

P. Bretagnon
 Bureau des Longitudes, Paris, France

La construction de théories planétaires précises est un travail long et, pour ce qui nous concerne, n'est pas encore achevée. Aussi, les résultats dont nous parlerons ici ne sont que des résultats provisoires. Nous développerons quelques aspects des difficultés que nous avons rencontrées et les conséquences de ces difficultés sur l'orientation des méthodes utilisées pour résoudre les problèmes suivant qu'il s'agit des planètes intérieures ou des grosses planètes.

Dans la construction de théories planétaires que nous avons entreprise, l'objectif est d'atteindre une grande précision sur un intervalle de 1000 ans afin d'améliorer les éphémérides. Nous entendons par là conserver, sur cet intervalle, une précision de 0,001 pour les planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars et de 0,01 pour Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

Les termes à longues périodes (périodes des périhélies et des noeuds qui sont comprises entre 50 000 ans et 2 000 000 d'années) sont exprimés sous la forme de développements par rapport au temps. Nos solutions ont donc la forme des solutions de Le Verrier (1855), c'est-à-dire qu'elles contiennent des termes de Poisson. Un élément quelconque s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 x = & x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \dots \\
 & + \sum_i (s_0^i + s_1^i t + s_2^i t^2 + \dots) \sin \phi_i \\
 & + \sum_i (c_0^i + c_1^i t + c_2^i t^2 + \dots) \cos \phi_i
 \end{aligned} \tag{1}$$

où t est le temps et les arguments ϕ_i des combinaisons linéaires des 8 longitudes moyennes. Les coefficients $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, s_0^i, s_1^i, s_2^i, \dots, c_0^i, c_1^i, c_2^i, \dots$ sont des fonctions des éléments métriques et angulaires autres que la longitude. Ils sont conservés sous forme numérique

et sont calculés à partir de valeurs moyennes prises pour 1950.0 (Simon J.L., Bretagnon P. 1975).

Deux systèmes de variables sont utilisés : le premier se compose du demi-grand axe a , de la longitude λ , de l'excentricité de l'orbite e , de la longitude du périhélie $\tilde{\omega}$, de $\gamma = \sin i/2$ où i est l'inclinaison de l'orbite, de la longitude du noeud Ω ; le second se compose de a , λ , $h = e \sin \tilde{\omega}$, $k = e \cos \tilde{\omega}$, $p = \gamma \sin \Omega$, $q = \gamma \cos \Omega$. Le premier système facilite les comparaisons directes semi-analytiques avec la théorie de Le Verrier, le second convient mieux dans le cas d'excentricités ou d'inclinaisons faibles.

Pour résoudre le système des équations de Lagrange pour l'ensemble des huit planètes nous avons envisagé deux méthodes : l'une itérative à travers un formulaire fermé dans les variables osculatrices, l'autre opérant ordre par ordre par rapport aux masses perturbatrices à partir d'un développement de Taylor des seconds membres des équations. L'une et l'autre méthodes conduisant à des calculs volumineux, il est nécessaire, à chaque étape, de vérifier les résultats et de juger de la précision atteinte. Deux moyens efficaces sont la comparaison à d'autres théories et la comparaison à l'intégration numérique. Une analyse terme à terme avec les résultats de Le Verrier et les résultats actuels de J.L. Simon met en évidence les écarts sur les coefficients des inégalités périodiques ou séculaires, sur les courtes ou les moyennes périodes. L'intégration numérique permet une comparaison globale de la théorie pour un temps fixé. Nous utilisons pour cela le programme d'intégration numérique de J. Schubart et P. Stumpff (1966). La comparaison à l'intégration numérique se fait en substituant un temps fixé dans la théorie. Ceci définit un point de départ pour l'intégration numérique, mais ce point de départ est entaché de l'imprécision de la théorie utilisée. La trajectoire engendrée par l'intégration numérique est donc légèrement différente de la solution du problème que l'on cherche à résoudre. Toutefois, dans la comparaison entre la théorie et cette intégration numérique, la plus grande partie des écarts est due aux insuffisances de la théorie et cette comparaison met bien en évidence la précision atteinte. On peut également comparer la théorie à un modèle indépendant dont les conditions initiales ne sont pas liées à notre théorie : l'intégration numérique des APAE (1950), par exemple, ou plus précisément un prolongement sur 1000 ans de cette intégration.

