées canoniques. Les complétés p-adiques des morphismes de $\mathcal{V}$-schémas formels faibles lisses seront désignés abusivement par la même lettre, e.g., $\beta : \widehat{\mathbb{A}}^{n-r}_{\mathcal{V}} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{A}}^{n}_{\mathcal{V}}$ ou $\alpha : \widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{P}}^{n}_{\mathcal{V}}$. Notons enfin $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées locales de $U^\dagger$ correspondant via g^* à $t_1, \ldots, t_n$. Posons $G = \bigcap_{i=1}^r \ker(x_i : E' \to E')$.

(*I*) *Le module G correspond à un isocristal surconvergent sur Y_0.*

Une des principales difficultés est d'établir que le module G est un $\Gamma(Y^\dagger, \mathcal{O}_{Y^\dagger,\mathbb{Q}})$-module cohérent. La stratégie est de se ramener via le morphisme g au cas où la compactification de Y_0

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

dans P_0 est lisse. On construit un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent en posant $\mathcal{F} := \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^\dagger_K} g_*(E')$, où $g_*(E')$ désigne le $D^\dagger_K$-module cohérent induit par E' via l'extension $D^\dagger_K \to D^\dagger_{U^\dagger,K}$ induite par g (voir 1.1.6).

(1) *Vérifions l'isomorphisme* $\mathcal{F}|\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} g_+(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$.

D'après (1.2.1.3), $\Gamma(\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},K} \otimes_{D^\dagger_K} g_*(E')$. Via 1.1.8, par associativité du produit tensoriel, il en résulte $\Gamma(\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}, \mathcal{F}) = D^\dagger_{\mathfrak{U},K} \otimes_{D^\dagger_{U^\dagger,K}} E'$. D'un autre côté, d'après (1.2.1.3), on dispose de l'isomorphisme canonique : $D^\dagger_{\mathfrak{U},K} \otimes_{D^\dagger_K} E \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$. D'où : $D^\dagger_{\mathfrak{U},K} \otimes_{D^\dagger_{U^\dagger,K}} E' \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$. Nous avons ainsi établi l'isomorphisme $\Gamma(\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}, \mathcal{F}|\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}, g_*(\mathcal{E}|\mathfrak{U}))$. Or, comme g est fini et étale, $g_*(\mathcal{E}|\mathfrak{U}) \xrightarrow{\sim} g_+(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},\mathbb{Q}}$-module cohérent (en effet, l'image directe par un morphisme propre conserve la $\mathcal{D}^\dagger$-cohérence). Donc, d'après le théorème de type A sur les $\mathcal{D}^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, $\mathcal{F}|\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} g_*(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$.

(2) Posons $\mathcal{H} := v^!(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$. On obtient un $\mathcal{D}^\dagger_{\widetilde{\mathcal{Y}},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{Y}},\mathbb{Q}}$-cohérent en posant $\widetilde{\mathcal{H}} := w_+(\mathcal{H})$. En effet, $\mathcal{H} \in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y_0, Y_0/K)$, i.e., $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent. De plus, comme $\dim \widetilde{Y}_0 = \dim Y_0$ et comme $\widetilde{Y}_0$ est lisse, Y_0 est alors une composante connexe de $\widetilde{Y}_0$. Il en résulte que $\widetilde{\mathcal{H}} \in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\widetilde{Y}_0, \widetilde{Y}_0/K)$.

(3) On dispose de l'isomorphisme $\mathcal{F}|\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} \beta_+ a_+(\widetilde{\mathcal{H}})$. En effet, d'après le théorème de Berthelot–Kashiwara, on dispose de l'isomorphisme canonique $\mathcal{E}|\mathfrak{U} \xrightarrow{\sim} v_+(\mathcal{H})$. Or, d'après l'étape 1), $\mathcal{F}|\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} g_+(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$. On en déduit : $\mathcal{F}|\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} g_+ v_+(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} g_+ \widetilde{v}_+(\widetilde{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\sim} \beta_+ a_+(\widetilde{\mathcal{H}})$.

(4) *Le faisceau* $\mathcal{F}$ *est à support dans* $\mathbb{P}^{n-r}_k$.

Notons $H_1, \ldots, H_r$ les hyperplans de $\mathbb{P}^n_k$ correspondants à $u_1 = 0, \ldots, u_r = 0$. Il résulte de l'isomorphisme de l'étape (3) que $\mathcal{F}|\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}$ est à support dans $\mathbb{A}^{n-r}_k$. Ainsi, pour tout $s = 1, \ldots, r$, $\mathcal{F}({}^\dagger H_s)$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_s \cup H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent nul en dehors de $H_s \cup H_0$. Par [Ber96, 4.3.12], on obtient $\mathcal{F}({}^\dagger H_s) = 0$. En utilisant le triangle de localisation en H_s, on en tire $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{H_s}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$. D'où $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{\mathbb{P}^{n-r}_k}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ (voir [Car04, 2.2.8]). Ainsi, $\mathcal{F}$ est à support dans $\mathbb{P}^{n-r}_k$.

(5) *Établissons que* $\mathcal{F}, \alpha^!(\mathcal{F}) \in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathbb{A}^{n-r}_k, \mathbb{P}^{n-r}_k/K) = \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathbb{A}^{n-r}_k/K)$.

D'après l'étape (4), il suffit d'établir que $\alpha^!(\mathcal{F}) \in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathbb{A}^{n-r}_k/K)$. D'après le théorème de Berthelot–Kashiwara, il résulte de l'étape (4) que $\alpha^!(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}}}({}^\dagger H_0 \cap \mathbb{P}^{n-r}_k)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent vérifiant $\alpha_+ \circ \alpha^!(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$. D'après la caractérisation [Car06b, 2.2.12], pour vérifier que $\alpha^!(\mathcal{F}) \in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathbb{A}^{n-r}_k/K)$, il suffit alors d'établir que $\alpha^!(\mathcal{F})|\widehat{\mathbb{A}}^{n-r}_{\mathcal{V}}$ est $\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{A}}^{n-r}_{\mathcal{V}},\mathbb{Q}}$-cohérent. Or, $\alpha^!(\mathcal{F})|\widehat{\mathbb{A}}^{n-r}_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} \beta^!(\mathcal{F}|\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}})$. Avec l'étape (3), on en déduit alors $\alpha^!(\mathcal{F})|\widehat{\mathbb{A}}^{n-r}_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} \beta^! \beta_+ a_+(\widetilde{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\sim} a_+(\widetilde{\mathcal{H}})$. De plus, comme a est fini et étale, $a_+(\widetilde{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\sim} a_*(\widetilde{\mathcal{H}})$. Or, d'après l'étape (2), $\widetilde{\mathcal{H}}$ est un $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{Y}},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Il en résulte que $a_+(\widetilde{\mathcal{H}})$ est en outre $\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{A}}^{n-r}_{\mathcal{V}},\mathbb{Q}}$-cohérent.

(6) *Le module* G *est un isocristal surconvergent sur* $\widetilde{Y}_0$ *et* $\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{F})) = a_*(G)$.

(a) Comme $\alpha^!(\mathcal{F}) \in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathbb{A}^{n-r}_k/K)$, d'après 1.2.2, $\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{F}))$ est un $D^\dagger_{\mathbb{A}^{n-r\dagger}_{\mathcal{V}},K}$-module cohérent, $\mathcal{V}[t_{r+1}, \ldots, t_n]^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} K$-cohérent.

(b) D'après 1.3.3, comme $E' = \Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}, \mathcal{F})$, on obtient $\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{F})) = \bigcap_{i=1}^r \ker(t_i : E' \to E') = \bigcap_{i=1}^r \ker(x_i : E' \to E') = G$. Comme $\Gamma(\widetilde{Y}^\dagger, \mathcal{O}_{\widetilde{Y}^\dagger})$ est une $\mathcal{V}[t_{r+1}, \ldots, t_n]^\dagger$-algèbre finie, il en résulte que G est un $\Gamma(\widetilde{Y}^\dagger, \mathcal{O}_{\widetilde{Y}^\dagger,\mathbb{Q}})$-module cohérent. De plus, comme E' est un $D_{U^\dagger,K}$-module, par un calcul en coordonnées locales, il en résulte que G est muni d'une structure canonique de $D_{\widetilde{Y}^\dagger,K}$-module telle que, en notant $a_*(G)$ le $D_{\mathbb{A}^{n-r\dagger}_{\mathcal{V}},K}$-module cohérent induit via le morphisme canonique $D_{\mathbb{A}^{n-r\dagger}_{\mathcal{V}},K} \to D_{\widetilde{Y}^\dagger,K}$ induit par a, l'égalité $\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{F})) = a_*(G)$ ci-dessus est $D_{\mathbb{A}^{n-r\dagger}_{\mathcal{V}},K}$-linéaire. D'après 1.2.4, il en résulte que G est un $D^\dagger_{\widetilde{Y}^\dagger,K}$-module cohérent, $\Gamma(\widetilde{Y}^\dagger, \mathcal{O}_{\widetilde{Y}^\dagger})_K$-cohérent.

(7) *L'isocristal convergent sur* $\widetilde{Y}_0$ *induit par* G *est isomorphe à* $\Gamma(\widetilde{\mathcal{Y}}, \widetilde{\mathcal{H}})$ (rappelons que d'après l'étape (2) $\Gamma(\widetilde{\mathcal{Y}}, \widetilde{\mathcal{H}})$ est un isocristal convergent sur $\widetilde{Y}_0$).

(a) D'après 1.1.8, le morphisme canonique de $(D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},K}, D^\dagger_{U^\dagger,K})$-bimodules $D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},K} \otimes_{D^\dagger_K} D^\dagger_{U^\dagger,K} \to D^\dagger_{\mathfrak{U},K}$ est un isomorphisme. On en déduit l'isomorphisme $D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},K}$-linéaire : $D^\dagger_{\mathfrak{U},K} \otimes_{D^\dagger_{U^\dagger,K}} E' \xleftarrow{\sim} D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},K} \otimes_{D^\dagger_K} E'$. Avec 1.3.4 et via le théorème A pour les $\mathcal{D}^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^{n-r},\mathbb{Q}}$-modules cohérents (respectivement $\mathcal{D}^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n,\mathbb{Q}}$-modules cohérents), en lui appliquant le foncteur $? \mapsto \bigcap_{i=1}^r \ker(t_i : ? \to ?)$, on obtient le morphisme $D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^{n-r},K}$-linéaire du bas du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} G = \bigcap_{i=1}^r \ker(x_i : E' \to E') \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \bigcap_{i=1}^r \ker(t_i : E' \to E') \arrow[d, hook] \\ \bigcap_{i=1}^r \ker(x_i : D^\dagger_{\mathfrak{U},K} \otimes_{D^\dagger_{U^\dagger,K}} E' \to D^\dagger_{\mathfrak{U},K} \otimes_{D^\dagger_{U^\dagger,K}} E') & \bigcap_{i=1}^r \ker(t_i : D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},K} \otimes_{D^\dagger_K} E' \to D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},K} \otimes_{D^\dagger_K} E'). \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd} \tag{1.3.7.1}$$

Via un calcul imédiat, ce diagramme est commutatif.