Nous allons maintenant distinguer le cas des planètes intérieures : Mercure, Vénus, la Terre et Mars et celui des grosses planètes : Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

LES PLANETES INTERIEURES

Nous avons tout d'abord appliqué la méthode itérative (Chapront et al., 1975) à l'ensemble des huit planètes. Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{dX_{n+1}}{dt} = F(X_n) \quad (2)$$

où F est une forme fermée, X_n la solution du système à l'itération n et X_{n+1} la solution à l'itération $n+1$; la solution de départ étant pour chaque planète une ellipse képlérienne. X_n et X_{n+1} sont des vecteurs à 48 composantes : les éléments des 8 planètes. Un inconvénient de la méthode itérative est qu'elle nécessite le calcul global des seconds membres des équations de Lagrange (2) ce qui, dans le cas des planètes intérieures, entraîne, pour atteindre la précision recherchée, une prolifération d'arguments dès la deuxième itération. Cela s'explique par l'importance des petits paramètres excentricités et inclinaisons de Mercure, et de Mars également. A titre d'illustration signalons, par exemple, dans la théorie de Mars, au premier ordre, la présence de l'argument $17\lambda_T - 32\lambda_M$ d'ordre 15 en excentricités-inclinaisons qui donne une contribution de l'ordre de 0,002 dans la longitude. Cela s'explique aussi par un rapport élevé des demi-grands axes entre Vénus et la Terre, par la présence d'un grand nombre d'arguments quasi-résonants qui nécessitent une grande précision dans le calcul, et, en outre, par le fait que Mars surtout est perturbée d'une manière importante par presque toutes les planètes du système solaire. Ainsi, le calcul n'est plus limité par la précision souhaitée mais la taille de l'ordinateur. Travaillant actuellement dans des tableaux de 8192 arguments ϕ_i , notre précision s'est révélée très insuffisante pour déterminer correctement les arguments quasi-résonants tels que, par exemple, l'argument $4\lambda_T - 8\lambda_M + 3\lambda_J$ dans la longitude de Mars, argument de période 1783 ans soit 1000 fois environ la période de la planète.

Nous avons donc, pour les planètes intérieures, abandonné la méthode itérative pour une détermination ordre par ordre par rapport aux masses.

Ecrivons l'équation de Lagrange d'une variable quelconque x d'une planète perturbée par une autre :

$$\frac{dx}{dt} = f_x(y_i) ; i = 1, 2, \dots, 12 \tag{3}$$

où les y_i sont les éléments des deux planètes et x est l'un quelconque d'entre eux. La solution s'exprime sous la forme :

$$x = x^{(0)} + \Delta^{(1)}_x + \Delta^{(2)}_x + \Delta^{(3)}_x + \dots \tag{4}$$

où $x^{(0)}$ est la solution képlérienne, $\Delta^{(1)}_x$ les perturbations au premier ordre des masses, $\Delta^{(2)}_x$ celles au deuxième ordre ...
 Nous avons donc :

$$\frac{d\Delta^{(1)}_x}{dt} = f_x(y_i^{(0)}) \tag{5}$$

$$\frac{d\Delta^{(2)}_x}{dt} = \sum_{i=1}^{12} \frac{\partial f_x(y_i^{(0)})}{\partial y_i} \Delta^{(1)} y_i \quad (6)$$

On voit sur l'équation (6) que, contrairement à ce qui se passe dans la méthode itérative, il est aisé de déterminer avec la précision souhaitée un argument quelconque fixé a priori dans le produit de la dérivée

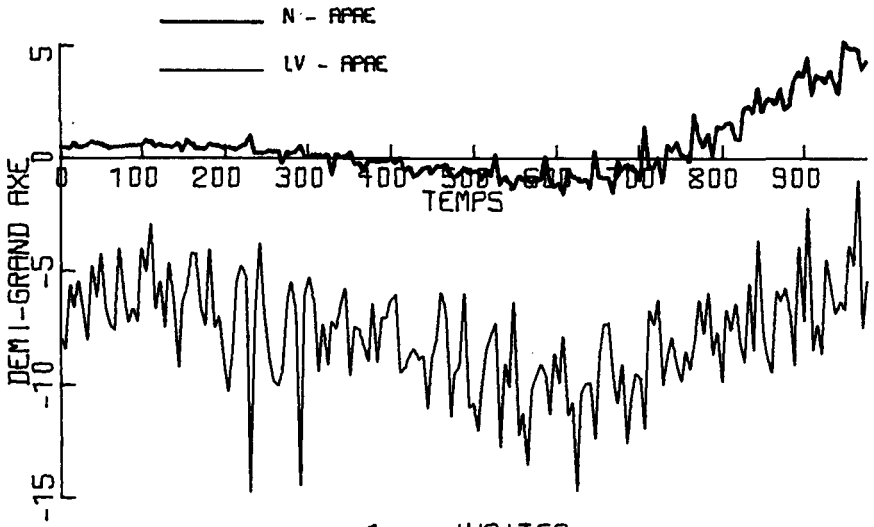
$\frac{\partial f_x(y_i^{(0)})}{\partial y_i}$ par le premier ordre $\Delta^{(1)} y_i$. Nous sommes en train de construire actuellement ce deuxième ordre pour les planètes Mercure, Vénus, la Terre et Mars. Il faudra bien sûr construire le troisième ordre et probablement le quatrième pour atteindre la précision recherchée.

La méthode itérative a toutefois donné, avec trois itérations, une détermination assez bonne pour les arguments de période pas trop grande, c'est-à-dire de l'ordre de quelques dizaines d'années. La solution obtenue sous la forme (1) contient, pour chaque élément, entre 500 et 1000 arguments suivant la planète et l'élément. Nous avons fait des comparaisons à l'intégration numérique sur des périodes courtes : 10 ans. Les écarts sont de quelques 0,01 pour les longitudes et de quelques 0,001 pour les autres éléments, mais il est bien évident que sur un intervalle de temps si court on ne peut voir apparaître les erreurs dues aux termes quasi-résonants.

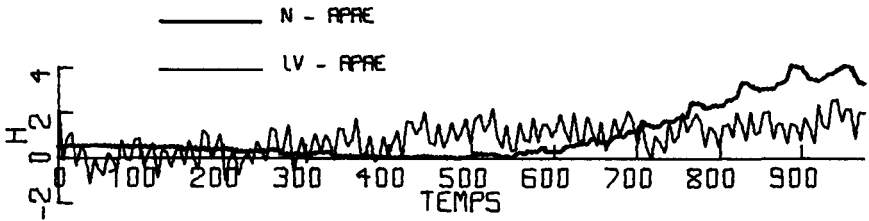
LES GROSSES PLANETES

Pour les grosses planètes, la méthode itérative donne des résultats plus satisfaisants. Il y a en effet une prolifération d'arguments moindre et, toujours dans des tableaux de 8192 arguments ϕ_i , on obtient une précision acceptable : 0,01 sauf pour quelques arguments quasi-résonants pour lesquels on est limité à quelques 0,01. Ces arguments devront être améliorés, pour la partie périodique et la partie en $t \sin t$ de la solution, par la méthode d'accroissement par rapport aux masses. Par ailleurs, pour les grosses planètes, la méthode itérative permettra d'atteindre dans la formule (1) des puissances élevées du temps. Notons quelques problèmes de convergence pour l'argument $\lambda_U - 2\lambda_N$ de période 4200 ans dans les longitudes d'Uranus et de Neptune.

Actuellement nous avons effectué 5 itérations sur des seconds membres des équations de Lagrange limités à leur partie périodique et leur partie en $t \sin t$. Mis à part l'argument $\lambda_U - 2\lambda_N$ dans les longitudes d'Uranus et de Neptune, nous avons obtenu la convergence de notre solution dans les composantes que nous avons conservées, c'est-à-dire les termes périodiques et les termes de Poisson. Nous avons donc une solution de la forme (1) tronquée :



1. a JUPITER



h JUPITER



2. k JUPITER

$$\begin{aligned}
 x = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \sum_i (s_0^i + s_1^i t) \sin \phi_i \\
 + \sum_i (c_0^i + c_1^i t) \cos \phi_i
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Des comparaisons de cette solution à l'intégration numérique ou aux APAE donnent sur 1000 ans des écarts de quelques dizaines de secondes d'arc pour les longitudes et de quelques secondes pour les autres variables.

Nous avons représenté sur les figures 1 à 4 les comparaisons à l'intégration numérique concernant Jupiter. Les temps sont portés en années. La courbe épaisse représente les différences entre notre théorie et les APAE ou l'intégration numérique (N - APAE ou N - IN). La courbe fine représente les différences entre la théorie de Le Verrier et les APAE (LV - APAE). Il s'agit en fait de la théorie de Le Verrier-Gaillot d'où sont tirées les éphémérides publiées dans la Connaissance des Temps.