(b) Le terme en bas à gauche de (1.3.7.1) est canoniquement isomorphe à $\Gamma(\widetilde{\mathcal{Y}}, \widetilde{\mathcal{H}})$. En effet, comme $\widetilde{\mathcal{H}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{v}^!(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$, il résulte de 1.3.4 l'isomorphisme : $\Gamma(\widetilde{\mathcal{Y}}, \widetilde{\mathcal{H}}) \xrightarrow{\sim} \bigcap_{i=1}^r \ker(x_i : \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) \to \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}))$. Or, on a vérifié au cours de la preuve de l'étape (1) l'isomorphisme $D^\dagger_{\mathfrak{U},K} \otimes_{D^\dagger_{U^\dagger,K}} E' \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$. D'où le résultat.

(c) On calcule de plus que la flèche de gauche (respectivement de droite) de (1.3.7.1) es $D_{\widetilde{Y}^\dagger,K}$-linéaire (respectivement $D_{\mathbb{A}^{n-r\dagger},K}$-linéaire).

(d) Via le théorème de type A (plus précisément (1.2.1.3)), on vérifie que l'injection $\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}, \mathcal{F}) \subset \Gamma(\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}, \mathcal{F})$ s'identifie au morphisme canonique $E' \to D^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},K} \otimes_{D^\dagger_K} E'$. D'après (1.3.5.1), il en résulte que la flèche de droite de (1.3.7.1) est isomorphe à l'injection $\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{F})) \subset \Gamma(\widehat{\mathbb{A}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{F}))$ de l'isocristal surconvergent sur $\mathbb{A}^{n-r}_k$ associé à $\alpha^!(\mathcal{F})$ dans l'isocristal convergent sur $\mathbb{A}^{n-r}_k$ induit. Or, pour une telle injection $\Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{F})) \subset \Gamma(\widehat{\mathbb{A}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{F}))$ d'un isocristal surconvergent sur $\mathbb{A}^{n-r}_k$ dans l'isocristal convergent induit sur $\mathbb{A}^{n-r}_k$, le morphisme $\mathcal{V}\{t_{r+1}, \ldots, t_n\} \otimes_{\mathcal{V}[t_{r+1},\ldots,t_n]^\dagger} \Gamma(\widehat{\mathbb{P}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{F})) \to \Gamma(\widehat{\mathbb{A}}^{n-r}_{\mathcal{V}}, \alpha^!(\mathcal{F}))$ induit par extension est un isomorphisme. On en déduit que la flèche de gauche de (1.3.7.1) induit par extension l'isomorphisme

$$\Gamma(\widetilde{\mathcal{Y}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{Y}}}) \otimes_{\Gamma(\widetilde{Y}^\dagger, \mathcal{O}_{\widetilde{Y}^\dagger})} G \xrightarrow{\sim} \bigcap_{i=1}^r \ker(x_i : D^\dagger_{\mathfrak{U},K} \otimes_{D^\dagger_{U^\dagger,K}} E' \to D^\dagger_{\mathfrak{U},K} \otimes_{D^\dagger_{U^\dagger,K}} E').$$

Via (b) et (c), on conclut grâce à la remarque 1.3.2 et à la conclusion de la proposition 1.2.4.

(8) *Le module G est aussi un isocristal surconvergent sur Y_0.*

Comme $\widetilde{\mathcal{H}} = w_+(\mathcal{H})$, il résulte de (7) que les restrictions de G sur les composantes connexes $\widetilde{Y}_0$ distinctes de Y_0 sont nulles. Ainsi, G est un isocristal surconvergent sur Y_0.

(*II*) *Construction de l'isomorphisme* $\mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T_0,+}(G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}({}^\dagger T_0)$.

Soient $\mathcal{G} := \mathcal{D}_{Y^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{D_{Y^\dagger,K}} G$, $v_+(\mathcal{G}) := v_*(\mathcal{D}_{U^\dagger \leftarrow Y^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{Y^\dagger,\mathbb{Q}}} \mathcal{G})$ et $v_+(G) := \Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}_{U^\dagger \leftarrow Y^\dagger,\mathbb{Q}}) \otimes_{D_{Y^\dagger,K}} G$. Alors, par (passage de droite à gauche de) [Car06a, 2.4.1], $v_+(G) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U^\dagger, v_+(\mathcal{G}))$ et $v_+(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{U^\dagger} \otimes_{D_{U^\dagger}} v_+(G)$.

Soit $j : U^\dagger \subset \mathbb{P}^{n\dagger}_{\mathcal{V}}$ l'immersion ouverte. On dispose, pour tout $D_{U^\dagger,K}$-module M, d'un morphisme $j_*\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^\dagger,K}} M \to j_*(\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^\dagger,K}} M)$ fonctoriel en M. Lorsque $M = D_{U^\dagger,K}$, celui-ci est un isomorphisme. En appliquant ces deux foncteurs à une présentation finie de $v_+(G)$, on obtient un morphisme entre deux présentations finies (pour le second foncteur, cela résulte comme pour [Car06a, 2.2.9.1] du théorème B pour les $\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}$-modules de présentation finie). Par le lemme des cinq, il en résulte l'isomorphisme $j_*\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^\dagger,K}} v_+(G) \xrightarrow{\sim} j_*(\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^\dagger,K}} v_+(G))$. Donc, $j_*v_+(\mathcal{G}) \xleftarrow{\sim} j_*\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^\dagger,K}} v_+(G)$. D'où :

$$\mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T_0,+}(G) = \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{j_*\mathcal{D}_{U^\dagger,\mathbb{Q}}} j_*v_+(\mathcal{G}) \xleftarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^\dagger,K}} v_+(G). \tag{1.3.7.2}$$

Posons $\widetilde{\mathcal{G}} := w_+(\mathcal{G}) = w_*(\mathcal{G})$ l'image directe de $\mathcal{G}$ par w, $\widetilde{v}_+(G) := \Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}_{U^\dagger \leftarrow \widetilde{Y}^\dagger,\mathbb{Q}}) \otimes_{D_{\widetilde{Y}^\dagger,K}} G$. Soient $\partial_1, \ldots, \partial_n$ les dérivations correspondantes aux coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$. Un calcul classique donne $\widetilde{v}_+(G) \xrightarrow{\sim} K[\partial_1, \ldots, \partial_r] \otimes_K G$ et, comme $G = \bigcap_{i=1}^r \ker(x_i : E' \to E')$, on dispose alors du morphisme canonique $D_{U^\dagger,K}$-linéaire : $\widetilde{v}_+(G) \to E'$ (défini par $\partial_i \otimes x \mapsto \partial_i \cdot x$).

Par transitivité de l'image directe (attention, en tant que $\mathcal{D}$-module et non $\mathcal{D}^\dagger$-module), on obtient $v_+(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{v}_+(\widetilde{\mathcal{G}})$. Comme $\widetilde{\mathcal{G}}$ est un $\mathcal{D}_{\widetilde{Y}^\dagger,\mathbb{Q}}$-module cohérent tel que $\Gamma(\widetilde{Y}^\dagger, \widetilde{\mathcal{G}}) = \Gamma(Y^\dagger, \mathcal{G}) = G$, on en déduit (grâce à nouveau à [Car06a, 2.4.1]) : $v_+(G) \xrightarrow{\sim} \widetilde{v}_+(G)$. D'où le morphisme $D_{U^\dagger,K}$-linéaire : $v_+(G) \to E'$.

Il en dérive le morphisme $D^\dagger_{U^\dagger,K}$-linéaire : $D^\dagger_{U^\dagger,K} \otimes_{D_{U^\dagger,K}} v_+(G) \to E' = D^\dagger_{U^\dagger,K} \otimes_{D^\dagger_K} E$. Or, on bénéficie d'après [Noo03, 2.7.3(ii)] de l'injection canonique : $j_*\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}}$. D'où : $\Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbb{Q}}) \to \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}})$. Comme on dispose des morphismes canoniques $D^\dagger_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \to \Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger,\mathbb{Q}})$ et $\Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}}) \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}}$, il en dérive par composition : $D^\dagger_{U^\dagger,\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}}$. En appliquant le foncteur $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^\dagger_{U^\dagger,K}} -$ à $D^\dagger_{U^\dagger,K} \otimes_{D_{U^\dagger,K}} v_+(G) \to D^\dagger_{U^\dagger,K} \otimes_{D^\dagger_K} E$, on obtient : $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^\dagger,K}} v_+(G) \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^\dagger_K} E$. Or, $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^\dagger_K} E \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D^\dagger_K} E \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E} = \mathcal{E}({}^\dagger T_0)$, le dernier isomorphisme résultant de (1.2.1.1). D'où :

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}} \otimes_{D_{U^\dagger,K}} v_+(G) \to \mathcal{E}({}^\dagger T_0). \tag{1.3.7.3}$$

En composant (1.3.7.2) et (1.3.7.3), on obtient le morphisme canonique $\phi : \mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T_0,+}(G) \to \mathcal{E}({}^\dagger T_0)$. Via [Car06a, 5.2.4], on vérifie que ϕ est un isomorphisme en dehors de T_0. D'après [Ber96, 4.3.12], comme ϕ est un morphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger T_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents, il en résulte que ϕ est un isomorphisme. □

Remarques 1.3.8. La preuve de 1.3.7 utilise le théorème de type A pour les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents (voir [Noo97]) afin de nous ramener à travailler sur les sections globales, ce qui nous permet ensuite de travailler avec les faisceaux des opérateurs différentiels à la Mebkhout–Narváez-Macarro. L'hypothèse que H_0 soit ample est donc fondamentale dans la preuve. Dans le cas de $\mathcal{V}$-schémas formels projectifs, on pourra étendre le lemme 1.3.7 via le corollaire 2.1.3 sans hypothèse sur le diviseur (en nous ramenant au cas où il est ample grâce au fait que le schéma est projectif).

2. Stabilité de l'holonomie

2.1 Résolution des conjectures de Berthelot sur la stabilité de l'holonomie pour les $\mathcal{V}$-schémas formels projectifs et lisses

Grâce à la proposition 1.3.7, on vérifie le théorème 2.1.1 ci-après. Ce théorème était conjecturé pour $\mathcal{P}$ seulement lisse par Berthelot via [Ber02, 5.3.6(D)].

Théorème 2.1.1. *Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel projectif et lisse, H_0 un diviseur de P_0, $\mathfrak{A}$ l'ouvert de $\mathcal{P}$ complémentaire de H_0. Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}})$ tel que $\mathcal{E}|\mathfrak{A} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{A},\mathbb{Q}})$. Alors $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. Comme P_0 est projectif et lisse, H_0 est une intersection finie de diviseurs amples. Comme le cône d'un morphisme de complexes surholonomes est surholonomes, quitte à faire une récurrence sur le nombre de diviseurs amples donnant comme intersection H_0 et à utiliser des triangles de localisation de Mayer–Vietoris (voir [Car04, 2.2.16.2]), on se ramène au cas où H_0 est un diviseur ample. Il existe alors une immersion fermée $\alpha_0 : P_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ telle que $(\mathbb{P}^n_k \backslash \mathbb{A}^n_k) \cap P_0 = H_0$. D'après le théorème de Berthelot–Kashiwara $\alpha_0^{!} \circ \alpha_{0+}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. De plus $\mathcal{E}|\mathfrak{A}$ est holonome si et seulement si $\alpha_{0+}(\mathcal{E})|\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}$ est holonome (pour la version holonome du théorème de Berthelot–Kashiwara, voir par exemple [Car09b, 1.14]). Comme $\alpha_{0+}(\mathcal{E})$ est un F-complexe de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}}({}^{\dagger}\mathbb{P}^n_k \backslash \mathbb{A}^n_k)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents tel que $\mathcal{E}|\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}}$ soit un F-complexe holonome de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathcal{V}},\mathbb{Q}}$-module, comme la surholonomie est préservée par image inverse extraordinaire, on se ramène ainsi au cas où $\mathcal{P} = \widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}$ et $H_0 = \mathbb{P}^n_k \backslash \mathbb{A}^n_k$.