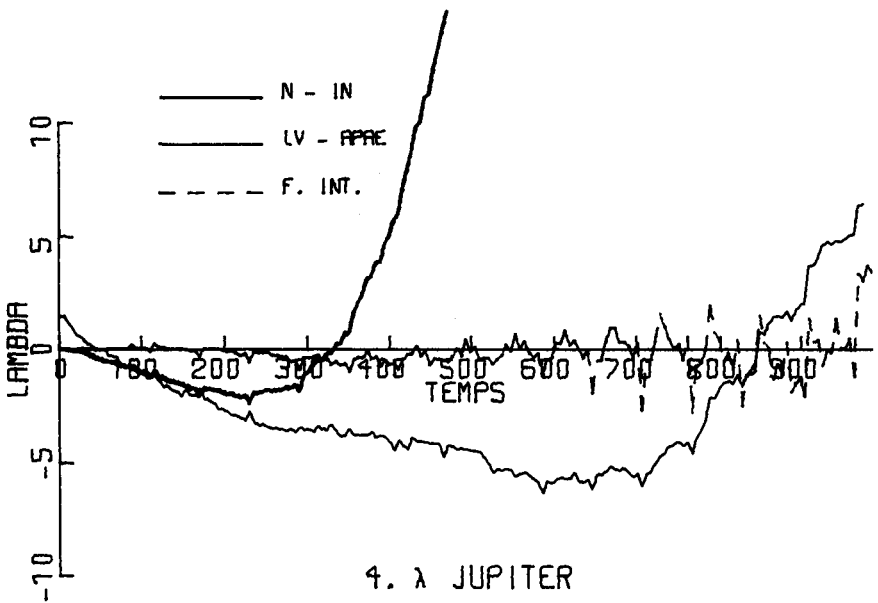
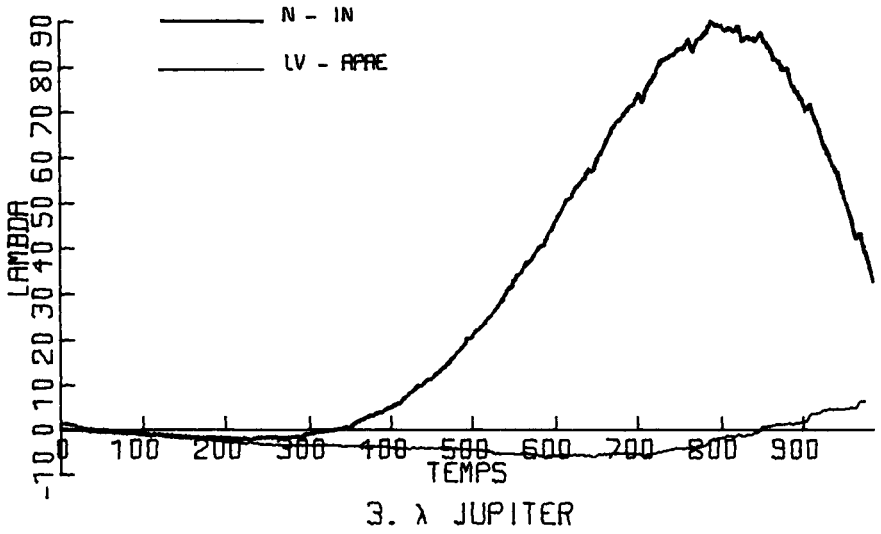
La figure 1 représente les différences exprimées en UA×secondes d'arc, concernant le demi-grand axe. On constate, comme pour les autres éléments, une différence pour $t = 0$ entre la constante utilisée dans la théorie et celle des APAE. Ces différences de constantes d'intégration expliquent une partie des oscillations à courtes périodes que comporte notre courbe. Le reste des écarts est dû à l'insuffisance actuelle de la théorie ; en particulier, on voit très bien apparaître la grande inégalité entre Jupiter et Saturne de période 883 ans et d'amplitude croissant avec le temps. Ce terme est de la forme :

$$s_2 t^2 \sin(2\lambda_J - 5\lambda_S) + c_2 t^2 \cos(2\lambda_J - 5\lambda_S)$$

composante que nous n'avons pas encore déterminée dans notre solution (7). La solution de Le Verrier-Gaillot est ici nettement moins bonne que pour les autres éléments.

La figure 2 représente les différences exprimées en secondes d'arc concernant les variables $h = e \sin \tilde{\omega}$ et $k = e \cos \tilde{\omega}$. On peut faire les mêmes remarques que pour le demi-grand axe. On constate que la théorie de Le Verrier-Gaillot est meilleure pour ces variables que pour le demi-grand axe. Elle ne se dégrade pas avec le temps mais comporte, sur tout l'intervalle, des écarts de quelques secondes. Les écarts entre notre théorie et les APAE, à une différence de constante d'intégration près, restent inférieurs à la seconde pendant plusieurs siècles.