Nous procédons à présent par récurrence sur l'ordre lexicographique $(\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{E}), N_{\mathrm{cmax}})$, où $\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{E})$ désigne la dimension du support de $\mathcal{E}$ et N_{cmax} signifie le nombre de composantes irréductibles du support de $\mathcal{E}$ dont la dimension vaut $\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{E})$, i.e., de dimension maximale. Le cas où $\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{E}) \leqslant 1$ est déjà connu (voir [CT08, 2.3.15]). Supposons donc $\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{E}) \geqslant 1$.

Pour tout entier j, $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$ est un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent tel que $\mathcal{E}|\mathfrak{A}$ est un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{A},\mathbb{Q}}$-module holonome. Or, pour établir que $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$, il suffit de vérifier que, pour tout entier j, $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module surholonome. On se ramène ainsi à supposer que le complexe $\mathcal{E}$ est réduit à un terme.

Notons X_0 le support de $\mathcal{E}$. Soit $\mathfrak{U}$ un ouvert affine de $\mathcal{P}$ inclus dans $\mathfrak{A}$ tel que $Y_0 := X_0 \cap U_0$ soit intègre, lisse et dense dans une composante irréductible de X de dimension $\dim X$. Grâce à Elkik (voir [Elk74], il existe un relèvement $v : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathfrak{U}$ de l'immersion fermée $Y_0 \hookrightarrow U_0$. D'après le théorème de Berthelot–Kashiwara, comme $\mathcal{E}|\mathfrak{U}$ est holonome et à support dans Y_0, $v^{!}(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$ est un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-module holonome. Par [Ber02, 5.3.5(i)], quitte à rétrécir $\mathfrak{U}$ et $\mathcal{Y}$, on peut supposer que $v^{!}(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent. Notons T_0 le diviseur réduit de P_0 complémentaire de U_0 (voir [Car07, 1.3.1]). On peut supposer $\mathfrak{U}$ muni de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ telles que $\mathcal{Y}$ soit défini par l'idéal engendré par $x_1, \ldots, x_r$. En outre, via [Ked05, Theorem 2] (appliqué au point 0 et avec les diviseurs irréductibles définis par $x_1 = 0, \ldots, x_r = 0$), quitte à nouveau à rétrécir U_0, on peut supposer qu'il existe un morphisme fini et étale $g_0 : U_0 \to \mathbb{A}^n_k$ tel que $g_0(Y_0) \subset \mathbb{A}^{n-r}_k$. Grâce à la proposition 1.3.7, il en résulte que $\mathcal{E}(^\dagger T_0)$ est surholonome. On conclut la récurrence en utilisant le triangle de localisation de $\mathcal{E}$ en T_0. $\square$

Remarques 2.1.2. Le théorème 2.1.1 est faux si le complexe $\mathcal{E}$ n'est pas muni d'une structure de Frobenius (pour une version sans structure de Frobenius de la notion d'holonomie, on pourra consulter [Car11]), même en remplaçant l'hypothèse '$\mathcal{E}|\mathfrak{A} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{A},\mathbb{Q}})$' par '$\mathcal{E}|\mathfrak{A} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{A},\mathbb{Q}})$'. En effet, pour ce genre de contre-exemple (i.e., que se passe sans structure de Frobenius ?), il s'agit de revenir à l'exemple donné tout à la fin de [Ber96] par Berthelot ; situation où $\mathcal{P} = \widehat{\mathbb{P}}^1_{\mathcal{V}}$ et $A_0 = \mathbb{G}_{m,k}$. D'après cet exemple, il existe un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}|\mathfrak{A}$ soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{A},\mathbb{Q}}$-cohérent et donc $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{A},\mathbb{Q}}$-holonome et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{A},\mathbb{Q}}$-surholonome. Par contre, ce module $\mathcal{E}$ n'est même pas $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-cohérent.

Avec ce même contre-exemple, le théorème 2.1.4 est faux sans structure de Frobenius.

Le corollaire ci-dessous étend la proposition 1.3.7.

Corollaire 2.1.3. *Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel projectif et lisse, H_0 un diviseur de P_0, $\mathfrak{A}$ l'ouvert de $\mathcal{P}$ complémentaire de H_0, Y_0 un sous-schéma fermé lisse de A_0.*

Il existe une équivalence entre la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(Y_0/K)$ des F-isocristaux surconvergents sur Y_0 et la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}|\mathfrak{A}$ soit dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y_0 \hookrightarrow \mathfrak{A},+}$.

Démonstration. D'après [Car07, 2.3.1], on dispose d'une équivalence entre la catégorie des F-isocristaux surconvergents sur Y_0 et celle des F-isocristaux surcohérents sur Y_0. Or, d'après [Car09b], les modules dans l'image de $\mathrm{sp}_{Y_0 \hookrightarrow \mathfrak{A},+}$ sont holonomes. Par 2.1.1, cela implique qu'un $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}|\mathfrak{A}$ soit dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y_0 \hookrightarrow \mathfrak{A},+}$ est un F-isocristal surcohérent sur Y_0. La réciproque est immédiate. $\square$

Le théorème 2.1.1 reste valable en remplaçant 'holonome' par 'à fibres extraordinaires finies' (voir la définition [Car09b, 2.1] ou [Car09c, 1.3.1]).