La figure 3 représente les différences exprimées en secondes d'arc concernant la longitude. Dans la longitude, notre solution se dégrade assez rapidement avec le temps car les termes en $t^2 \sin t$, actuellement négligés, atteignent une centaine de secondes au bout de 1000 ans. Mais on voit que cette courbe traduit presque uniquement les effets de la grande inégalité entre Jupiter et Saturne. En effet, la figure 4 représente, à une autre échelle, les deux mêmes courbes et la courbe tiretée (F. INT.) représente une analyse de Fourier des résidus de notre théorie. Dans cette analyse, nous n'avons recherché que la grande inégalité c'est-à-dire que nous avons ajouté à la théorie la fonction :



$$f = x_0 + x_1 t + (s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + s_3 t^3) \sin(2\lambda_J - 5\lambda_S) \\ + (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3) \cos(2\lambda_J - 5\lambda_S)$$

avec :

$$\begin{aligned} x_0 &= -12,96 & x_1 &= -2,54 \times 10^{-3} \text{ ''/an} \\ s_0 &= -4,07 & c_0 &= -12,18 \\ s_1 &= +55,43 \times 10^{-3} \text{ ''/an} & c_1 &= -31,75 \times 10^{-3} \text{ ''/an} \\ s_2 &= +55,38 \times 10^{-6} \text{ ''/an}^2 & c_2 &= +86,26 \times 10^{-6} \text{ ''/an}^2 \\ s_3 &= -5,04 \times 10^{-9} \text{ ''/an}^3 & c_3 &= +12,56 \times 10^{-9} \text{ ''/an}^3 \end{aligned}$$

Cette seule amélioration de la grande inégalité réduit les écarts à moins d'une seconde pendant plus de 500 ans. Nous n'avons pas cherché à analyser les courtes périodes restant, notre but étant de déterminer analytiquement ces termes, ainsi que la grande inégalité. L'étude de la solution actuelle et des résidus montre qu'il sera nécessaire d'atteindre, pour Jupiter et Saturne, des puissances élevées du temps dans les développements de la formule (1), probablement 5 ou 6 pour obtenir la précision de 0,01 pendant 1000 ans.

CONCLUSION

Les progrès restant à faire sont de nature différente pour les planètes intérieures et pour les grosses planètes. Pour les planètes intérieures il nous faut améliorer la précision des termes quasi-résonants afin d'élargir l'intervalle de validité de notre théorie. Pour les grosses planètes il nous faut développer notre solution jusqu'à une puissance élevée du temps et résoudre les problèmes de convergence dans les longitudes d'Uranus et de Neptune.

Ensuite, se posera le problème de l'ajustement des constantes d'intégration. On pourra, pour cela, ajuster notre solution à l'intégration numérique des APAE ou à des intégrations numériques plus récentes comme celle de C. Oesterwinter et C. J. Cohen (1972).

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement Monsieur J. Chapront pour les conseils qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail et Monsieur J.L. Simon dont les recherches m'ont permis de nombreuses vérifications. Je remercie également Monsieur J. Schubart qui nous a donné, par son programme d'intégration numérique, un outil puissant de comparaison. Je remercie enfin Monsieur R. Dvorak qui m'a initié à l'utilisation de ce programme.

'Discussion on the Results of Planetary Theories' by P. Bretagnon

ABSTRACT. Various aspects of the construction of the developments of the solutions are discussed: problem of convergence in iterative methods, comparisons with numerical integrations and ephemerides, special differences between major and minor planets, and precision of the solutions.

REFERENCES

- Chapront, J., Bretagnon, P., Mehl, M. 1975, *Celes. Mech.* Vol 11, 379
Eckert, W.J., Brouwer, D., Clemence, G.M., 1950, *APAE* Vol 12
Le Verrier, U.J.J. 1855, *Ann. Obs. Paris*, Vol 1
Oesterwinter, C., Cohen, C.J. 1972, *Celes. Mech.* Vol 5, 317-395
Schubart, J., Stumpff, P. 1966, *Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts. Heidelberg.* Nr 18
Simon, J.L., Bretagnon, P. 1975, *Astron. & Astrophys.* 42,259
Simon, J.L., Bretagnon, P. 1975, *Astron. & Astrophys. Suppl.* 22,107