Théorème 2.1.4. *Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel projectif et lisse, H_0 un diviseur de P_0, $\mathfrak{A}$ l'ouvert de $\mathcal{P}$ complémentaire de H_0 et $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(^\dagger H_0)_{\mathbb{Q}})$. Si $\mathcal{E}|\mathfrak{A}$ est à fibres extraordinaires finies alors $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle de 2.1.1 mais avec quelques modifications : on se ramène de même au cas où $P_0 = \mathbb{P}^n_k$ et $H_0 = \mathbb{P}^n_k \backslash \mathbb{A}^n_k$. On procède toujours par récurrence sur l'ordre lexicographique $(\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{E}), N_{\mathrm{cmax}})$. Le cas $\dim \mathrm{Supp}(\mathcal{E}) \leqslant 1$ résulte toujours [CT08, 2.3.15]. La différence ici est que l'on ne peut pas directement se ramener au cas où $\mathcal{E}$ est un module car la propriété d'être à fibres extraordinaires finies n'est pas 'a priori' vérifiée pour les espaces de cohomologie $\mathcal{H}^l(\mathcal{E})$, $l \in \mathbb{Z}$. Notons X_0 le support de $\mathcal{E}$. En remplaçant [Ber02, 5.3.5(i)] par [Car09c, 1.3.4] (avec l'égalité [Car09c, 1.3.2]), on vérifie de manière analogue (à la preuve de 2.1.1) qu'il existe un ouvert affine $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{P}$ inclus dans $\mathfrak{A}$ tel que $Y_0 := X_0 \cap U_0$ soit intègre, lisse et dense dans une composante irréductible de X de dimension $\dim X$ et tel que les espaces de cohomologie de $v^!(\mathcal{E}|\mathfrak{U})$ sont $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérents. Or, d'après le théorème de Berthelot–Kashiwara, pour tout entier r, $v^!(\mathcal{H}^r(\mathcal{E})|\mathfrak{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^r(v^!(\mathcal{E}|\mathfrak{U}))$, qui est donc $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-cohérent. Notons T_0 le diviseur réduit de P_0 complémentaire de U_0. En utilisant [Ked05, Theorem 2], quitte à nouveau à rétrécir U_0, on peut supposer qu'il existe un morphisme fini et étale $g_0 : U_0 \to \mathbb{A}^n_k$

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

tel que $g_0(Y_0) \subset \mathbb{A}_k^{n-r}$. Via la proposition 1.3.7, il en résulte que $(\mathcal{H}^r\mathcal{E})(^\dagger T_0)$ est surholonome. Comme $(\mathcal{H}^r\mathcal{E})(^\dagger T_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^r(\mathcal{E}(^\dagger T_0))$, le complexe $\mathcal{E}(^\dagger T_0)$ est donc surholonome. On conclut la récurrence en utilisant le triangle de localisation de $\mathcal{E}$ en T_0. □

Théorème 2.1.5. *Soient $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel projectif et lisse, $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le F-complexe $\mathcal{E}$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$;*

(2) *le F-complexe $\mathcal{E}$ est à fibres extraordinaires finies ;*

(3) *le F-complexe $\mathcal{E}$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$;*

(4) *le F-complexe $\mathcal{E}$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. D'après [CT08], on sait déjà (4) ⇔ (3). L'implication (3) ⇒ (2) est claire. Supposons que $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$. Pour tout entier j, $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$ est $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module surcohérent, et donc surholonome avec (4) ⇔ (3). D'après [Car09b, 2.5], on en déduit que $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$ est holonome. D'où l'implication (3) ⇒ (1). Prouvons à présent (1) ⇒ (4). Supposons donc $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$. Comme $\mathcal{P}$ est projectif, d'après le théorème de Berthelot–Kashiwara, on se ramène au cas où $\mathcal{P} = \widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}$. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan de $\widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}$ défini par $u_0 = 0$, i.e., $H_0 := \mathbb{P}^n_k \backslash \mathbb{A}^n_k$. Alors, d'après 2.1.1, $\mathcal{E}(^\dagger H_0)$ est surholonome. Via le triangle de localisation de $\mathcal{E}$ en H_0, il en résulte que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{H_0}(\mathcal{E})$ est aussi holonome. En notant $\alpha : \mathcal{H} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{P}}^n_{\mathcal{V}}$ l'immersion fermée canonique, on obtient $\alpha^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \alpha^!(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{H_0}(\mathcal{E}))$. D'après la version holonome du théorème de Berthelot–Kashiwara (voir [Car09b, 1.14]), on en déduit que $\alpha^!(\mathcal{E})$ est holonome. En procédant par récurrence sur n, on obtient alors la surholonomie de $\alpha^!(\mathcal{E})$. D'où la surholonomie de $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{H_0}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \alpha_+\alpha^!(\mathcal{E})$. Via le triangle de localisation de $\mathcal{E}$ en H_0, il en résulte que $\mathcal{E}$ est aussi surholonome. Nous avons donc prouvé (1) ⇒ (4). Enfin, pour établir l'implication (2) ⇒ (4) on procède de manière analogue à la preuve de (1) ⇒ (4) modulo le remplacement de l'utilisation du théorème 2.1.1 par 2.1.4. □

D'après la stabilité de la surholonomie (voir [Car09b]), on obtient le corollaire suivant qui répond positivement dans le cas projectif aux conjectures [Ber02, 5.3.6(A), (B)] de Berthelot.

Corollaire 2.1.6. *Soient $f : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels projectifs lisses, $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$, $\mathcal{E}' \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}',\mathbb{Q}})$. Alors $f_+(\mathcal{E}') \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$ et $f^!(\mathcal{E}) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}',\mathbb{Q}})$.*

2.2 Stabilité de l'holonomie par les six opérations de Grothendieck sur les k-variétés quasi-projectives

Notation 2.2.1. Soit Y une variété sur k. On suppose qu'il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ projectif et lisse, un diviseur T de P, un sous-schéma fermé X de P tels que $Y := X \backslash T$. On notera $F\text{-Hol}(\mathcal{P}, T, X/K)$ (respectivement $F\text{-Surhol}(\mathcal{P}, T, X/K)$) la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-modules holonomes (respectivement $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-modules surholonomes) $\mathcal{E}$ à support dans X tels que le morphisme canonique $\mathcal{E} \to \mathcal{E}(^\dagger T)$ soit un isomorphisme. Il résulte de 2.1.5 que $F\text{-Hol}(\mathcal{P}, T, X/K) = F\text{-Surhol}(\mathcal{P}, T, X/K)$. Or, d'après [Car09b, 4.15], la catégorie $F\text{-Surhol}(\mathcal{P}, T, X/K)$ ne dépend à isomorphisme canonique près que de Y/K, i.e., ne dépend pas de tels $\mathcal{P}$, X, T tels que $Y = X \backslash T$. Il en est alors de même de $F\text{-Hol}(\mathcal{P}, T, X/K)$. On la notera simplement $F\text{-Hol}(Y/K)$ ou $F\text{-Surhol}(Y/K)$. Notons que l'on définit sans structure de Frobenius $\mathrm{Surhol}(Y/K)$, alors que $\mathrm{Hol}(Y/K)$ n'a pas de sens a priori (car on ne sait pas si l'holonomie sans structure de Frobenius est stable).

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

Remarques 2.2.2. Soit Y une k-variété affine. Choisissons une immersion fermée de la forme $Y \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k$. En notant X l'adhérence de Y dans $\mathbb{P}^n_k$ et T le diviseur de $\mathbb{P}^n_k$ complémentaire de $\mathbb{A}^n_k$, on obtient $Y = X \backslash T$. Les hypothèses de 2.2.1 sont donc satisfaites pour les schémas affines.

2.2.3 *F-$\mathcal{D}$-modules holonomes sur une k-variété.* Soit Y une variété sur k. Lorsqu'il n'existe pas de $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ projectif et lisse, de diviseur T de P, de sous-schéma fermé X de P tels que $Y = X \backslash T$, d'après [Car09b, 5.2], il est encore possible de construire la catégorie F-Surhol(Y/K) en procédant par recollement (la situation est localement vérifiée grâce à 2.2.2). Avec cette remarque, on définit alors la catégorie F-Hol(Y/K) de manière analogue et on obtient F-Hol$(Y/K) = F$-Surhol(Y/K).

Pour la commodité du lecteur, donnons brièvement sa construction : avec 2.2.2, choisissons un recouvrement fini ouvert $(Y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de Y tel que, pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel projectif et lisse $\mathcal{P}_\alpha$, un sous-schéma fermé X_α de P_α et un diviseur T_α de P_α tels que $Y_\alpha = X_\alpha \backslash T_\alpha$. Pour tous α, β et $\gamma \in \Lambda$, on note $p_1^{\alpha\beta} : \mathcal{P}_\alpha \times_{\mathcal{S}} \mathcal{P}_\beta \to \mathcal{P}_\alpha$ et $p_2^{\alpha\beta} : \mathcal{P}_\alpha \times_{\mathcal{S}} \mathcal{P}_\beta \to \mathcal{P}_\beta$ les projections canoniques, $X_{\alpha\beta}$ l'adhérence schématique de $Y_\alpha \cap Y_\beta$ dans $P_\alpha \times P_\beta$ (via l'immersion $Y_\alpha \cap Y_\beta \hookrightarrow Y_\alpha \times Y_\beta \hookrightarrow P_\alpha \times P_\beta$), $T_{\alpha\beta} = (p_1^{\alpha\beta})^{-1}(T_\alpha) \cup (p_2^{\alpha\beta})^{-1}(T_\beta)$.

Soient $j_1^{\alpha\beta} : Y_\alpha \cap Y_\beta \subset Y_\alpha$, $j_2^{\alpha\beta} : Y_\alpha \cap Y_\beta \subset Y_\beta$, $j_{12}^{\alpha\beta\gamma} : Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma \subset Y_\alpha \cap Y_\beta$, $j_{23}^{\alpha\beta\gamma} : Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma \subset Y_\beta \cap Y_\gamma$ et $j_{13}^{\alpha\beta\gamma} : Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma \subset Y_\alpha \cap Y_\gamma$ les immersions ouvertes. Pour $i = 1, 2$, posons $j_i^{\alpha\beta !} := \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X_{\alpha\beta}} \circ ({}^\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_i^{\alpha\beta !}$. On définit de même les foncteurs $j_{12}^{\alpha\beta\gamma !}$, $j_{13}^{\alpha\beta\gamma !}$, $j_{23}^{\alpha\beta\gamma !}$.

On définit la catégorie F-Hol$(Y,\ (Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ de la façon suivante.

- Un objet est constitué par la donnée, pour tout $\alpha \in \Lambda$, d'un objet $\mathcal{E}_\alpha$ de F-Hol$(\mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha/K)$ et, pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda$, d'un isomorphisme dans F-Hol$(\mathcal{P}_\alpha \times \mathcal{P}_\beta, T_{\alpha\beta}, X_{\alpha\beta}/K)$, $\theta_{\alpha\beta} : j_2^{\alpha\beta !}(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} j_1^{\alpha\beta !}(\mathcal{E}_\alpha)$; ces isomorphismes vérifiant la condition de cocycle $j_{13}^{\alpha\beta\gamma !}(\theta_{\alpha\gamma}) = j_{12}^{\alpha\beta\gamma !}(\theta_{\alpha\beta}) \circ j_{23}^{\alpha\beta\gamma !}(\theta_{\beta\gamma})$.
  La famille d'isomorphismes $(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ est appelée *donnée de recollement* de $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.
- Les flèches $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta_{\alpha\gamma})_{\alpha,\beta\in\Lambda}) \to ((\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}, (\theta'_{\alpha\gamma})_{\alpha,\beta\in\Lambda})$ de la catégorie F-Hol$(Y,\ (Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ sont les familles de morphismes $\mathcal{E}_\alpha \to \mathcal{E}'_\alpha$ commutant aux données de recollement respectives.

La catégorie F-Hol$(Y,\ (Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}/K)$ ne dépend pas du choix de la famille $(Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ et se notera F-Hol(Y/K). Ses objets sont les F-$\mathcal{D}$-modules arithmétiques holonomes sur Y.

2.2.4 *Complexes à cohomologie bornée et F-holonome de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur une k-variété quasi-projective.* Soit Y une variété quasi-projective sur k. Il existe alors un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ projectif et lisse, deux sous-schémas fermés T, X de P tels que $Y = X \backslash T$. On note F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ (respectivement $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$) la sous-catégorie pleine de F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$ (respectivement $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$) des complexes $\mathcal{E}$ à support dans X tels que le morphisme $\mathcal{E} \to \mathcal{E}({}^\dagger T)$ canonique soit un isomorphisme. Or, d'après [Car09b, 4.18], la catégorie $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$ est indépendante, à isomorphisme canonique près, d'un tel choix de $\mathcal{P}$, X, T tels que $Y = X \backslash T$. On la note $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(Y/K)$. D'après 2.1.5, on obtient F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{P}, T, X/K) = F$-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$. On note donc simplement F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y/K)$ à la place de F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{P}, T, X/K)$. Ainsi, F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y/K) = F$-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surhol}}(Y/K)$.

Théorème 2.2.5 (Six opérations cohomologiques de Grothendieck sur les k-variétés quasi-projectives). *Soit $b : Y' \to Y$ un morphisme de variétés quasi-projectives sur k. On dispose des* *foncteurs*

$$b_+, b_! : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y'/K) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y/K),$$

appelés respectivement image directe et image directe extraordinaire par b. On dispose des foncteurs

$$b^+, b^! : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y/K) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y'/K),$$

appelés respectivement image inverse et image inverse extraordinaire par b. On bénéficie du foncteur dual

$$\mathbb{D}_Y : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y/K) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y/K)$$

et du produit tensoriel

$$- \otimes_{\mathcal{O}_Y} - : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y/K) \times F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y/K) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y/K).$$

Démonstration. Par [Car09b, 4.19] (comme Abe a validé dans [Abe10] le fait que l'isomorphisme de dualité relative commute à l'action de Frobenius, avec la remarque [Car09b, 4.22], la structure de Frobenius ne pose pas de problème a posteriori), on obtient alors les foncteurs $b_+, b_! : F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y'/K) \to F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(Y/K)$ appelés respectivement image directe et image directe extraordinaire par b. De même, avec [Car09b, 4.19], [Car09b, 4.22], [CT08] (ou [Car08]), on obtient la construction des autres foncteurs. □

Références

Abe10 T. Abe, *Explicit calculation of Frobenius isomorphisms and Poincaré duality in the theory of arithmetic $\mathcal{D}$-modules*, Preprint (2010), http://arXiv.org/abs/1105.5796.

Ber90 P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules*, in *p-adic analysis (Trento, 1989)* (Springer, Berlin, 1990), 80–124.

Ber96 P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **29** (1996), 185–272.

Ber00 P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **81** (2000).

Ber02 P. Berthelot, *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules*, Astérisque **279** (2002), 1–80, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II.

Car04 D. Caro, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), 1943–1996.

Car05 D. Caro, *Comparaison des foncteurs duaux des isocristaux surconvergents*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **114** (2005), 131–211.

Car06a D. Caro, *Dévissages des F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques en F-isocristaux surconvergents*, Invent. Math. **166** (2006), 397–456.

Car06b D. Caro, *Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes*, Compositio Math. **142** (2006), 169–206.

Car07 D. Caro, *Overconvergent F-isocrystals and differential overcoherence*, Invent. Math. **170** (2007), 507–539.

Car08 D. Caro, *Sur la stabilité par produits tensoriels des F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques* (2008), http://arXiv.org/abs/math/0605125.

Car09a D. Caro, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques associés aux isocristaux surconvergents. Cas lisse*, Bull. Soc. Math. France **137** (2009), 453–543.

Car09b D. Caro, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), 141–192.

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press

Car09c D. Caro, *Une caractérisation de la surcohérence*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **16** (2009), 1–21.

Car11 D. Caro, *Pleine fidélité sans structure de Frobenius et isocristaux partiellement surconvergents*, Math. Ann. **349** (2011), 747–805.

CT08 D. Caro and N. Tsuzuki, *Overholonomicity of overconvergent F-isocrystals over smooth varieties*, ArXiv Mathematics e-prints (2008).

Elk74 R. Elkik, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **6** (1974), 553–603.

Ked02 K. S. Kedlaya, *Étale covers of affine spaces in positive characteristic*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **335** (2002), 921–926.

Ked05 K. S. Kedlaya, *More étale covers of affine spaces in positive characteristic*, J. Algebraic Geom. **14** (2005), 187–192.

LeS07 B. Le Stum, *Rigid cohomology*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 172 (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).

MN90 Z. Mebkhout and L. Narváez-Macarro, *Sur les coefficients de de Rham–Grothendieck des variétés algébriques*, in *p-adic analysis (Trento, 1989)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1454 (Springer, Berlin, 1990), 267–308.

Noo97 C. Noot-Huyghe, *$\mathcal{D}^\dagger$-affinité de l'espace projectif*, Compositio Math. **108** (1997), 277–318, With an appendix by P. Berthelot.

Noo98 C. Noot-Huyghe, *$\mathcal{D}^\dagger(\infty)$-affinité des schémas projectifs*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), 913–956.

Noo03 C. Noot-Huyghe, *Un théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout–Narváez-Macarro*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), 147–199.

Daniel Caro daniel.caro@math.unicaen.fr
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen Campus 2,
14032 Caen Cedex, France

https://doi.org/10.1112/S0010437X11005574 Published online by Cambridge University Press